Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2016
Dr. Sebastian Andres, Anna Kraut

9. Übungsblatt
„ Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Mittwoch 15.06.16 vor der Vorlesung

---

1. (Negative Binomialverteilung, 4 Punkte)

Wir betrachten das Ziehen von schwarzen und weißen Kugeln aus einer Urne mit Zurücklegen. Dabei sei der Anteil der schwarzen Kugeln p und der weißen entsprechend $1-p$. Für $r \in \mathbb{N}$ beschreibt die Zufallsvariable X die Anzahl der Versuche bis insgesamt r schwarze Kugeln gezogen wurden. Wir schreiben $X \sim \mathrm{NB}(r, p)$.

(i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.
Hinweis: $X = n$ bedeutet, dass nach dem $(n-1)$-ten Versuch insgesamt $r-1$ Kugeln schwarz waren.

(ii) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.
Hinweis: Nutzen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ für beliebiges r.

(iii) Berechnen Sie die Varianz von X.
Hinweis: Nutzen Sie, dass der Erwartungswert für beliebiges r bereits bekannt ist.

2. (Chebychev-Ungleichung; 4 Punkte)

Betrachten Sie das Beispiel zur Herstellung von Computerchips aus der Vorlesung (Seite 65-66 im Skript von Prof. Bovier). Dort wurde mit Hilfe der Chebychev-Ungleichung eine untere Schranke für die Anzahl n der Computerchips gefunden, die produziert werden müssen damit mit 99% Wahrscheinlichkeit eine Million funktionsfähige Chips geliefert werden können. Finden Sie analoge Abschätzungen für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(|S_n - n \cdot 0,8| \geq \delta\sqrt{n})$ ((5.4) im Skript) unter Verwendung

(i) der Ungleichung: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq u) \leq \frac{\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^4\right)}{u^4}$ für $u > 0$.

(ii) der exponentiellen Chebychev-Ungleichung: $\mathbb{P}(X \geq u) \leq e^{-cu}\mathbb{E}(e^{cX})$ für $c, u > 0$.

Vergleichen Sie die erhaltenen Werte mit denen aus der Vorlesung.

3. (Satz von de Moivre-Laplace; 4 Punkte)

Wie im Beweis des Satzes von de Moivre-Laplace sei

$$\begin{aligned} I(p,x) &= \ln\big((x/p)^x[(1-x)/(1-p)]^{1-x}\big) \\ &= x\ln(x/p) + (1-x)\ln((1-x)/(1-p)), \end{aligned}$$

mit $p \in [0,1], x \in [0,1]$. Zeigen Sie:

(i) $I(p,p) = 0$

(ii) $I(p,x)$ is konvex als Funktion von $x \in (0,1)$ und nimmt ihr einziges Minimum $x = p$ an.

(iii) $\frac{\partial^2 I(p,x)}{\partial x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)} \geq 4$ für $x \in (0,1)$.

4. (Normalapproximation; 4 Punkte)

Die 200 Mitglieder des Tennis-Clubs möchten einen Pressesprecher wählen. Es melden sich nur zwei Bewerber, Hein und Johann. Es handelt sich um einfache Mehrheitswahl ohne die möglichkeit der Enthaltung. Die beiden Kandidaten haben bisher kein Profil erworben, sodass die Wahlchancen ausgeglichen erscheinen.

Kurz vor der Wahl gewinnt Hein die Clubmeisterschaft. Das beeindruckt 20 Clubmitglieder so sehr, dass diese spontan beschließen, ihre Stimmen geschlossen für Hein abzugeben. Wie verändern sich dadurch die Wahlchancen der beiden Kandidaten?