

## 14. Übungsblatt „ Stochastik für Lehramt“

Dieses Blatt dient zur Wiederholung der zweiten Vorlesungshälfte.  
Es ist weder als Probeklausur zu betrachten, noch relevant für die Zulassung.

---

### 1. (Der bedingte Erwartungswert)

- (i) Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , wobei  $\Omega$  eine endliche Menge ist. Es seien  $A, B \in \mathcal{F}$  zwei Ereignisse. Definieren Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit von  $A$  gegeben  $B$ .
- (ii)  $\{X_i, i \geq 1\}$  sei eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  mit Erwartungswert  $\mu$ . Zudem sei  $N$  eine Zufallsvariable mit Werten in  $\mathbb{N}$ , welche unabhängig von  $\{X_i, i \geq 1\}$  ist und einen endlichen Erwartungswert besitzt.
  - a) Berechnen Sie für  $n \in \mathbb{N}$  den bedingten Erwartungswert  $\mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^N X_i | N = n \right]$ .  
*Hinweis: Der bedingte Erwartungswert ist der Erwartungswert bezüglich des bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßes.*
  - b) Beweisen Sie, dass  $\mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^N X_i \right] = \mu \mathbb{E}[N]$ .

### 2. (Maximum-Likelihood-Schätzer)

Es seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige, geometrisch verteilte Zufallsvariablen mit unbekanntem Parameter  $\theta \in (0, 1]$ . Für  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  gilt also  $\mathbb{P}(X_i = k) = \theta(1 - \theta)^k$ . Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\theta$ .

### 3. (Niveaus und Fehler beim Testen)

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie ihre Antwort!

- (i) Verwerfen einer Hypothese bedeutet nicht unbedingt, dass die Hypothese falsch ist.
- (ii) Wenn bei einem Test zum Niveau  $\alpha$  das Stichprobenergebnis in den Annahmehereich fällt, ist die Nullhypothese wahr.
- (iii) Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art ist bei einem Test zum Niveau  $\alpha$  nie größer als das Niveau  $\alpha$ .
- (iv) Wenn bei einem Test zum Niveau  $\alpha$  das Stichprobenergebnis nicht in den Annahmehereich fällt, ist die Nullhypothese falsch.

- (v) Ein Test zum Niveau  $\alpha$  kann je nach Festlegung des Wertes von  $\alpha$  bei demselben Stichprobenergebnis zu gegenteiligen Entscheidungen führen.
- (vi) Wenn man eine Nullhypothese annimmt, ist sie auch richtig. Denn sonst könnte man ja gar nicht den Annahmehereich bestimmen.
- (vii) Bei größerem Signifikanzniveau  $\alpha$  wird auch der Annahmehereich größer.
- (viii) Das Niveau  $\alpha$  eines Tests gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Nullhypothese falsch ist.
- (ix) Wenn man zweimal nacheinander (mit unabhängigen Stichproben) den gleichen Test zum Niveau  $\alpha$  durchführt, kann es sein dass man unterschiedlich entscheidet.

#### 4. (Hypothesentest)

Alexandra hat ein Glücksrad gebaut, welches zu einem Viertel blau und ansonsten rot angemalt ist. Yannick behauptet, dass das Rad eiert. Yannick führt einen Test zum Niveau  $\alpha = 0.05$  durch, um Alexandras Behauptung zu überprüfen.

- (i) Formulieren Sie das Testproblem.
- (ii) Das Rad wird nun 50-mal gedreht. Geben Sie die Teststatistik, sowie deren (approximative) Verteilung an und bestimmen Sie den Ablehnbereich des Tests. Wie ist zu entscheiden, wenn 7-mal blau erscheint?
- (iii) Wie ist zu entscheiden, wenn das Rad 100-mal gedreht wird und 14-mal blau erscheint?
- (iv) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100-maligem Drehen Alexandras Behauptung beibehalten wird, obwohl das Rad tatsächlich eiert und nur mit einer Wahrscheinlichkeit von einem Fünftel bei blau stehen bleibt.

#### 5. ( $\chi^2$ -Anpassungstest)

Es wird vermutet, dass bei Pferderennen auf einem ovalen Parcours die Startposition einen Einfluß auf die Gewinnchancen hat. In 144 Rennen hatten die Sieger die Startpositionen  $1, 2, \dots, 8$  mit den folgenden Häufigkeiten: 31, 19, 18, 33, 17, 2, 15, 9. Testen Sie die Hypothese, dass die Startposition keinen Einfluß auf die Siegerchancen hat zum Niveau  $\alpha = 5\%$ .

- (i) Formulieren Sie das Testproblem.
- (ii) Geben Sie die Teststatistik und deren Verteilung an. Bestimmen Sie den Ablehnbereich des Tests.
- (iii) Wie wird bei den oben genannten Häufigkeiten entschieden?

### Tabelle der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Beispiel: Der Eintrag in Zeile 1.1 und Spalte 0.02 ist  $\Phi(1.12)$ .

$x$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

## Tabelle der Quantile der Chiquadrat-Verteilung

$\alpha$ -Quantile  $\chi_{n;\alpha}^2$  der Chiquadrat-Verteilungen  $\chi_n^2$  mit  $n$  Freiheitsgraden.  $\chi_{n;\alpha}^2$  ist der Wert  $c > 0$  mit  $\chi_n^2([0, c]) = \alpha$ .

Notation:  $^{-5}3.9 \equiv 3.9 \cdot 10^{-5}$ .

$\alpha =$	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	0.9	0.95	0.98	0.99	0.995
$n = 1$	$^{-5}3.9$	$^{-4}1.6$	$^{-4}6.3$	$^{-3}3.9$	0.0158	2.706	3.842	5.412	6.635	7.879
2	0.0100	0.0201	0.0404	0.1026	0.2107	4.605	5.991	7.824	9.210	10.60
3	0.0717	0.1148	0.1848	0.3518	0.5844	6.251	7.815	9.837	11.34	12.84
4	0.2070	0.2971	0.4294	0.7107	1.064	7.779	9.488	11.67	13.28	14.86
5	0.4117	0.5543	0.7519	1.145	1.610	9.236	11.07	13.39	15.09	16.75
6	0.6757	0.8721	1.134	1.635	2.204	10.65	12.59	15.03	16.81	18.55
7	0.9893	1.239	1.564	2.167	2.833	12.02	14.07	16.62	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.032	2.733	3.490	13.36	15.51	18.17	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.532	3.325	4.168	14.68	16.92	19.68	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.059	3.940	4.865	15.99	18.31	21.16	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.609	4.575	5.578	17.28	19.68	22.62	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.178	5.226	6.304	18.55	21.03	24.05	26.22	28.30
13	3.565	4.107	4.765	5.892	7.042	19.81	22.36	25.47	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.368	6.571	7.790	21.06	23.68	26.87	29.14	31.32
15	4.601	5.229	5.985	7.261	8.547	22.31	25.00	28.26	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.614	7.962	9.312	23.54	26.30	29.63	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.255	8.672	10.09	24.77	27.59	31.00	33.41	35.72
18	6.265	7.015	7.906	9.390	10.86	25.99	28.87	32.35	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.567	10.12	11.65	27.20	30.14	33.69	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.237	10.85	12.44	28.41	31.41	35.02	37.57	40.00
21	8.034	8.897	9.915	11.59	13.24	29.62	32.67	36.34	38.93	41.40
22	8.643	9.542	10.60	12.34	14.04	30.81	33.92	37.66	40.29	42.80
23	9.260	10.20	11.29	13.09	14.85	32.01	35.17	38.97	41.64	44.18
24	9.886	10.86	11.99	13.85	15.66	33.20	36.42	40.27	42.98	45.56
25	10.52	11.52	12.70	14.61	16.47	34.38	37.65	41.57	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.41	15.38	17.29	35.56	38.89	42.86	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.13	16.15	18.11	36.74	40.11	44.14	46.96	49.64
28	12.46	13.56	14.85	16.93	18.94	37.92	41.34	45.42	48.28	50.99
29	13.12	14.26	15.57	17.71	19.77	39.09	42.56	46.69	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.31	18.49	20.60	40.26	43.77	47.96	50.89	53.67
35	17.19	18.51	20.03	22.47	24.80	46.06	49.80	54.24	57.34	60.27
40	20.71	22.16	23.84	26.51	29.05	51.81	55.76	60.44	63.69	66.77
50	27.99	29.71	31.66	34.76	37.69	63.17	67.50	72.61	76.15	79.49
75	47.21	49.48	52.04	56.05	59.79	91.06	96.22	102.2	106.4	110.3
100	67.33	70.06	73.14	77.93	82.36	118.5	124.3	131.1	135.8	140.2