

10. Übungsblatt „ Stochastik für Lehramt“

Abgabe bis Mittwoch 22.06.16 vor der Vorlesung

1. (Normalapproximation und Parameterschätzung; 5 Punkte)

Bei einem original Haribo Goldbär ist die Wahrscheinlichkeit 0.2, dass er auf dem Rücken landet. Hendrik wirft 100 Bären. Die Zufallsvariable X zählt die Bären, die auf dem Rücken landen.

- (i) Beschreiben Sie das Modell durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und begründen Sie, dass X binomialverteilt ist.
- (ii) Bestimmen Sie den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 von X .
- (iii) Berechnen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X \leq 20)$, $\mathbb{P}(X > 15)$, $\mathbb{P}(15 < X \leq 20)$ und $\mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$.
- (iv) Bestimmen Sie approximativ das kleinste c , sodass $\mathbb{P}(\mu - c \leq X \leq \mu + c) \geq 0.8$.
- (v) Die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass der Goldbär auf dem Rücken landet, soll nun geschätzt werden. Bei 321 von 1600 Würfeln landete der Goldbär auf dem Rücken. Geben Sie einen konsistenten Schätzer \hat{p} für p an. Bestimmen Sie approximativ das kleinste c , sodass $\mathbb{P}(|p - \hat{p}| > c) \leq 0.1$.

2. (Chebyshev für Frequenzschätzer; 3 Punkte)

Zeigen Sie Lemma 2.4 aus der Vorlesung (Lemma 6.3 im Skript von Prof. Bovier):
Sei $X_i, i \in \mathbb{N}$, eine Folge reellwertiger, unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Verteilung ν auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann gilt, für jede Borelmenge A , dass

$$\mathbb{P}(|\nu_n(A) - \nu(A)| > c\nu(A)) \leq \frac{1}{nc^2\nu(A)},$$

wobei $\nu_n(A) = 1/n \cdot \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_A(X_i)$ den Frequenzschätzer bezeichnet.

3. (Stichprobengröße und Normalapproximation; 4 Punkte)

Was hat Föderalismus mit Schwangerschaft zu tun?

BM Berlin, 14. Juli
„Was versteht man unter Föderalismus?“ – das wollten die Wickert-Institute (Tübingen) in den vergangenen zwei Wochen von 3712 Befragten in West-Deutschland. Ergebnis: Nur 41 Prozent gaben eine richtige oder wenigstens annähernd richtige Antwort.

Dabei war der Begriff „Föderalismus“ in letzter Zeit von Politikern besonders häufig verwendet worden – nicht zuletzt in der Diskussion um die Verlegung oder Nichtverlegung von Regierung und Parla-

ment nach Berlin. Dennoch bekannten fast 53 Prozent aller Befragten rundheraus, mit „Föderalismus“ könnten sie absolut nichts anfangen. Und sechs Prozent erklärten den Begriff total falsch.

So wurde behauptet, „Föderalismus“ habe etwas mit Kohleförderung zu tun. Oder mit Beamtenbeförderung. Subventionen beziehungsweise Zonenrandförderung.

Sogar in Verbindung mit Schwangerschaften und dem Schutz des ungeborenen Lebens wurde „Föderalismus“ gebracht.

Das Wickert-Institut in Tübingen ermittelte per Umfrage, welcher Prozentsatz der erwachsenen Bevölkerung den Begriff Föderalismus korrekt erklären kann. Wir nehmen an, dass dieser Prozentsatz auf $\pm 2\%$ genau zu schätzen war, und zwar mit einer Sicherheit von 95%.

- (i) Bestimmen Sie, wie viele Personen theoretisch zu befragen wären.
- (ii) Die Umfrage ergab, dass der gesuchte Anteil ca. 40% betrug. Wie viele Personen hätten folglich nur befragt werden müssen?

4. (Maximum-Likelihood-Schätzer; 4 Punkte)

- (i) Seien X_1, \dots, X_n unabhängig, identisch exponentialverteilt mit unbekanntem Parameter $\theta > 0$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ .
- (ii) Seien X_1, \dots, X_n unabhängig, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichte

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2} e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit einem unbekanntem Parameter $\theta > 0$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ .