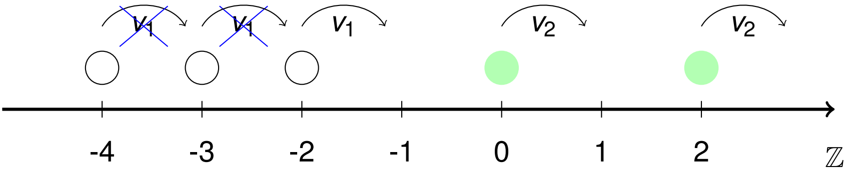
Fluctuations anormales du choc dans le processus d'exclusion

Peter Nejjar
en collaboration avec Patrik Ferrari

Université de Bonn
Institut de mathématiques appliquées

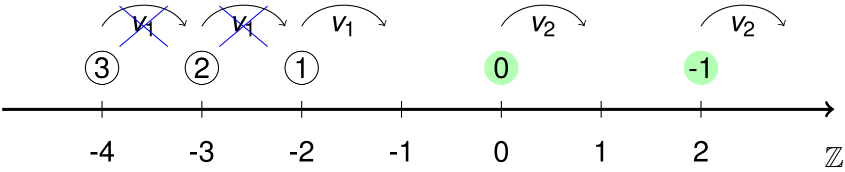
11ième colloque des jeunes probabilistes et statisticiens
Forges-les-Eaux, 6.4 - 11.4 2014

TASEP



- **Dynamique**: particules placées sur $\mathbb{Z}$ sautent sur le site à leur droite, indépendamment en respectant la contrainte d'exclusion
- On considère aussi des taux de sauts dépendants des particules

TASEP



- **Dynamique**: particules placées sur $\mathbb{Z}$ sautent sur le site à leur droite, indépendamment en respectant la contrainte d'exclusion
- On considère aussi des taux de sauts dépendants des particules

On numérote les particules de droite à gauche

$$\ldots < x_3(0) < x_2(0) < x_1(0) < 0 \leq x_0(0) < x_{-1}(0) < \ldots$$

$$x_k(t) = \text{position de la particule } k \text{ à l'instant } t$$

TASEP: KPZ et déterminants

Soit $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ une condition initiale (CI), i.e. $\eta(x) = 1$ si x est initialement occupé , sinon $\eta(x) = 0$. On y associe une fonction de hauteur $h(x)$ en fixant

$$h(0) = 0, \quad h(x+1) - h(x) = 1 - 2\eta(x),$$

TASEP: KPZ et déterminants

Soit $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ une condition initiale (CI), i.e. $\eta(x) = 1$ si x est initialement occupé , sinon $\eta(x) = 0$. On y associe une fonction de hauteur $h(x)$ en fixant

$$h(0) = 0, \quad h(x+1) - h(x) = 1 - 2\eta(x),$$

- Le TASEP est alors un modèle de croissance aléatoire, membre de la classe **KPZ**.

TASEP: KPZ et déterminants

Soit $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ une condition initiale (CI), i.e. $\eta(x) = 1$ si x est initialement occupé , sinon $\eta(x) = 0$. On y associe une fonction de hauteur $h(x)$ en fixant

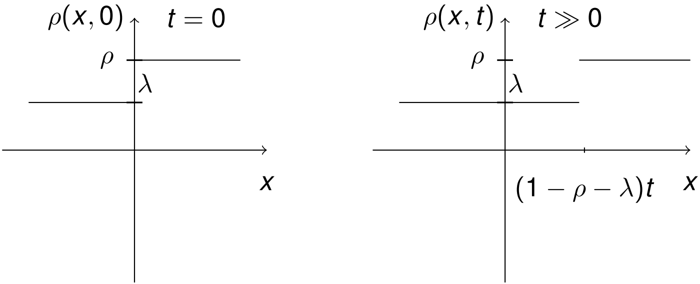
$$h(0) = 0, \quad h(x+1) - h(x) = 1 - 2\eta(x),$$

- Le TASEP est alors un modèle de croissance aléatoire, membre de la classe **KPZ**.
- Le TASEP a une structure déterminantale, on a pour toute CI détérministe [BF '08]:

$$\mathbb{P}\left(x_k(t) \leq s\right) = \det(1 - \chi_s K_t \chi_s).$$

Chocs

- Discontinuités de la densité des particules sont appelées **chocs**

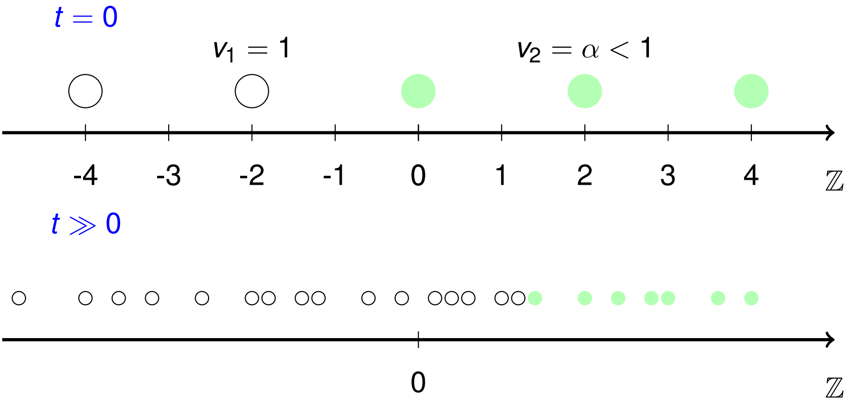


- Condition initiale : $\mathrm{Ber}(\rho)$ sur $\mathbb{N}$ et $\mathrm{Ber}(\lambda)$ sur $\mathbb{Z}_-$.
- Le choc est identifié par la position Z_t d'une particule de deuxième classe :

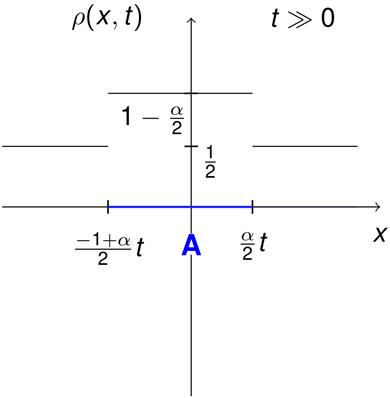
$$\frac{Z_t - vt}{t^{1/2}} \xrightarrow{t\to\infty} \mathcal{N}(0,1),\ v = 1-\rho-\lambda \qquad (1)$$

Question: Pour des conditions initiales (CI) déterministes les fluctuations du choc sont-elles encore gaussiennes et d'ordre $t^{1/2}$?

TASEP à deux vitesses et CI périodique



Description macroscopique du profil de densité



- La dernière particule lente se trouve à $(1-\rho)\alpha t = \frac{\alpha}{2}t$.
- Derrière, il y a une région A de densité $\rho = 1-\alpha/2$, donc plus élevée.
- La particule $\frac{2-\alpha}{4}t$ se trouve à la position du choc.

Pour $\eta \neq \frac{2-\alpha}{4}$, la particule ηt se trouve dans les régions de densité constante. Les fluctuations de sa position $x_{\eta t}$ sont gouvernées par la loi F_1 GOE Tracy-Widom des matrices aléatoires et sont d'ordre $t^{1/3}$.

But: Déterminer les fluctuations de $x_{n(t)}$ lorsque $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{x_{n(t)}(t) - vt}{t^{1/3}} \leq s\right) =?$$

où vt est la position (macro) de la particule $n(t)$. Dans notre exemple: $n(t) = \frac{2-\alpha}{4} t$, $vt = \frac{-1+\alpha}{2} t$

Pour toute CI détérministe, la loi de $x_{n(t)}$ est donnée par le déterminant de Fredholm d'un opérateur avec un noyau K_t [BF '08],

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{x_{n(t)}(t) - vt}{t^{1/3}} \leq s\right) = \lim_{t\to\infty} \det(1 - \chi_s K_t \chi_s), \quad (2)$$

But: Déterminer les fluctuations de $x_{n(t)}$ lorsque $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{x_{n(t)}(t) - vt}{t^{1/3}} \leq s\right) =?$$

où vt est la position (macro) de la particule $n(t)$. Dans notre exemple: $n(t) = \frac{2-\alpha}{4}t$, $vt = \frac{-1+\alpha}{2}t$

Pour toute CI détérministe, la loi de $x_{n(t)}$ est donnée par le déterminant de Fredholm d'un opérateur avec un noyau K_t [BF '08],

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{x_{n(t)}(t) - vt}{t^{1/3}} \leq s\right) = \lim_{t\to\infty} \det(1 - \chi_s K_t \chi_s), \qquad (2)$$

Problème: K_t diverge dans notre exemple (même si le déterminant de Fredholm converge). Donc la limite (2) ne peut pas être analysée directement.

Résultat principal

Théorème (Choc F_1–F_1, [Ferrari, N. '14])

Soit $x_n(0) = -2n$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Pour $\alpha < 1$ soit $\eta = \frac{2-\alpha}{4}$ et $v = -\frac{1-\alpha}{2}$. On a

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{x_{\eta t+\xi t^{1/3}}(t) - vt}{t^{1/3}} \le s\right) = F_1\left(\frac{s-2\xi}{\sigma_1}\right) F_1\left(\frac{s-\frac{2\xi}{2-\alpha}}{\sigma_2}\right),$$

où F_1 est la loi GOE de Tracy-Widom, $\sigma_1 = \frac{1}{2}$ et $\sigma_2 = \frac{\alpha^{1/3}(2-2\alpha+\alpha^2)^{1/3}}{2(2-\alpha)^{2/3}}$.

Résultat principal

Théorème (Choc F_1–F_1, [Ferrari, N. '14])

Soit $x_n(0) = -2n$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Pour $\alpha < 1$ soit $\eta = \frac{2-\alpha}{4}$ et $v = -\frac{1-\alpha}{2}$. On a

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{x_{\eta t+\xi t^{1/3}}(t) - vt}{t^{1/3}} \leq s\right) = F_1\left(\frac{s-2\xi}{\sigma_1}\right) F_1\left(\frac{s-\frac{2\xi}{2-\alpha}}{\sigma_2}\right),$$

où F_1 est la loi GOE de Tracy-Widom, $\sigma_1 = \frac{1}{2}$ et $\sigma_2 = \frac{\alpha^{1/3}(2-2\alpha+\alpha^2)^{1/3}}{2(2-\alpha)^{2/3}}$.

En remplaçant $s \to s + 2\xi$, lorsque $\xi \to +\infty$ on retrouve GOE, également en changeant $s \to s + 2\xi/(2-\alpha)$ et $\xi \to -\infty$.

Percolation de dernier passage (LPP)

Ansatz: Reformulation du problème en termes d'un modèle de **LPP général.**
Soient $(\omega_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ des v. a. indépendantes, $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{Z}^2$ et π une trajectoire nord-est de $\mathcal{L}$ à (m, n).
Le temps maximal de percolation $L_{\mathcal{L}\to(m,n)}$ est donné par

$$L_{\mathcal{L}\to(m,n)} := \max_{\pi:\mathcal{L}\to(m,n)} \sum_{(i,j)\in\pi} \omega_{i,j} = \sum_{(i,j)\in\pi^{\max}} \omega_{i,j}.$$

Percolation de dernier passage (LPP)

Ansatz: Reformulation du problème en termes d'un modèle de **LPP général.**
Soient $(\omega_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ des v. a. indépendantes, $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{Z}^2$ et π une trajectoire nord-est de $\mathcal{L}$ à (m, n).
Le temps maximal de percolation $L_{\mathcal{L}\to(m,n)}$ est donné par

$$L_{\mathcal{L}\to(m,n)} := \max_{\pi:\mathcal{L}\to(m,n)} \sum_{(i,j)\in\pi} \omega_{i,j} = \sum_{(i,j)\in\pi^{\max}} \omega_{i,j}.$$

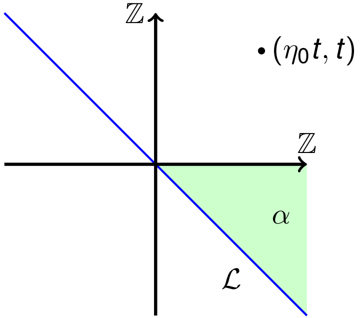
TASEP avec CI $(x_k(0))_{k\in\mathbb{Z}}$. Posons

- $\omega_{i,j}$ le temps d'attente exponentiel de la particule j,
- $\mathcal{L} = \{(k, u) | u = k + x_k(0), k \in \mathbb{Z}\}$,

on a

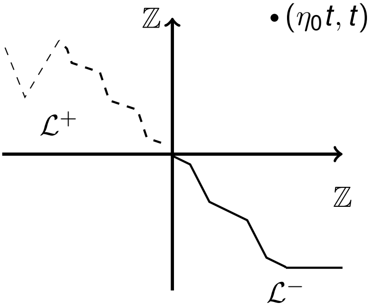
$$\mathbb{P}\left(L_{\mathcal{L}\to(m,n)} \leq t\right) = \mathbb{P}\left(x_n(t) \geq m - n\right).$$

Exemple: TASEP à deux vitesses comme LPP



- $\mathcal{L} = \{(u, -u) : u \in \mathbb{Z}\}$
- $\omega_{i,j} \sim \exp(1)$ dans la région blanche, $\exp(\alpha)$ dans la région verte.

Théorème général



Supposons qu'il existe une constante μ telle que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{L_{\mathcal{L}^+\to(\eta_0 t,t)} - \mu t}{t^{1/3}} \leq s\right) = G_1(s),$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{L_{\mathcal{L}^-\to(\eta_0 t,t)} - \mu t}{t^{1/3}} \leq s\right) = G_2(s).$$

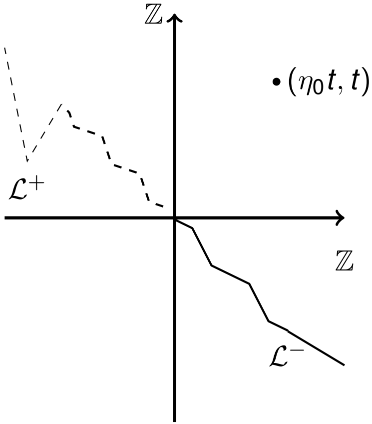
Théorème (Ferrari, N. 14)

Sous certaines hypothèses on a

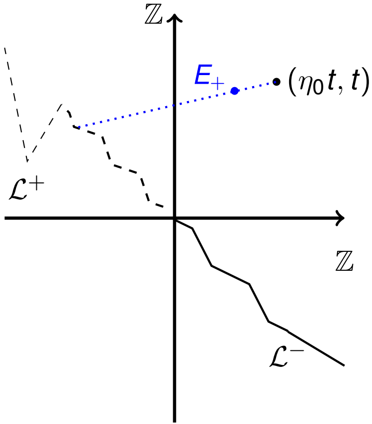
$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{L_{\mathcal{L}\to(\eta_0 t,t)} - \mu t}{t^{1/3}} \leq s\right) = G_1(s)G_2(s),$$

où $\mathcal{L} = \mathcal{L}^+ \cup \mathcal{L}^-$.

A propos des hypothèses



A propos des hypothèses

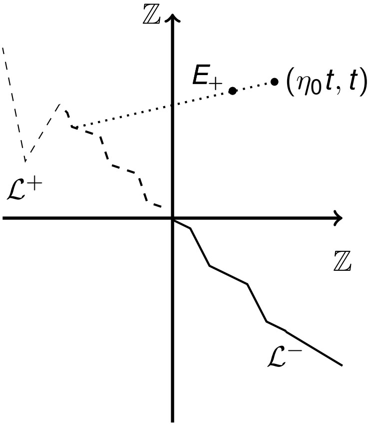


I. Supposons $\exists$ un point $E^+ = (\eta_0 t - \kappa t^\nu, t - t^\nu)$ tel que, pour certains μ_0 et $\nu \in (1/3, 1)$, on a

$$\frac{L_{\mathcal{L}^+ \to E_+} - \mu t + \mu_0 t^\nu}{t^{1/3}} \to G_1$$

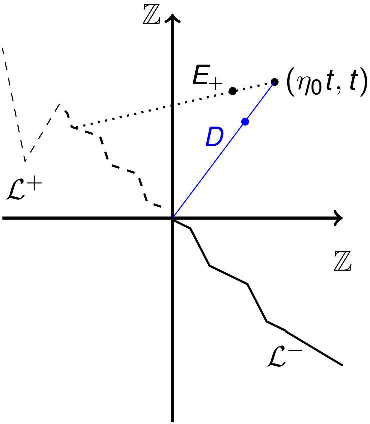
$$\frac{L_{E^+ \to (\eta_0 t, t)} - \mu_0 t^\nu}{t^{\nu/3}} \to G_0,$$

A propos des hypothèses



I. *Décorrélation lente*

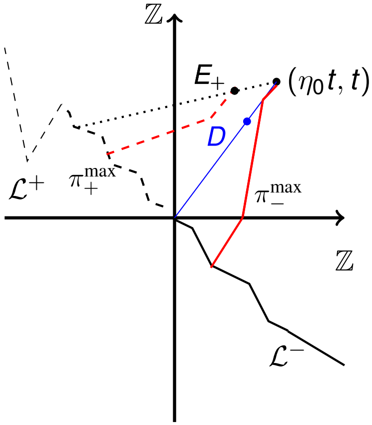
A propos des hypothèses



I. *Décorrélation lente*

II. Supposons $\exists$ un point D sur $\overline{(0,0)(\eta_0 t, t)}$ et à droite de E_+ tel que $\pi_+^{\max}$ et $\pi_-^{\max}$ ne croisent pas $\overline{(0,0)D}$ avec probabilité 1 pour $t \to \infty$.

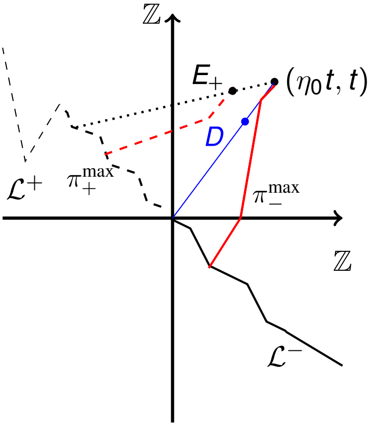
A propos des hypothèses



I. *Décorrélation lente*

II. Supposons $\exists$ un point D sur $\overline{(0,0)(\eta_0 t, t)}$ et à droite de E_+ tel que $\pi_+^{\max}$ et $\pi_-^{\max}$ ne croisent pas $\overline{(0,0)D}$ avec probabilité 1 pour $t \to \infty$.

A propos des hypothèses



I. *Décorrélation lente*

II. *Pas de croisements*

Remarques:

- (I.) est lié au phenomène universel de la décorrélation lente [CFP '12]
- (II.) suit si les lignes caractérisiques des deux problèmes LPP se croisent à $(\eta_0 t, t)$ (ceci est précisement le cas pour les chocs), et si les fluctuations transversales sont seulement d'ordre $\mathcal{O}(t^{2/3})$ [J '00]

Merci de votre attention!

[CFP '12]
Ivan Corwin, Patrik Ferrari, Sandrine Péché,
Universality of slow decorrelation, Ann. Inst. H. Poincaré B 48 (2012), 134-150

[J '00]
K. Johansson,
Transversal fluctuations for increasing subsequences on the plane, Probab. Theory Related Fields 116 (2000), 445-456.

[BF '08]
Alexei Borodin, Patrik Ferrari *Large time asymptotics of growth models on space-like paths I: PushASEP* Electron. J. Probab. 13 (2008), 1380-1418

[Ferrari, N. '14]
Patrik Ferrari, Peter Nejjar
Anomalous shock fluctuations in TASEP and last passage percolation models, PTRF, 2014, online first