Stochastische Analysis (Grundzüge).

1) Einleitung:

- Program: (a) Brownsche Bewegung: das "fil-rouge".
  (b) Filtrationen und Martingale in stetiger Zeit.
  (c) Stetige Semimartingale.
  (d) Stochastische Integration und Itô-Formel
  (e) Brownsche Martingale (Zeitwechsel, Girsanov, ..)
  (f) Starke Lösung von stochastische Differential-gleichungen.

- In stochastische Analysis studiert man zufällige Funktionen einer Variable (=die Zeit), Integralen und Ableitungen diesen Funktionen.

- Da, die Zeit t wird Werte in $\mathbb{R}$ nehmen, die Funktionen können als Pfade einen zufälligen Prozess betrachtet werden.

  - Das Schritt von diskrete zu stetiger Zeit wird die Formeln vereinfachen, aber dafür muss man mehr arbeiten um die Theorie zu konstruieren.
  (z.B.: $\int_0^t x^3 dx$ ist einfacher als $\sum_{k=1}^{4} k^3$, but ...).

. Stochastische Analysis kann in mehrere Situationen angewandt werden.

<u>Beispiele:</u> 1 Sei S_t die Populationsgrösse zur Zeit t,
R die mittelwertige Wachstumsrate

$$\Rightarrow \frac{dS_t}{dt} = R \cdot S_t \qquad .. \quad \text{wenn deterministisch.}$$

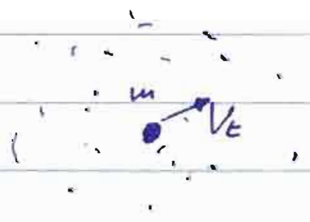
Aber wenn gibt Fluktuationen im Wachstumsrate,

$$\Rightarrow \frac{dS_t}{dt} = (R + \text{“}N_t\text{”})\, S_t \quad \text{mit } N_t \equiv \text{Rausch.}$$

2 <u>Langevin-Gleichung:</u> beschreibt das Verhältnis einer Pollen-teilchen in einer Flüssigkeit:

$$m \frac{dV_t}{dt} = -\eta V_t + \text{“}N_t\text{”}$$

Wobei:
- m = Pollen Mass,
- V_t = Geschwindigkeit der Teilchen, (Pollen)
- η = Viscosität
- N_t = zufälliges Rausch von Flussigkeitsteilchen. (Kollisionen)



3 <u>Stocks:</u> Wenn S_t = Stock-preis zur Zeit t ist durch $\frac{dS_t}{dt} = (R + \text{“}N_t\text{”}) S_t$ gegeben,

Und $\tilde{R}$ = Bond Rate.

. Sei C_0 = Anfangskapital ($t=0$) durch

A_0 stocks und B_0 Bonds gegeben.

$$\Rightarrow \quad C_t = A_t S_t + B_t \cdot e^{\tilde{R} \cdot t}$$

. Mit self-financial Portfolio : $dC_t = A_t\, dS_t + B_t\, d(e^{\tilde{R}t})$

. Frage: Wieviel sollte man eine Europäische Call Option bezahlen?.

. Antwort: . Black-Scholes Formula.

④ Dirichlet Probleme :

. Sei f eine Harmonische Funktion ($\Delta f = 0$) in $D \subset \mathbb{R}^n$, mit D beschränkte (und regulär).

. Wenn f ist auf ∂D bekannt, dann

für $x \in \mathring{D}$, $\quad f(x) = \mathbb{E}(f(B^x_\tau))$,

wobei $\quad B^x_t := x + \int_0^t N_t\, dt$

ist eine "integriertes Rausch" (oder Brownsche Bewegung), der fängt an X, τ = Zeit wann B^x_t wird zum ersten Mal auf ∂D.

. Ziel: Ein Sinn an "N_t" und B^x_t geben, und danach mit diesen Objekten zu arbeiten.

1. Versuch

- In diese Beispiele, das Symbol N_t sollte als eine "total zufällige Funktion" in t, i.e., einer stetiger Zeit Analogie einer Folge von unabhängige identischverteilte Zufallsvariablen.

- Deshalb möchte man das Folgende haben:

$$\begin{cases} 1)\ N_t \text{ ist unabhängig von } N_s \text{ für alle } t \neq s, \\ 2)\ N_t, t \geq 0, \text{ haben } \cancel{\text{alle}} \text{ die gleiche W-keitsmass } \mu, \\ 3)\ \mathbb{E}(N_t) = 0. \end{cases}$$

- Problem: Es funktioniert nicht, weil eine solche "stetige iid Folge" N_t ist nicht messbar in t, ausser wenn $N_t \equiv 0$.

Evtl.: Schauen wir wieso geht es nicht.

- Sei μ die Verteilung von N_t, die wegen 2) nicht von t abhängt, d.h.,

$$\mu([a,b]) := \mathbb{P}(a \leq N_t \leq b).$$

- $\mathbb{R} = (-\infty, a] \cup (a, \infty)$. Wenn $N_t \neq$ Konstante, dann $\exists\, a$ s.d. $p := \mathbb{P}(N_t \leq a) = \mu((-\infty, a]) \in (0,1)$.

- Sei zunächst $E := \{t \geq 0 \text{ s.d. } N_t \leq a\}$.

  $\Rightarrow$ Man kann beweisen, dass E ist nicht Lebesgue-messbar.

- Argument: Sei $\lambda \equiv$ Lebesgue mass auf $\mathbb{R}$.

  $\Rightarrow$ Wenn E messbar ist, dann wegen 1) und $p \in (0,1)$, man erwartet

$$\lambda(E \cap (c,d)) = p \cdot (d-c), \quad \forall\, c < d.$$

- Aber wenn E lebesgue-messbar ist, dann $\forall \alpha < 1$ existiert ein (c,d) s.d. $\lambda(E \cap (c,d)) > \alpha(d-c)$.

  $\Rightarrow$ Widerspruch.

- Aus Beispiele ①, ②, ④, möchte man N_t integrieren.

2. Versuch.

. Betrachten wir das Integral von N_t:

$$B_t := \int_0^t N_s \, ds.$$

. Die 3 vorherige Bedingungen schreiben als folgende:

(BM1) Für $0 = t_0 \le t_1 \le \dots \le t_n$, sind die Zufallsvariablen

$$B_{t_{j+1}} - B_{t_j}, \quad j = 0, \dots, n-1, \text{ unabhängige.}$$

(BM2) B_t hat stationäre Zuwächse, d.h., die W-keitsverteilung von

$$(B_{t_1+s} - B_{u_1+s}, B_{t_2+s} - B_{u_2+s}, \dots, B_{t_n+s} - B_{u_n+s})$$

sind unabhängig von $s \geq 0$, wobei $t_i > u_i$, $\forall i = 1, \dots, n$, sind beliebig.

(BM3) $\mathbb{E}(B_t) = 0$ für alle t.

- Letzlich, brauchen wir natürlich noch eine Normalisierung:

(BM4) $\mathbb{E}(B_1^2) = 1$.

- Diese 4. Bediengungen reichen eigentlich noch nicht. Die folgende 5. Bediengung wird B_t eindeutig definieren:

(BM5) $t \longmapsto B_t$ ist fast sicher stetig.

- B_t ist als Wiener Prozess oder Brownsche Bewegung bekannt. Wir werden gleich B_t explizit und rigorous konstruieren. Aber zuerst wollen wir schauen wie sieht die Verteilung von Zuwächse aussieht.

<u>Lemma 1.1:</u> Aus (BM5) folgt: $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} n \mathbb{P}\left(|B_{t+\frac{1}{n}} - B_t| > \varepsilon\right) = 0.$$

<u>Beweis:</u> Sei $H_n := \sup_{1\leq k\leq n} |B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}|$.

Aus (BM5), B_t ist auf $[0,1]$ fast sicher stetig,

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(H_n \geq \varepsilon) = 0.$

Aber: $\mathbb{P}(H_n \geq \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(H_n \leq \varepsilon)$

(unab. Zuwächse) $\quad = 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(|B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}| \leq \varepsilon\right)$

$$\overset{\text{stat. Zuwächse}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(|B_{\frac{1}{n}}| \leq \varepsilon\right)^n = 1 - \left(1 - \mathbb{P}(|B_{\frac{1}{n}}| \geq \varepsilon)\right)^n$$

$1 - x \leq e^{-x}$ $\qquad \geq 1 - \exp\left(-n \cdot \mathbb{P}(|B_{\frac{1}{n}}| \geq \varepsilon)\right)$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - e^{-n\mathbb{P}(|B_{\frac{1}{n}}| \geq \varepsilon)} \leq \mathbb{P}(M_n > \varepsilon)$$

$$\lim_{n\to\infty} \Rightarrow n\mathbb{P}(|B_{\frac{1}{n}}| > \varepsilon) \underset{\text{Stationarität}}{=} n\mathbb{P}(|B_{t+\frac{1}{n}} - B_t| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \quad \#$$

· Lemma 1.2: $B_t - B_s$, $s < t$, hat Normalverteilung mit Varianz $t-s$, d.h.,

$$\mathbb{P}(B_t - B_s \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_A e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx.$$

· Beweis: Wegen Stationarität es reicht $s=0$ zu betrachten.

$$B_t = \sum_{k=1}^{n} X_{n,k}, \text{ wobei } X_{n,k} := B_{\frac{kt}{n}} - B_{\frac{(k-1)t}{n}}, \text{ sind iid.}$$

· Wegen (BM3), $\mathbb{E}(X_{n,k}) = \mathbb{E}(B_{\frac{t}{n}}) = 0$.

· Insbesondere, die Varianz einer Summe von iid ZV ist die Summe der Varianz

$\Rightarrow$ Wegen (BM4), d.h., $Var(B_1) = 1$,

$$Var(X_{n,k}) = \frac{t}{n} \Rightarrow Var(B_t) = t.$$

· Dann der Zentrale Grenzwertsatz

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} X_{n,k} \sim \mathcal{N}(0, t). \quad \#$$

. Definieren die folgende Bedingung:

$(\widetilde{BM2})$: Für $s, t \geq 0$, dann

$$\mathbb{P}(B_{s+t} - B_s \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_A e^{-\frac{x^2}{2t}} dx,$$

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

. Diese Bedingung enthält (BM2), (BM3), und (BM6). Deshalb wir können die Brownsche Bewegung mit $(\widetilde{BM2})$ definieren.

Definition 1.3) Eine ein-dimensionale Brownsche Bewegung ist ein reelwertigen Prozess B_t, $t \geq 0$, mit den Eigenschaften (BM1), $(\widetilde{BM2})$, (BM5).

2) Brownsche Bewegung (BB)

2.1) Aufbau der B.B.

- In Definition 1.3 haben wir einen stochastischen Prozess mit einige Eigenschaften definiert.
- Dann muss man sich fragen, ob ein solchen Prozess existiert.
- Hier werden wir die B.B. auf $[0,T]$ konstruieren.

- Da für festes $T \in \mathbb{R}_+^*$ die Konstruktion fast identisch mit dem $T=1$ Fall, betrachten wir $T=1$.
- Die Konstruktion ist auf der folgenden Bemerkung basiert:

Bem. 2.1) → Wenn $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ konstruiert ist, dann nehmen zwei Zeiten s,t mit $0 \leq s < t \leq 1$ und sei

$$\theta := \frac{s+t}{2} \text{ und}$$

$$P(x,y;\tau) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{2\tau}}, \tau > 0, x,y \in \mathbb{R}.$$

⇒ Konditioniert auf $B_s = x$ und $B_t = z$, ist die Z.V. B_θ normalverteilt mit Mittelwert $\mu := \frac{x+z}{2}$ und Varianz $\sigma^2 := \frac{t-s}{4}$.

Beweis: Aus (BM1) sind B_s, $B_\theta - B_s$ und $B_t - B_\theta$ unabhängige Z.V.

Deshalb,

$$\mathbb{P}(B_s \in dx, B_\theta \in dy, B_t \in dz) =$$

$$= p(0,x;s) \cdot p(x,y;\tfrac{t-s}{2}) \cdot p(y,z;\tfrac{t-s}{2}) \cdot dx\,dy\,dz$$

(Algebra) $$= p(0,x;s) \cdot p(y,z;t-s) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx\,dy\,dz$$

Dann, wenn wir durch

$$\mathbb{P}(B_s \in dx, B_t \in dz) = p(0,x;s)\, p(x,z;t-s)\, dx\,dz$$

dividieren, erhalten wir

$$\mathbb{P}(B_\theta \in dy / B_s \in dx, B_t \in dz) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dy. \qquad \#$$

Die Konstruktion von BB wird durch Interpolation gemacht.

Sei $\{\xi_k^{(n)}, k \in I(n), n \geq 1\}$ eine Folge von i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilte Zufallsvariablen, wobei

$$I(n) := \{k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 2^n, k\ \text{ungerade}\}.$$

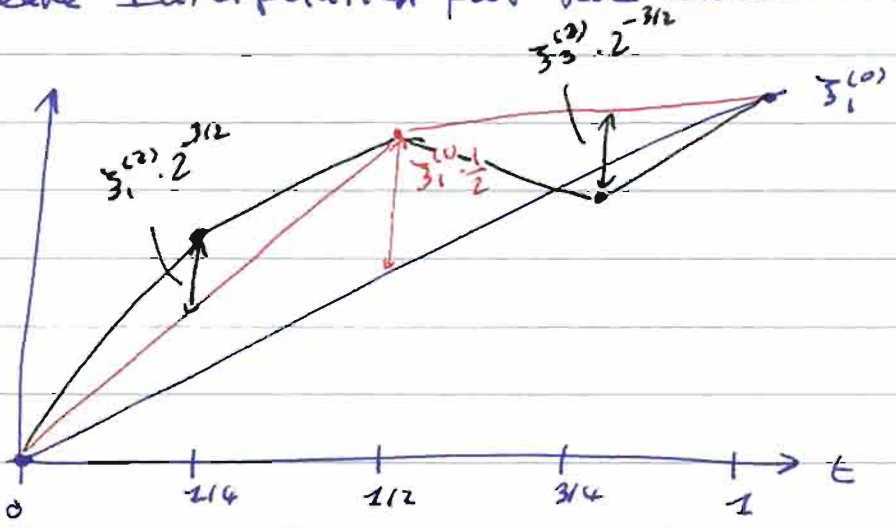
Für jedes $n \geq 1$, definieren wir $B^{(n)} := \{B_t^{(n)}, 0 \leq t \leq 1\}$ wie folgt:

ⓐ Für $k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}$: $B^{(n)}_{\frac{k}{2^{n-1}}} := B^{(n-1)}_{\frac{k}{2^{n-1}}}$.

ⓑ $B_0^{(0)} = 0$ und $B_0^{(1)} = \xi_1^{(0)}$.

ⓒ $B^{(n)}_{\frac{k}{2^n}} := \frac{1}{2}\left(B^{(n-1)}_{\frac{k-1}{2^n}} + B^{(n-1)}_{\frac{k+1}{2^n}} \right) + \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \xi^{(n)}_k , \quad k \in I(n)$

ⓓ Lineare Interpolation für die andere Werte von $t \in [0,1]$.

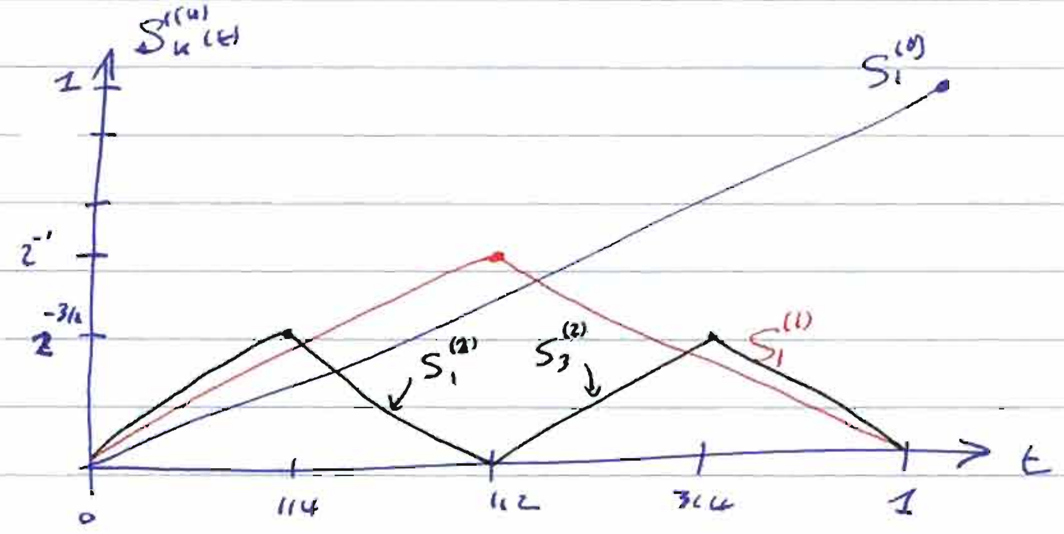


. Ziel: Zeigen, dass $B^{(n)}_t$ konvergiert gleichmässig in $t \in [0,1]$ gegen eine stetige Funktion B_t im $n \to \infty$ Limes und B_t ist eine B.B..

. Umschreibung: Sei $H^0_1(t) \equiv 1$ und, für $n \geq 1$, $k \in I(n)$,

$$H^{(n)}_k(t) := \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}, & \frac{k-1}{2^n} \leq t < \frac{k}{2^n}, \\ -2^{\frac{n-1}{2}}, & \frac{k}{2^n} \leq t < \frac{k+1}{2^n}, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Definiere: $S^{(n)}_k(t) = \int_0^t H^{(n)}_k(u)\, du,$



. Dann, für $n=0$: $B_t^{(0)} = \xi_1^{(0)} \cdot S_1^{(0)}(t)$, und

Induktion zeigt:
$$B_t^{(n)}(\omega) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k\in I(m)} \xi_k^{(m)}(\omega)\, S_k^{(m)}(t), \quad 0\le t\le 1,\; n\ge 1.$$

Lemma 2.2) Wenn $n\to\infty$, die Folge von Funktionen
$\{B_t^{(n)}(\omega),\ 0\le t\le 1\}_{n\ge 1}$ konvergiert
gleichmässig in t gegen eine stetige Funktion
$\{B_t(\omega),\ 0\le t\le 1\}$ für fast alle $\omega\in\Omega$.

Beweis: Sei $b_n := \max_{k\in I(n)} |\xi_k^{(n)}|$. Dann, $\forall x>0$, n,k,
$$\mathbb{P}(|\xi_k^{(n)}|>x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2}\,du$$
$$\le \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int_x^\infty du\, e^{-u^2/2}\cdot\frac{u}{x} = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\cdot\frac{e^{-x^2/2}}{x}.$$

Deshalb, $\mathbb{P}(b_n>n) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\in I(n)} \{|\xi_k^{(n)}|>n\}\Big)$
$$\underset{(iid)}{\le} 2^n\,\mathbb{P}(|\xi_1^{(n)}|>n) \le \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,\frac{2^n}{n} e^{-n^2/2}.$$

. Aber: $\sum_{n\ge 1} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2^n}{n} e^{-n^2/2} < \infty$.

. Borel-Cantelli I: $\Rightarrow \exists\, \tilde\Omega$ mit $\mathbb{P}(\tilde\Omega)=1$ und
$\forall\, \omega\in\tilde\Omega$, $\exists\, n_0(\omega)$ s.d. $\forall\, n\ge n_0(\omega)$, $b_n(\omega)\le n$.

nur für ein k ist $S_k^{(n)}(t) > 0$!

Dann, $\displaystyle\sum_{n\ge n_0(\omega)} \sum_{k\in I(n)} |\xi_k^{(n)}(\omega)|\, S_k^{(n)}(t) \le \sum_{n\ge n_0(\omega)} n\cdot 2^{-(n+1)/2} < \infty$.

$\oplus \xrightarrow{n_0\to\infty} 0$

$\Rightarrow$ Für $\omega\in\tilde\Omega$, $B_t^{(n)}(\omega)$ konvergiert gleichmässig in t gegen ein Limes $B_t(\omega)$. Gleichmässigkeit Kvg. $\Rightarrow$ Stetigkeit vom Limes B_t.

#

Lemma 2.3) Die Haar Funktionen $\{H_k^{(n)}, k \in I(n), n \geq 0\}$ ist ein vollständiges orthonormales System von $L^2([0,1])$, mit skalar Produkt

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 dt\, f(t) g(t).$$

Es folgt Parseval Gleichung:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} \langle f, H_k^{(n)}\rangle \langle H_k^{(n)}, g\rangle . \quad (*)$$

Beweis: Siehe Übungen. #

Aus (*) folgt, mit $f = \mathbb{1}_{[0,t]}$ und $g = \mathbb{1}_{[0,s]}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} S_k^{(n)}(t)\, S_k^{(n)}(s) = \min(s,t).$$

Theorem 2.4) $B_t := \lim_{n\to\infty} B_t^{(n)}$ ist eine BB in $[0,1]$.

Beweis: Wir brauchen noch zu beweisen, dass für $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq 1$, die Zuwächse

$$(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})_{j=1,\dots,n} \text{ sind unabhängig,}$$

normalverteilt, mit Mittelwert 0 und Varianz $t_j - t_{j-1}$

Dazu werden wir zeigen, dass die Fourier-transformierte erfüllt:

$$\mathbb{E}\left(e^{i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})}\right) = \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}\lambda_j^2 (t_j - t_{j-1})}.$$

- Sei $\lambda_{n+1} \equiv 0$, dann für alle $M \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left(e^{-i\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j) B_{t_j}^{(M)}} \right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(e^{-i\sum_{m=0}^{M} \sum_{k \in I(m)} \xi_k^{(m)} \sum_{j=1}^{n} (\lambda_{j+1}-\lambda_j) S_k^{(m)}(t_j)} \right)$$

$\sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\overset{\text{unab.}}{=} \prod_{m=0}^{M} \prod_{k \in I(m)} \mathbb{E}\left(e^{-i \xi_k^{(m)} \sum_{j=1}^{n} (\lambda_{j+1}-\lambda_j) S_k^{(m)}(t_j)} \right)$$

$$\overset{\int_{\mathbb{R}} e^{-ixz} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = e^{-\frac{1}{2}z^2}}{=} \prod_{m=0}^{M} \prod_{k \in I(m)} e^{-\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} (\lambda_{j+1}-\lambda_j) S_k^{(m)}(t_j)\right]^2}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{e=1}^{n} (\lambda_{j+1}-\lambda_j)(\lambda_{e+1}-\lambda_e) \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{M} \sum_{k \in I(m)} S_k^{(m)}(t_j) S_k^{(m)}(t_e)}_{\xrightarrow[M\to\infty]{} \min(t_j, t_e)} \right)$$

$\Rightarrow$ Im Limes $M \to \infty$:

$$\mathbb{E}\left(e^{i\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})} \right) = \mathbb{E}\left(e^{-i\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j) B_{t_j}} \right)$$

$$= \exp\left(-\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{e=j+1}^{n} (\lambda_{j+1}-\lambda_j)(\lambda_{e+1}-\lambda_e) t_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} (\lambda_{j+1}-\lambda_j)^2 t_j \right)$$

$$\overset{\text{algebra}}{=} \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}\lambda_j^2 (t_j - t_{j-1})} .$$

#

2.2) Pfade von BB

. B.B. hat stetige Pfade, aber ist sehr rau.

Theorem 2.5) Die Pfade

$$t \mapsto B_t$$

ⓐ haben fast sicher eine unbeschränkte Variation

ⓑ und deshalb ist nirgendwo Ableitbar.

. Dieses Theorem zeigt wieso konnte man nicht das Objekt "$\dot{N}_t$" gut definieren.

Lemma 2.6) Sei $0 \leq t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = T$ eine Familie von Partitionen von $[0,T]$ s.d.

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\leq j<n} |t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}| = 0.$$

Dann, $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \left(B_{t_{j+1}^{(n)}} - B_{t_j^{(n)}}\right)^2 = T$ in L^2.

Beweis. . $\Delta B_j := B_{t_{j+1}^{(n)}} - B_{t_j^{(n)}}$; $\Delta t_j := t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}$, $\delta_n := \max_j \Delta t_j$

$$\Rightarrow \left\| \sum_j (\Delta B_j)^2 - T \right\|^2 = \mathbb{E}\left(\left(\sum_j (\Delta B_j)^2 - T \right)^2 \right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{i,j} (\Delta B_j)^2 (\Delta B_i)^2 - 2T \sum_i (\Delta B_j)^2 + T^2 \right)$$

$$= \sum_j \underbrace{\mathbb{E}((\Delta B_j)^4)}_{=3(\Delta t_j)^2} + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}(\Delta B_j^2)\underbrace{\mathbb{E}(\Delta B_i^2)}_{=\Delta t_i} - 2T \sum_i \mathbb{E}(\Delta B_j^2) + T^2$$

$$= 2 \cdot \sum_j (\Delta t_j)^2 \leq 2\delta_n \cdot \sum_j \Delta t_j = 2\delta_n T \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \#$$

. Formel, Lemma 2.6) schreibt

$$(dB_t)^2 = dt,$$

d.h., $\quad dB_t \sim \sqrt{dt} \gg dt.$

<u>Lemma 2.7)</u> Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von reel-wertigen Funktionen s.d.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n|^2) = 0.$$

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(X_{n_k})_{k\geq 1}$ s.d. $X_{n_k} \to 0$ fastsicher.

. <u>Beweis:</u> Wir können wählen eine Teilfolge s.d.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(|X_{n_k}|^2) < \infty. \quad (*)$$

Chebishev $\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}(|X_{n_k}| \geq \frac{1}{m}) \leq m^2 \mathbb{E}(|X_{n_k}|^2).$

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \ \sum_k \mathbb{P}(|X_{n_k}| \geq \frac{1}{m}) < \infty$ wegen $(*)$. #

(e.g.: Korollar 4.25 von WT-1 Skript).

. <u>Beweis von Theorem 2.5) (a):</u>

. Lemma 2.6 und 2.7 $\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(n_k)_{k\geq 1}$ s.d. für fast alle $\omega \in \Omega$: $\displaystyle \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k-1} \left(B_{t_{j+1}^{(n_k)}}(\omega) - B_{t_j^{(n_k)}}(\omega)\right)^2 = T.$

. Sei $\omega \in \Omega$ fest s.d. ↗ gilt.

. Sei $\varepsilon_{n_k} := \max_j |\Delta B_j| \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \varepsilon_{n_k} = 0$ weil $t \mapsto B_t$ ist gleichmässig stetig.

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n_k-1} |\Delta B_j| \geq \sum_{j=0}^{n_k-1} \frac{1}{\varepsilon_{n_k}} |\Delta B_j|^2 \cong \frac{T}{\varepsilon_{n_k}} \text{ als } k \to \infty. \quad \#$$

. Lemma 2.8) Sei $(B_t)_{0\le t\le T}$ eine B.B auf $[0,T]$. Dann, $\forall c>0$,

$$(c\cdot B_{t/c^2})_{0\le t\le T} \text{ ist}$$

eine B.B. auf $[0,T/c^2]$.

Beweis: Übung. #

. Beweis von theorem 2.5) (b):

. Sei $X_{n,k} := \max\limits_{j=k,k+1,k+2} \left| B_{\frac{j}{2^n}} - B_{\frac{j-1}{2^n}} \right|$.

$$\Rightarrow \forall \varepsilon>0,\ \mathbb{P}(X_{n,k}\le\varepsilon) = \mathbb{P}\left(|B_{\frac{1}{2^n}}|\le\varepsilon\right)^3$$

$$\overset{\text{Lemma 2.8}}{=} \mathbb{P}\left(|B_1|\le 2^{n/2}\cdot\varepsilon\right)^3$$

$$\le (2^{n/2}\cdot\varepsilon)^3$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\Big(\overbrace{\min_{k\le T\cdot 2^n}}^{Y_n=} X_{n,k}\le\varepsilon\Big) \le T\cdot 2^n\cdot (2^{n/2}\cdot\varepsilon)^3. \quad (**)$$

. Sei $A := \{\omega\in\Omega$ s.d. $t\mapsto B_t(\omega)$ ist irgendwo ableitbar$\}$.

. Für ein $\omega\in A$, $t\mapsto B_t(\omega)$ ist in $t_0(\omega)$ ableitbar. Sei D die Ableitung.

$\Rightarrow \exists\,\delta>0$ s.d. für alle $t\in[t_0-\delta, t_0+\delta]$,

$$|B_t - B_{t_0}| \le (|D|+1)\cdot|t-t_0|.$$

Wählen wir n_0 gross genug s.d.

$$\delta > \frac{1}{2^{n_0-1}},\quad n_0 > 2(|D|+1),\quad n_0>t_0.$$

$\Rightarrow$ Für alle $n\ge n_0$, sei k s.d. $\frac{k}{2^n}\le t_0<\frac{k+1}{2^n}$.

Dann, $|t_0 - \frac{j}{2^k}| < \delta$ für $j = k, k+1, k+2$,

$$\Rightarrow X_{n,k}(\omega) \leq (|D|+1)\frac{1}{2^{k-1}} \leq \frac{n}{2^k}$$

und wegen $k > t_0 > k/2^k$, auch $Y_n(\omega) \leq \frac{k}{2^k}$
(d.h. $X_{k,n}$ ist ein der in Y_n kommt).

$\Rightarrow A \subset A_k := \{ Y_k(\omega) \leq \frac{k}{2^k} \}$ für k gross genug.

$\Rightarrow A \subseteq \liminf_{n\to\infty} A_k$.

Aber (**) $\Rightarrow \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(A_k) \leq_{\text{Const}} \sum_{k\geq 1} k 2^k (2^{k/2} k 2^{-k})^3 < \infty$ (für k klein).

$\Rightarrow \mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} A_k) = 0$, d.h., $t \mapsto B_t(\omega)$ ist fast sicher nicht ableitbar. #.

Definition 2.9) . Sei $p(x,y;\tau) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\tau}}$, $\tau > 0, x, y \in \mathbb{R}$.

. Ein stochastischer Prozess $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ mit Werte in $\mathbb{R}^d$ is eine d-dimensionelle B.B. wenn:

① $B_0 \equiv (0, \dots, 0)$

② Stationäre und unabhängige Zuwächse: d.h., für $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$, die Zufallsvariablen
$B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_1} - B_{t_0}$ sind unabhängig
und für alle k,
die Verteilung von $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ hängt nur um $t_k - t_{k-1}$ ab.

③ Jede Komponente hat standard Gauss'che Zuwächse: d.h., für jede Messbare Menge $A \in \mathbb{R}^d$, $\forall 0 \leq s < t \leq T$,

$$\mathbb{P}(B_t - B_s \in A) = \int_A dx_1 \dots dx_d \, p(0,x_1;t-s) \cdots p(0,x_d;t-s),$$

④ $t \mapsto B_t$ ist fast sicher stetig.

2.3) Stochastische Prozesse.

Def. 2.10) . Eine Familie $X = (X_t)_{t \geq 0}$ heisst stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werte in $(E, \mathcal{E})$ (ein Messraum) falls:

. $\forall t \geq 0$, X_t ist eine Zufallsvariable,

. t ist die Zeit, E der Zustandsraum ($E = \mathbb{R}^d$ meistens)

. Für festes $\omega \in \Omega$,

$t \mapsto X_t(\omega)$ ist die Trajektorie.

. 2 Interpretationen: ① $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to E$

$(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$

② $X : \Omega \to E^{\mathbb{R}_+}$

$\omega \mapsto X_\cdot(\omega)$: zufällige Trajektorie.

Def. 2.11) Zwei stoch. Prozesse X und Y (auf dem selben $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $(E, \mathcal{E})$) heissen:

. modifikationen voreinander, falls

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1, \quad \forall t \geq 0,$$

. ununterscheidbar, falls

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.$$

. Das ist klar, dass Ununterscheidbar $\Rightarrow$ Modifikation voreinander.

. Umgekehrt gilt nicht; z.B.: $\Omega = [0,1]$, $\mathbb{P}$ = Lebesgue-maß,

$$\begin{cases} X_t(\omega) = 0 & , \\ Y_t(\omega) = \mathbb{1}_{[t=\omega]} . \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall t \geq 0,\ \mathbb{P}(X_t = Y_t) = \mathbb{P}(\omega \neq t) = 1$, aber

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 0.$$

Lemma 2.12) Sei Y eine Modifikation von X. Wenn X und Y haben f.s. rechtsseitige Pfade, dann X und Y sind Ununterscheidbar.

Beweis: . Sei Ω_0 = Menge von Ω s.d. $X(\omega)$ oder $Y(\omega)$ nicht rechtsstetig ist.

. Für $q \in \mathbb{Q}_+$, sei $N_q := \{\omega \in \Omega \mid X_q(\omega) \neq Y_q(\omega)\}$.

$\Rightarrow \forall q \in \mathbb{Q}_+,\ \mathbb{P}(N_q) = 0$.

Da $\mathbb{Q}_+$ abzählbar ist, $\mathbb{P}(N \equiv \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_+} N_q) = 0$.

$\Rightarrow \mathbb{P}(N \cup \Omega_0 \equiv \tilde{\Omega}) = 0$.

. Aber, wenn $\omega \notin \tilde{\Omega}$, $X_q(\omega) = Y_q(\omega)$, $\forall q \in \mathbb{Q}_+$ und wegen Rechtsstetigkeit von X und Y, sind auch $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$, $\forall t \geq 0$. #

2.4) Hölder-stetigkeit für B.B.

Def. 2.13) (Hölder-stetigkeit)
Eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ heisst γ-Hölder stetig in $x \geq 0$, falls $\exists\, \varepsilon > 0$, $C > 0$ so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x-y|^{\gamma},$$

$\forall\, y \geq 0$ s.d. $|x-y| \leq \varepsilon$.

- γ = Hölder Exponent (C = Hölder Konstante).

Theorem 2.14) (Kolmogorov-Čentsov).

Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein stoch. Prozess auf $(\Omega, F, \mathbb{P})$, $\alpha \geq 1, \beta, C > 0$ so dass

$$\mathbb{E}\left(|X_t - X_s|^{\alpha}\right) \leq C \cdot |t-s|^{\beta+1}.$$

Dann, $\exists$ eine Modifikation $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ von $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$, $T \geq 0$, die γ-Hölder stetig ist, für alle $0 \leq \gamma < \beta/\alpha$.

Wir beweisen es gleich, aber zuerst werden wir es an der B.B. anwenden.

Für B.B. es gilt: $\mathbb{E}\left(|B_t - B_s|^{2n}\right) = C_n \cdot |t-s|^n$, $n \geq 1$, $0 \leq s < t$, wobei $C_n = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

Korollar 2.15) $\exists$ eine Modifikation von BB, die γ-Hölder stetig für $\gamma \in (0, 1/2)$ ist; d.h., $\forall T > 0, \exists\, \varepsilon > 0$ s.d.

$$\mathbb{P}\left(\sup_{\substack{0 < t-s < h(\omega) \\ 0 \leq s, t \leq T}} \frac{|B_t(\omega) - B_s(\omega)|}{|t-s|^{\gamma}} \leq \varepsilon \right) = 1;$$

$h(\omega)$ ist eine f.s. positive Zufallsvariable.

Beweis von Theorem 2.14)

. Nehmen wir $T=1$. (Wegen der Skalierung $cB_{t/c^2} \equiv B_t$).

. <u>Tchebishev</u> $\Rightarrow \forall \varepsilon>0$, $\mathbb{P}(|X_t - X_s| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{E}(|X_t - X_s|^\alpha)}{\varepsilon^\alpha}$

$$\leq \frac{C \cdot |t-s|^{\beta+1}}{\varepsilon^\alpha}.$$

. Deshalb, $X_s \to X_t$ in W-keit als $s \to t$.

. Sei $D_n = \{\frac{k}{2^n}, 0 \leq k \leq 2^n, k \in \mathbb{N}\}$ und $D = \bigcup_{n \geq 0} D_n$.

. Nehmen wir : $t = \frac{k}{2^n}$, $s = \frac{k-1}{2^n}$, $\varepsilon = 2^{-\gamma n}$ (mit $0<\gamma<\beta/\alpha$).

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\left|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}\right| \geq 2^{-\gamma n}\right) \leq C \cdot 2^{\alpha n \gamma} \cdot 2^{-(\beta+1)n}$$

$$= C \cdot 2^{-n(1+\beta-\alpha\gamma)}$$

Sei $E_n = \{\omega : \max_{1 \leq k \leq 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)| \geq 2^{-\gamma n}\}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{2^n} \left\{\left|X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)\right| \geq 2^{-\gamma n}\right\}\right)$$

$$\leq \cancel{2^n} \cdot C \cdot \cancel{2^{-n}} \cdot 2^{-n(\beta-\alpha\gamma)} = C \cdot 2^{-n(\beta-\alpha\gamma)}.$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(E_n) \leq \frac{C}{1-2^{-(\beta-\alpha\gamma)}} < \infty, \text{ weil } \gamma < \beta/\alpha.$$

. Borel-Cantelli $\Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} E_n) = 0 \Rightarrow \exists \Omega^* \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$

s.d., $\forall \omega \in \Omega^*$, $\max_{1 \leq k \leq 2^n} \left|X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)\right| < 2^{-\gamma n}$, $\forall n > n^*(\omega)$.

(**)

<u>Sublemma</u>: . Für festes $\omega \in \Omega^*$ und $n > n^*(\omega)$, zeigen wir; für alle $m \geq n$,

(*) $|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq 2 \sum_{j=n+1}^{m} 2^{-\gamma j}$, $\forall s,t \in D_m$, $0 \leq t-s < 2^{-n}$.

Beweis:

. Induktion: • für $m=n+1$, wir haben nur $t=\frac{k}{2^n}$, $s=\frac{k-1}{2^n}$ ✓.

• nehmen wir an, (*) gilt für $m=n+1,\dots,M-1$.

↳ Wählen wir $s<t$, $s,t\in D_M$ und

$$t' := \max\{u\in D_{M-1} \mid u\le t\}$$
$$s' := \min\{u\in D_{M-1} \mid u\ge s\}.$$

$\Rightarrow s\le s'\le t'\le t$ und $s'-s\le 2^{-M}$, $t-t'\le 2^{-M}$.

Wegen (**),
- $|X_{s'}(\omega)-X_s(\omega)|\le 2^{-\gamma M}$,
- $|X_{t'}(\omega)-X_t(\omega)|\le 2^{-\gamma M}$,
- $|X_{t'}(\omega)-X_{s'}(\omega)|\le 2\cdot\sum_{j=n+1}^{M-1} 2^{-\gamma j}$

$\Rightarrow$ Dreieck-Ungleichung $\Rightarrow$ (*) gilt für M auch #

. Jetzt zeigen wir: $(X_t)_{t\in D}$ ist gleichmässig stetig in t, $\forall\omega\in\Omega^*$.

. Wählen wir $s,t\in D$, $0<t-s<h(\omega):=2^{-n^*(\omega)}$ und $n>n^*(\omega)$ s.d. $2^{-(n+1)}\le t-s<2^{-n}$.

Dann aus (*) folgt: (***) $|X_t(\omega)-X_s(\omega)|\le 2\sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-\gamma j} = 2\cdot\frac{2^{-\gamma(n+1)}}{1-2^{-\gamma}}\le\delta(t-s)^{\gamma}$

für $\delta=\frac{2}{1-2^{-\gamma}}$.

. Jetzt definieren: $\tilde{X}_t(\omega)=\begin{cases} X_t(\omega), & \text{falls } \omega\in\Omega^*,\ t\in D\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$

. Für $\omega\in\Omega^*$, $t\in[0,1]\setminus D$, wählen eine Folge $(s_n)_{n\ge 1}\subset D$ s.d. $s_n\to t$. Aus (***) ist die Folge X_{s_n} konvergent (Cauchy Folge).

$\Rightarrow \tilde{X}_t(\omega) := \lim_{n\to\infty} X_{s_n}(\omega)$.

$\Rightarrow$ $\tilde{X}_t(\omega)$ ist stetig und . erfüllt $(\ast\ast\ast)$.

. Letztlich sollten wir kontrollieren, dass $\tilde{X}_t$ eine Modifikation von X_t ist:

$\rightarrow$ In der Tat, $\tilde{X}_t(\omega) = X_t(\omega)$ f.s. für $t \in D$;

für $t \in [0,1] \cap D^c$ und $\{s_n\}_{n \geq 1} \subseteq D$ mit $s_n \to t$,

$X_{s_n} \to X_t$ in W-Keit und $X_{s_n} \to \tilde{X}_t$ f.s.

$\Rightarrow$ $\tilde{X}_t = X_t$ f.s.

#

3) Filtrationen und Stoppzeiten.

3.1) Filtrationen

Def. 3.1) Eine nichtfallende Familie $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ von σ-Algebren von $\mathcal{F}$, d.h.,

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F} \quad \text{für } 0 \leq s < t < \infty,$$

ist eine Filtration.

. Die Einführung von Filtrationen ist nicht nur wegen technische Gründe, aber hat einen Sinn:

. $t \geq 0$ ist als Zeit betrachtet, dann möchte man Vergangenheit, Präsens, und Zukunft unterscheiden.

Def. 3.2) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, mit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ eine Filtration, heisst filtrierter W-keitraum.

. Notationen: . $\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t\right)$: gesampte Information.

. $\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$: Zukunft von t.

. $\mathcal{F}_{t-} := \sigma(\mathcal{F}_s, s < t)$: Vergangenheit von t. (Information bis zeer Zeit t).

. $\mathcal{F}_{0-} := \{\emptyset, \Omega\}$.

. Für ein gegebene Stochastische Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$, die einfachste Filtration ist

$$\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$$

Def. 3.3) Falls $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$, $\forall t \geq 0$, nennt man $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Rechtsstetige Filtration.

. Für technische Gründe wollen wir auch die Nullmenge indie Filtration haben.

Def. 3.4)
. Eine Menge $A \subset \Omega$ heisst $(\mathcal{F},\mathbb{P})$-Nullmenge falls $\exists A' \subset \mathcal{F}$ s.d. $A \subset A'$ und $\mathbb{P}(A') = 0$.
. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ heisst vollständig, falls alle $(\mathcal{F},\mathbb{P})$-Nullmenge in $\mathcal{F}_0$ erhalten sind.

Letztlich definieren wir ein Standard Raum.

Def. 3.5) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ ist ein Standard filtrierter W-raum, wenn ist vollständig und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ rechtsstetig ist.

. Falls ein Raum nicht standard ist
$\Rightarrow$ erweitern:
. Alle $(\mathcal{F},\mathbb{P})$-Nullmenge zuzuführen: $\mathcal{F}'_{\cdot} = \sigma(\mathcal{F}_{\cdot} \cup \mathcal{N})$
. Rechte Limes nehmen. $(\Omega, \mathcal{F}'_{\cdot}, \mathcal{F}'_{t+}, \mathbb{P})$

3.2) Adaptierte Prozesse

. Die oben definierte Filtration $\mathcal{F}_t^X$ heisst die von X erzeugte Filtration. Das ist ein besonderes Fall von adaptierte Prozesse.

Def. 3.6) Ein stochastische Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ heisst <u>adaptiert</u> an einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls:

$$\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0,$$

d.h., falls X_t ist $\mathcal{F}_t$-messbar für alle $t \geq 0$.

Beispiele: ① Seien $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ gegeben.

Definiere $X_t := \mathbb{E}(f | \mathcal{F}_t)$.

Dann ist $(X_t)_{t\geq 0}$ an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptiert.

② Seien $(X_t)_{t\geq 0}$, $(Y_t)_{t\geq 0}$ ununterscheidbar, $(X_t)_{t\geq 0}$ an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptiert.

Wenn $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ ist vollständig, dann auch $(Y_t)_{t\geq 0}$ ist an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptiert.

Erinnerung: . $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ ist die einzige Zufallsvariable Z auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ so dass: ($\mathcal{G}$ ein σ-Algebra $\subset \mathcal{F}$)

(1) Z ist $\mathcal{G}$-messbar

(2) $\forall G \in \mathcal{G}$,

$$\int_G Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_G X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega).$$

Def. 3.7) Ein Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ heisst <u>progressiv messbar</u> bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls $\forall\, t \geq 0$,

$$X : [0,t] \times \Omega \to E$$
$$(s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$$

ist messbar bzgl. $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

Prop. 3.8) Wenn ein stoch. Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ ist adaptiert an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und jede Trajektorie ist rechtsstetig, dann $(X_t)_{t\geq 0}$ ist progressiv messbar.

Beweis: Sei $t>0$, $n\geq 1$, $k=0,1,\dots,2^n-1$ und $0\leq s\leq t$.

Definiere $$X_s^{(n)}(\omega) := X_{\frac{(k+1)t}{2^n}}(\omega) \text{ für } \frac{kt}{2^n} < s \leq \frac{k+1}{2^n}\cdot t$$

und $X_0^{(n)}(\omega) := X_0(\omega)$.

Diese Approximation von X ist messbar:

$$X^{(n)}: (s,\omega) \mapsto X_s^{(n)}(\omega) \quad \text{" bzgl. } \mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t.$$

Aber X ist (auch) rechtsstetig, deshalb

$$\lim_{n\to\infty} X_s^{(n)}(\omega) = X_s(\omega), \quad \forall (s,\omega)\in[0,t]\times\Omega.$$

$\Rightarrow$ Die Limes Abbildung

$(s,\omega)\mapsto X_s(\omega)$ ist auch

$\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$ - messbar. #

3.3) Stoppzeiten

. Eine <u>zufällige Zeit</u> T ist eine $\mathcal{F}$-messbare Zufallsvariable mit Werte in $[0,\infty]$.

. Eine wichtige Klasse von zufällige Zeiten sind die Stoppzeiten.

. Wir sind interessiert wenn <u>zum ersten Mal</u> ein Ereignis passiert.

<u>Beispiel:</u> Stockpreis erst auf ein gegebene Niveau kommt.

<u>Def. 3.9)</u> . Eine Abbildung $T: \Omega \to [0,\infty]$ heisst <u>Stoppzeit</u> bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls $\forall t \geq 0$,

$$\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \leq t\} \equiv \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

. T heisst <u>schwache Stoppzeit</u> bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls $\forall t \geq 0$,

$$\{T < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

<u>Prop. 3.10)</u> (a) Jede zufällige Zeit, die eine Positive Konstante ist, ist eine Stoppzeit.

(b) Jede Stoppzeit ist schwache Stoppzeit.

(c) Wenn $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ rechtsstetig ist, dann schwache Stoppzeiten sind Stoppzeiten.

(d) T ist eine Stoppzeit $\Leftrightarrow X_t = \mathbb{1}_{[0,T)}(t)$ ist adaptiert.

Beweis: ⓐ Triviale ($\{\omega\in\Omega \mid C\le t\} = \underset{(t\ge c)}{\Omega}$ oder $\underset{(t<c)}{\phi}$).

ⓑ $\{T<t\} = \bigcup_{n\ge1} \underbrace{\{T\le t-\tfrac{1}{n}\}}_{\in \mathcal{F}_{t-\frac{1}{n}}\subseteq \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t$.

ⓒ Sei T eine schwache Stoppzeit einer rechtsstetige Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$.

$\forall m\in\mathbb{N},\quad \{T\le t\} = \bigcap_{n\ge m} \underbrace{\{T<t+\tfrac{1}{n}\}}_{\in \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}}\subseteq \mathcal{F}_{t+\frac{1}{m}}} \in \mathcal{F}_{t+\frac{1}{m}}$.

$\Rightarrow \{T\le t\} \in \bigcap_{m\ge1} \mathcal{F}_{t+\frac{1}{m}} = \mathcal{F}_{t+}$

und wegen rechtsstetigkeit: $\{T\le t\}\in\mathcal{F}_{t+}=\mathcal{F}_t$.

ⓓ $\{T\le t\} = \{X_t=0\}$.

#

. Hier sind einige Eigenschaften von Stoppzeiten, die als Übung bewiesen werden.

Prop. 3.11) ⓐ . Sei T eine schwache Stoppzeit und $\theta>0$ eine Konstante. Dann $T+\theta$ ist eine Stoppzeit.

ⓑ . Seien S und T Stoppzeiten, dann auch $S\wedge T$, $S\vee T$, $S+T$ sind Stoppzeiten.

ⓒ . Seien S und T schwache Stoppzeiten;

→ dann ist $S+T$ " " .

→ Wenn entweder: (i) $T>0$ und $S>0$

(und) oder (ii) $T>0$, T Stoppzeit,

dann ist $S+T$ eine Stoppzeit.

ⓓ Sei $\{T_n\}_{n\ge1}$ eine Folge von schwache Stoppzeiten.

$\Rightarrow \sup_{n\ge1} T_n$; $\inf_{n\ge1} T_n$; $\limsup_{n\to\infty} T_n$; $\liminf_{n\to\infty} T_n$

sind auch schwache Stoppzeiten.

. Wenn T_i's Stoppzeiten sind, dann $\sup_{n\ge1} T_n$ ist auch eine Stoppzeit.

Beweis: Siehe Übungen. #

. Beispiel: . Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ rechtsstetig und an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptiert. $(X_t \in \mathbb{R}^d)$.

. Wir betrachten $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und setzen

$$T_A(\omega) := \inf\{t \geq 0 \mid X_t(\omega) \in A\}$$

mit $\inf\{\emptyset\} := \infty$.

. T_A heisst die Eintrittzeit von A.

. Lemma 3.14) ⓐ Wenn A offen ist, dann T_A ist eine schwache Stoppzeit.

ⓑ Wenn A geschlossen ist und $X_t(\omega)$ sind stetig $\Rightarrow$ T_A ist eine Stoppzeit.

. Bem.: Jede Stoppzeit ist eine Eintrittzeit: $\boxed{X_t := \mathbb{1}_{[0,T)}(t) \;,\; A = \{0\} \Rightarrow T_A = T.}$

Beweis: ⓐ

$$. \{T_A < t\} = \bigcup_{\substack{s\in\mathbb{Q},\\ 0\leq s < t}} \underbrace{\{X_s(\omega) \in A\}}_{\in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t} \;, \forall t > 0.$$

$= \{X_s(\omega) \in A$ für ein $0 \leq s < t\}$

. $\supseteq$: klar ✓

. $\subseteq$: folgt aus rechtsstetigkeit von X und A offen.

Wenn $T_A \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, wegen rechtsstetig + offen $\Rightarrow$ immediately after ist noch in A

ⓑ Für A abgeschlossen,

$$\{T_A > t\} = \{X_s \notin A, \forall s \in [0,t]\}$$

$$= \{\|X_s(\omega) - A\| > 0, \forall s \in [0,t]\}$$

$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\|X_s(\omega) - A\| \geq \tfrac{1}{n}, \forall s \in [0,t]\}$$

$$\overset{\text{stetigkeit}}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\|X_s(\omega) - A\| \geq \tfrac{1}{n}, \forall s \in [0,t] \cap \mathbb{Q}\}$$

$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \underbrace{\{\|X_s(\omega) - A\| \geq \tfrac{1}{n}\}}_{\in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t.$$

#

. ŧ **Eine** Stoppzeit trennt Vergangenheit und Zukunft.
→ Gegenbeispiel: sup statt inf. / $\inf\{t \geq 0 \mid B(2t) \geq 1\}$

<u>Def. 3.15)</u> . Sei T eine Stoppzeit und

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\}$$

heisst die <u>σ-Algebra der T-Vergangenheit</u>.

<u>Lemma 3.16)</u> ⓐ Seien T, S Stoppzeiten, $A \in \mathcal{F}_S$.

$$\Rightarrow A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$$

. Insbesonderes, wenn $S \leq T$ auf Ω, dann $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$

ⓑ $\mathcal{F}_{T \wedge S} = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$ und die folgenden Ereignisse sind in $\mathcal{F}_{T \wedge S}$:

$$\{T < S\}; \{T \leq S\}; \{T = S\}; \{T \geq S\}; \{T > S\}$$

ⓒ $\mathbb{E}(\cdot \mid \mathcal{F}_{S \wedge T}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\cdot \mid \mathcal{F}_S) \mid \mathcal{F}_T)$.

<u>Beweis</u>: Übungen. #

<u>. Theorem 3.17)</u> Sei X progressiv messbar bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, und T eine Stoppzeit.

Dann, $X_T : \{T < \infty\} \to E$
$\omega \mapsto X_{T(\omega)}(\omega)$ ist $\mathcal{F}_T$-messbar,

und der <u>gestoppte Prozess</u>

$$X^T : (t, \omega) \mapsto X_{T(\omega) \wedge t}(\omega) \text{ ist}$$

progr. messbar bzgl $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Beweis: . $\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und jede $t \geq 0$,

$$\{X_T \in B\} \cap \{T \leq t\} = \{X_{T\wedge t} \in B\} \cap \{T \leq t\}$$

$\Rightarrow$ Wenn $X_{T\wedge t}$ ist progr. messbar $\Rightarrow$ $\in \mathcal{F}_t$.

. So, zeigen wir es. Die Abbildung

$$(s,\omega) \longmapsto (T(\omega)\wedge s, \omega) \quad \text{von } [0,t]\times\Omega \circlearrowleft$$

ist $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$-messbar.

. Wegen Progr. Messbarkeit von X, auch die Abbildung

$$\big([0,t]\times\Omega,\ \mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t\big) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

$$(s,\omega) \longmapsto X_s(\omega)$$

ist messbar, und deshalb auch die "Ketten"-Abbildung

$$(s,\omega) \longmapsto (T(\omega)\wedge s, \omega) \longmapsto X_{T(\omega)\wedge s}(\omega)$$

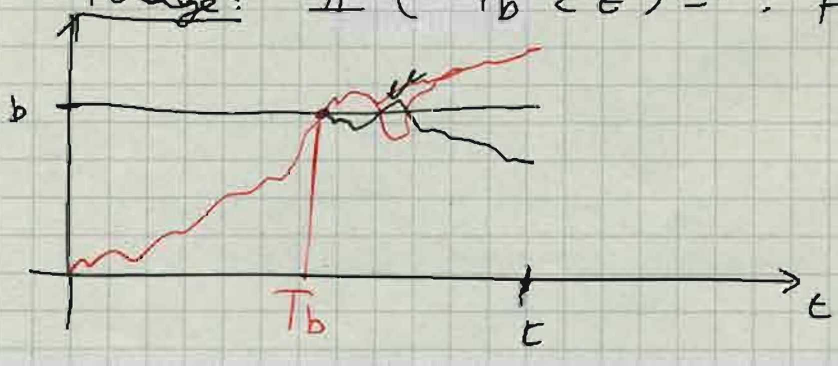
messbar bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist. #

Beispiel: . Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine 1-dim. Standard B.B.

. Für festes $S>0$, wir wissen (Markov Eigenschaft) dass $\{B_{t+S} - B_S,\ t\geq 0\}$ ~~k~~eine B.B ist.

. Das gilt auch wenn S eine (f.s. endliche) Stoppzeit ist (starke Markov Eigenschaft).

. Frage: $\mathbb{P}(T_b < t) = ?$ für $b>0$ gegeben?



$$\cdot\ \mathbb{P}(T_b < t) = \mathbb{P}(T_b < t, X_t > b) + \mathbb{P}(T_b < t, X_t < b) + \underbrace{\mathbb{P}(T_b < t, X_t = b)}_{\equiv 0}$$

starke Markov

$$= \mathbb{P}(T_b < t) \Big\{ \underbrace{\mathbb{P}(X_t > b \mid T_b < t) + \mathbb{P}(X_t < b \mid T_b < t)}_{\text{sind gleich (Reflexion Principle).}} \Big\}$$

$$= 2 \cdot \mathbb{P}(T_b < t) \cdot \mathbb{P}(X_t > b \mid T_b < t)$$

$$= 2 \cdot \mathbb{P}(\underbrace{T_b < t}_{\text{immer der Fall}}, X_t > b) = 2 \cdot \mathbb{P}(X_t > b)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(T_b < t) = 2 \cdot \mathbb{P}(X_t > b)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int^{\infty} dx\, e^{-\frac{x^2}{2t}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{b/\sqrt{t}}^{\infty} dy\, e^{-y^2/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(T_b \in dt) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{b^2}{2t}} \cdot \frac{b\, dt}{2\, t^{3/2}} = \frac{e^{-b^2/2t}}{\sqrt{2\pi t^3}}\, |b|\, dt}\,.$$

4) Martingale in stetiger Zeit.

. Das Standard Modell einer Martingale in stetiger Zeit ist die Brownische Bewegung.

. Martingale sind durch bedingte Erwartung bzgl. einer Filtration definiert. Wir sammeln einige Eigenschaften davon.

4.1) Bedingte Erwartung

Def. 4.1) Sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine σ-Algebra und X eine Zufallsvariable in $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Die bedingte Erwartung $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ bzgl. $\mathcal{G}$ ist die einzige $\mathcal{G}$-messbare Zufallsvariable s.d.

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})), \quad \forall A \in \mathcal{G},$$

$$\left(\text{d.h.,} \quad \int_A X \, d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \, d\mathbb{P} \right).$$

. $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A X)$ definiert eine Mass $\tilde{\mathbb{P}}$ auf $\mathcal{G} \Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ ist die Radon-Nikodym Ableitung $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}$.

. Hier sind einige Eigenschaften.

Prop. 4.2) . Sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine σ-Algebra. Dann gilt:

1. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$
2. Wenn X ist $\mathcal{G}$-messbar $\Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X$ f.s.
3. Wenn Y ist $\mathcal{G}$-messbar und beschränkt $\Rightarrow \mathbb{E}(X \cdot Y|\mathcal{G}) = Y \cdot \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ f.s.
4. Wenn X von $\mathcal{G}$ unabhängig ist, d.h. X unabhängig von $\mathbb{1}_A, \forall A \in \mathcal{G}$, dann $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$ f.s. (insbesondere für $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$).
5. Wenn $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{H})$ f.s.

⑥ <u>Linearität:</u> $\mathbb{E}(\alpha X+\beta Y|\mathcal{G}) = \alpha \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + \beta \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$, $\forall X,Y$ Z.V., $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

⑦ <u>Monotonie:</u> Wenn $X\le Y$ f.s. $\Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \le \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ f.s.

⑧ <u>Jensen:</u> Wenn φ ist konvex, $\mathbb{E}(|X|)<\infty$, $\mathbb{E}(|\varphi(X)|)<\infty$

$$\Rightarrow \varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) \le \mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{G}) \text{ f.s.}$$

:

· Sei $(X_n)_{n\ge1}$ eine Folge von Z.V.

⑨ <u>Fatou:</u> Wenn $\exists$ $\mathcal{F}$-messbare Z.V. Y mit $\mathbb{E}(Y) > -\infty$ s.d. für alle $n\ge1$, $X_n \ge Y$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}) \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})$$

⑩ <u>Monotone Konvergenz:</u> Wenn $\mathbb{E}(X) > -\infty$ und $X_n \uparrow X$ f.s.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \uparrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \text{ f.s.}$$

(Majorisierte Konvergenz)

⑪ <u>"Dominated Konvergenz":</u> Wenn $\exists$ $\mathcal{F}$-messbare Z.V. Y mit $\mathbb{E}(Y)<\infty$ s.d. $|X_n| \le Y$ punktweise und $X_n \to X$ f.s. $\Rightarrow \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \to \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ f.s.

<u>Ohne Beweis.</u>

4.2) (Sub/Super/-)-Martingale.

<u>Definition 4.3)</u> Ein stochastischer Prozess $X=(X_t)_{t\ge0}$ heisst <u>Submartingale</u> bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$, falls

- X ist $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ adaptiert,
- $X_t\in\mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}(X_t^+)<\infty$, $\forall t\ge0$ $\quad (X_t^+ = \max\{X_t,0\})$
- für alle $0\le s<t$;

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \ge X_s \text{ f.s.} \quad (*)$$

$\forall A\in\mathcal{F}_s$, $Z_s := \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ satisfy: $\ge X_s$

$\int_A X_t \, dP = \int_A Z_s \, dP \ge \int_A X_s \, dP$

$\Rightarrow (*)$

(*) bedeutet: $\boxed{\forall\, 0 \le s < t,\ \forall A \in \mathcal{F}_s:\ \mathbb{E}(\mathbb{1}_A X_t) \geq \mathbb{E}(\mathbb{1}_A X_s).}$

. Insbesonderes: $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)) = \mathbb{E}(X_t) \geq \mathbb{E}(X_s)$, d.h.,

eine submartingale hat die Tendenz zu wachsen.

<u>Def. 4.4)</u> Ein stoch. Prozess X heisst <u>supermartingale</u> bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls

. X ist $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptiert,

. $X_t \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}(X_t^-) > -\infty, \forall t \geq 0$ $\quad (X_t^- = \min\{X_t, 0\})$

. für alle $0 \le s < t$,

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \le X_s \text{ f.s.}$$

. So, X supermartingale $\Leftrightarrow$ $-X$ submartingale.

. Eine supermartingale hat die Tendenz abzunehmen.

<u>Def. 4.5)</u> Wenn X ist eine <u>super-</u> und <u>sub-martingale</u>, dann heisst einfach <u>Martingale</u>:

. X ist $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptiert

. $X_t \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$, $\forall t \geq 0$

. $\forall\, 0 \le s < t$:

$$\underline{\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s \text{ f.s.}}$$

. Die Bedeutung einer Martingale ist "ein faires Spiel":

$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$, ist was aus jetziger Sicht zukünftig erwarte $= X_s$, was ich jetzt habe.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) - \mathbb{E}(X_s|\mathcal{F}_s)$$
$$= \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) - X_s = 0 \text{ f.s.}$$

$\Rightarrow$ Beste Voraussagen von Zukunft , von Gewinn ist gleich Null!

Hier sind ein Paar wichtige Beispiele:

Prop. 4.6) Sei B eine d-dim. B.B. und $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B$.

Für $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x\cdot y := \sum_{i=1}^d x_i y_i$ das Skalarprodukt.

ⓐ Für festes $y \in \mathbb{R}^d$, $y\cdot B_t$ ist eine Martingale.

ⓑ $|B_t|^2 - d\cdot t$ ist eine Martingale

ⓒ $\exp\left(y\cdot B_t - \frac{1}{2}|y|^2 t\right)$, für festes $y\in\mathbb{R}^d$, ist eine Martingale.

Beweis: ⓐ Sei $0 \le s < t$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(y\cdot B_t \mid \mathcal{F}_s) \overset{\text{lin.}}{=} y\cdot \mathbb{E}(\underbrace{B_t - B_s}_{\text{unab. von } \mathcal{F}_s} \mid \mathcal{F}_s) + y\cdot \mathbb{E}(\underbrace{B_s}_{\mathcal{F}_s\text{-messbar}} \mid \mathcal{F}_s)$$

$$= y\cdot \underbrace{\mathbb{E}(B_t - B_s)}_{=0} + y\cdot B_s = y\cdot B_s.$$

ⓑ
$$\mathbb{E}(|B_t|^2 \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(|B_t - B_s|^2 \mid \mathcal{F}_s) + 2\cdot \mathbb{E}((B_t - B_s)\cdot \underbrace{B_s}_{\mathcal{F}_s\text{-messbar}} \mid \mathcal{F}_s)$$
$$+ \mathbb{E}(|B_s|^2 \mid \mathcal{F}_s)$$
$$= \overbrace{\mathbb{E}(|B_t - B_s|^2)}^{=(t-s)\cdot d} + 2\cdot B_s \cdot \underbrace{\mathbb{E}(B_t - B_s)}_{=0}$$
$$+ |B_s|^2$$
$$= d(t-s) + |B_s|^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(|B_t|^2 - d\cdot t \mid \mathcal{F}_s) = |B_s|^2 - d\cdot s.$$

ⓒ
$$\mathbb{E}\left(e^{y\cdot B_t - \frac{|y|^2}{2} t} \mid \mathcal{F}_s\right) = e^{-\frac{|y|^2 t}{2}} \cdot \mathbb{E}\left(e^{y\cdot(B_t - B_s)} \cdot \underbrace{e^{y\cdot B_s}}_{\mathcal{F}_s\text{-messbar}} \mid \mathcal{F}_s\right)$$

$$= e^{-\frac{|y|^2}{2} t} \cdot e^{y\cdot B_s} \cdot \mathbb{E}\left(e^{y\cdot B_{t-s}}\right)$$

Aber,
$$\mathbb{E}(e^{y\cdot B_u}) = \int_{\mathbb{R}^d} dx_1 \dots dx_d \, e^{y_1\cdot x_1 + \dots + y_d \cdot x_d} \frac{\prod_{k=1}^d e^{-\frac{x_k^2}{2u}}}{(2\pi u)^{d/2}}$$
$$= e^{\frac{|y|^2}{2} u} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} dx_1 \dots dx_d \, \frac{e^{\frac{-(x_k - y_k\cdot u)^2}{2u}}}{(2\pi u)^{d/2}} = e^{\frac{|y|^2}{2} u}.$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left(e^{y\cdot B_t - \frac{|y|^2 t}{2}} \,\middle|\, F_s\right) = e^{-\frac{|y|^2 t}{2}} \cdot e^{y\cdot B_s} \cdot e^{\frac{|y|^2}{2}(t-s)}$$

$$= e^{y\cdot B_s - \frac{|y|^2 t}{2}} . \quad \#$$

Bemerkung: ⓐ, ⓑ + f.s. Stetigkeit und $B_0 = 0$ definiert eine B.B. (Siehe später: Lévy's Martingale Representation).

Beispiel: Sei Z eine Z.V. mit $\mathbb{E}(|Z|) < \infty$ und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration. Definiere $X_t := \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_t)$. Dann $(X_t)_{t\geq 0}$ ist eine Martingale.

In der Tat,

$$\mathbb{E}(|X_s|) = \mathbb{E}(|\mathbb{E}(Z|F_s)|) \underset{\text{Jensen}}{\leq} \mathbb{E}(\mathbb{E}(|Z|\,|F_s)) = \mathbb{E}(|Z|) < \infty$$

und für $0 \leq s < t$:

$$\mathbb{E}(X_t|F_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z|F_t)|F_s) \underset{F_s \subset F_t}{=} \mathbb{E}(Z|F_s) = X_s .$$

4.3) Eigenschaften und Ungleichungen.

. Hier sind einige Eigenschaften.

Prop. 4.7) ⓐ Seien X, Y Martingale, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow X+Y,\ X-Y,\ \alpha X$ sind auch Martingale.

ⓑ Seien X, Y submartingale, $\alpha \geq 0$.

$\Rightarrow X+Y,\ X \vee Y,\ \alpha X$ sind auch submartingale.

(c) Sei X ein Martingal und φ eine konvexe Funktion s.d. $\varphi(X_t) \in L^1, \forall t \geq 0$.

Dann $(\varphi(X_t))_{t\geq 0}$ ist ein <u>Submartingal</u>

. Insbesondere, $(|X_t|)_{t\geq 0}$ ist ein <u>submartingal.</u>

<u>Beweis:</u> . (a) und (b) aus Linearität der bedingte Erwartung.

. (b) Jensen: für $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{E}(\varphi(X_t)|\mathcal{F}_s) \geq \varphi(\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)) = \varphi(X_s) \# $$

<u>Bemerkung:</u> Ein Martingal hat konstanten Erwartungswert.

· <u>Thm. 4.8)</u> Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein <u>Submartingal</u> wo:

(a) <u>jede</u> Trajektorie ist rechtsstetig und $T = [\sigma, \tau] \subset [0,\infty)$

<u>oder:</u> (b) $T = \{\tau_1, \tau_2, \dots\} \subset [0,\infty)$ abzählbar ist, mit $\tau_\infty \equiv \tau$.

Dann die folgenden Ungleichungen sind erfüllt:

(1) $\lambda \cdot \mathbb{P}\left(\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}(X_\tau^+)$, wobei $\mathbb{R} \ni \lambda > 0$ und $X_\tau^+ = \max\{X_\tau, 0\}$.

(2) <u>Doob's maximal inequality</u> :

$$\mathbb{E}\left(\left(\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t\right)^p\right) \leq \left(\frac{p}{1-p}\right)^p \cdot \mathbb{E}(X_\tau^p), \forall p > 1$$

<u>Beweis:</u>
Im diskrete Fall, siehe Bovier's Skript Stochastische Prozesse, SS2009: Thm 4.3.11 und 4.3.13:

$\max_{1\leq k\leq n} X_{t_k}$ statt $\sup_{\sigma\leq t\leq\tau} X_t$

Dann nehmen wir eine wachsende Folge von t_k's:

$$\{F_n\}_{n\geq 1} = \{t_k^{(n)}, 1 \leq k \leq n\}_{n\geq 1}$$

s.d. $\bigcup_{n\geq 1} F_n = ([\sigma,\tau) \cap \mathbb{Q}) \cup \{\sigma,\tau\}$. #

⊕ Rechtsstetigkeit.

. letzlich eine Ungleichung über den absteigend/steigenden Überquerungen eines Intervall $[a,b]$.

Def. 4.9) . Die Anzahl der absteigenden Überquerungen von $[a,b]$ $(a < b)$ durch $\{X_t(\omega), t \in T\}$ ist definiert durch:

$$D_T(a,b;X(\omega)) = \sup\{n \in \mathbb{N}, \exists t_1 < t_2 < \dots < t_{2n} \in T$$
$$\text{s.d. } X_{t_1}(\omega) > b, X_{t_2}(\omega) < a,$$
$$X_{t_3}(\omega) > b, X_{t_4}(\omega) < a, \dots, X_{t_{2n}}(\omega) < a\}$$

. Die Anzahl der steigenden Überquerungen von $[a,b]$ ist

$$U_T(a,b;X(\omega)) = \sup\{n \in \mathbb{N}, \exists t_1 < t_2 < \dots < t_{2n} \in T \text{ s.d.}$$
$$X_{t_1}(\omega) < a, X_{t_2}(\omega) > b, \dots, X_{t_{2n}}(\omega) > b\}$$
$$\left(\equiv D_T(-b,-a;-X(\omega))\right).$$

Thm. 4.10) Sei $a < b$ reelle Zahlen und X_t, T wie im Thm. 4.8.

Dann $$\mathbb{E}(U_T(a,b;X(\omega))) \leq \frac{\mathbb{E}(X_\tau^+) + |a|}{b-a},$$

und $$\mathbb{E}(D_T(a,b;X(\omega))) \leq \frac{\mathbb{E}((X_\tau - b)^+)}{b-a}.$$

(Hint)
· ~~Beweis~~: Im diskrete Fall: Thm 4.2.2 und Cor. 4.2.3 von Bovier's Skript
(muss aber $-X$ betrachten, da dort für supermartingale). #

4.4) Konvergenzsätze.

. Ein Submartingal wächst, im Mittelwert, in der Zeit, deshalb wenn nicht nach unendlich geht, sollte ein Limes haben.

Thm 4.11) Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiges Submartingal mit
$$C := \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}(X_t^+) < \infty.$$
Dann, existiert f.s. ein Limes:
$$X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t \qquad \text{f.s.}$$

Korollar 4.12) Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiges, nicht-negatives Supermartingal. Dann, existiert
$$X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t \qquad \text{f.s.}$$

Beweis von Korollar 4.12). Nehme $Y_t = -X_t$. Das ist ein Submartingal mit $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}(Y_t^+ = 0) = 0 < \infty \oplus$ Thm 4.11. #

Beweis von Thm 4.11). Aus Thm 4.10, $\forall n \geq 1$, $a < b \in \mathbb{R}$,

Zu sehen: X macht nicht ∞-oft ${}^{b}_{a}\wedge\wedge\wedge$ für alle $a<b$.

es gilt:
$$\mathbb{E}\left(U_{[0,n]}(a,b;X(\omega))\right) \leq \frac{\mathbb{E}(X_n^+) + |a|}{b-a}.$$

$$\text{Monotone Konvergenz} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \Rightarrow \mathbb{E}\left(U_{[0,\infty)}(a,b;X(\omega))\right) \leq \frac{C+|a|}{b-a}.$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(A_{a,b} := \{\omega\in\Omega \mid U_{[0,\infty)}(a,b;X(\omega)) = \infty\}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\Big(A := \bigcup_{\substack{a<b,\\ a,b\in\mathbb{Q}}} A_{a,b}\Big) = 0.$$

Aber, $A = \{\omega\in\Omega \mid \limsup_{t\to\infty} X_t(\omega) > \liminf_{t\to\infty} X_t(\omega)\}$.

$\Rightarrow \forall \omega\in\Omega\setminus A$, $X_\infty(\omega) = \lim_{t\to\infty} X_t(\omega)$ existiert. #

Thm 4.12) Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiges, nicht-negatives Supermartingal (bzw. rechtsstetiges Martingal). Dann die folgende Aussagen sind Äquivalent:

ⓐ $\lim_{t\to\infty} X_t$ existiert in L^1.

ⓑ $\exists X_\infty \in L^1$ s.d. $X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$ f.s.
und $(X_t)_{t\in[0,\infty]}$ ist ein Supermartingale (bzw. Martingal) bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$.

ⓒ $\{X_t, t\in[0,\infty)\}$ ist gleichmässig integrierbar.
(d.h., $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}(|X_t| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_t|>M\}}) \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$).

Beweis: Übungen #

Bemerkung: • (c) ⇒ (a) ⇒ (b) auch ohne die "nicht-negatives" Annahme.

• Für Martingale, gilt zusätzlich das folgende:
$\exists X_\infty \in L^1$ s.d. $X_t = \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_t)$, $\forall t\geq 0$, f.s.

4.5) Optional Sampling.

Thm 4.13) Seien $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiges Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und S, T beschränkte Stoppzeiten mit $S\leq T$.

Dann, $X_S \leq \mathbb{E}(X_T | \mathcal{F}_S)$ f.s.

Bem.: Für S und T zwei Konstante, das gilt wegen Definition von Submartingal.

<u>Beweis:</u> . Da $T \geq S$ sind beschränkt, wählen wir ein $t_0 \geq T$.

. Nehmen wir ~~zunächst~~ an, dass $X \geq 0$.

Da $T \leq t_0$ und X ein Submartingal,

$$\mathbb{E}(X_T) \leq \Big(\sup_{0 \leq t \leq t_0} \mathbb{E}(X_t) = \Big) \, \mathbb{E}(X_{t_0}) < \infty$$ (wegen def. von Submartingale).

ⓐ <u>Diskrete Approximation:</u>

$$\text{Sei } T_n = \begin{cases} \frac{k+1}{2^n}, & \frac{k}{2^n} \leq T < \frac{k+1}{2^n} \text{ für ein } k \geq 0, \\ \infty, & \text{falls } T = \infty. \end{cases}$$

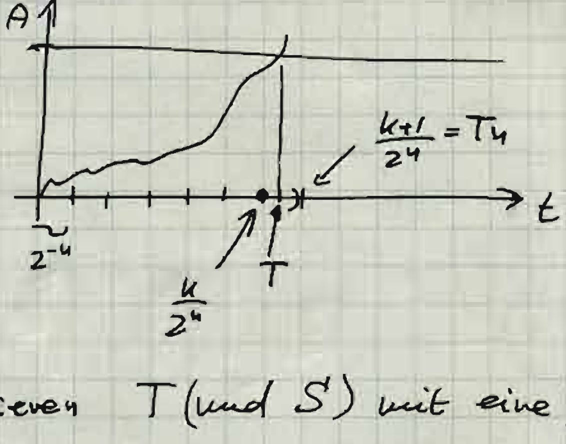
($T_n = \infty$ ist in unseren Fall ausgeschlossen).

$\Rightarrow$ T_n ist eine Stoppzeit:

$$\{T_n \leq t\} = \underbrace{\left\{ T < \frac{\lceil 2^n t \rceil}{2^n} \right\}}_{\in \mathcal{F}_t} \cap \underbrace{\left\{ T < \frac{\lceil 2^n t \rceil - 1}{2^n} \right\}^c}_{\in \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t .$$

. $T_n \geq T_{n+1} \geq \ldots \geq T$.

<u>Beispiel:</u>



$\Rightarrow$ Wir approximieren T (und S) mit eine fallende Folge von Stoppzeiten T_n (und S_n) mit endlichem Wertebereich; <u>$T_n \geq S_n$, $\forall n$</u> $\Rightarrow$ <u>$X_{S_n} \to X_S$ (rechtsstetig)</u>

ⓑ Zeigen wir: <u>$X_{T_n} \leq \mathbb{E}(X_{t_0} \mid \mathcal{F}_{T_n})$.</u> <u>Sei $K_n := \lceil t_0 \cdot 2^n \rceil$.</u>

$$\mathbb{E}(X_{t_0} \mid \mathcal{F}_{T_n}) = \sum_{e=1}^{K_n} \mathbb{E}\left(X_{t_0} \,\Big|\, T_n = \frac{e}{2^n}\right) \mathbb{1}_{[T_n = \frac{e}{2^n}]}$$

$$\underset{\text{submart.}}{\geq} \sum_{e=1}^{K_n} X_{\frac{e}{2^n}} \cdot \mathbb{1}_{[T_n = \frac{e}{2^n}]} = X_{T_n} .$$

$\Rightarrow \mathbb{E}(X_{t_0} | \mathcal{F}_{T_n})$ ist uniform integrierbar.

$\left(\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{t_0} | \mathcal{F}_{T_n})) = \mathbb{E}(X_{t_0}) < \infty \right).$

$\Rightarrow \{ X_{T_n}, n \geq 1 \}$ ist uniform integrierbar und
$\underline{\lim_{n\to\infty} X_{T_n} = X_T \text{ in } L^1}$ (und $\lim_{n\to\infty} X_{S_n} = X_S$ in L^1).

ⓒ <u>Es gilt:</u> $\forall A \in \mathcal{F}_{S_n}: \int_A X_{S_n} \, d\mathbb{P} \leq \int_A X_{T_n} \, d\mathbb{P}.$

. Sei $A_j := A \cap \{ S_n = \frac{j}{2^n} \} \Rightarrow \forall k \geq j,\ A_j \cap \{ T_n > \frac{k}{2^n} \} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}$.

$$\overset{\text{Subm.}}{\Rightarrow} \int_{A_j \cap \{T_n \geq \frac{k}{2^n}\}} X_{k/2^n} \, d\mathbb{P} \leq \int_{A_j \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\}} X_{T_n} \, d\mathbb{P} + \int_{A_j \cap \{T_n \geq \frac{k+1}{2^n}\}} X_{\frac{k+1}{2^n}} \, d\mathbb{P}$$

. Iterationen $\Rightarrow \int_{A_j \cap \{T_n \geq \frac{j}{2^n}\}} X_{\frac{j}{2^n}} \, d\mathbb{P} = \int_{A_j} X_{S_n} \, d\mathbb{P}$

$$\leq \int_{A_j \cap \{T_n \geq \frac{j}{2^n}\}} X_{T_n} \, d\mathbb{P} = \int_{A_j} X_{T_n} \, d\mathbb{P}$$

$\sum_j \Rightarrow \#.$

ⓓ $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{F}_S \subseteq \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{S_n}$ (da $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_{S_n}$, wegen $S \leq S_n$),

$\int_A X_{S_n} \, d\mathbb{P} \leq \int_A X_{T_n} \, d\mathbb{P}$; $\lim_{n\to\infty} \Rightarrow \int_A X_S \, d\mathbb{P} \leq \int_A X_T \, d\mathbb{P}$,

$\Rightarrow$ ok für $X_t \geq 0$.

ⓔ Für $X_t \geq -n$, betrachten wir $Y_t = X_t + n$

$\Rightarrow$ gilt für Y_t : $\underbrace{\mathbb{E}(Y_T | \mathcal{F}_S)}_{\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_S) + n} \geq \underbrace{Y_S}_{X_t + n}$ fs. ✓.

Äquivalent: $X_t^{(n)} := X_t \wedge (-n)$ ✓.

+ Monotoner Konvergenz $\Rightarrow$ gilt für alle X_t. #

Korollar 4.14) Sei X rechtsstetig, adaptiert und integrierbar. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

ⓐ X ist ein Martingal,

ⓑ $\forall$ beschränkte Stoppzeiten T, ist $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.

Beweis: ⓐ $\Rightarrow$ ⓑ: Optional Sampling (Thm 4.13)

Submart. $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_0))$

$$\geq \mathbb{E}(X_0)$$

Aber X ist auch Supermart. $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(X_T) \leq \mathbb{E}(X_0)$

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.

ⓑ $\Rightarrow$ ⓐ: Sei $s < t$ und $A \in \mathcal{F}_s$.

Wählen wir die Stoppzeiten:

$$\begin{cases} \cdot\ T(\omega) = t \\ \cdot\ S(\omega) = \begin{cases} s, & \text{falls } \omega \in A, \\ t, & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_0) \underset{\text{hyp. ⓑ}}{=} \mathbb{E}(X_S) = \mathbb{E}(X_t \cdot \mathbb{1}_{A^c}) + \mathbb{E}(X_s \cdot \mathbb{1}_A)$$

und $\mathbb{E}(X_0) \overset{\iota}{=} \mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_t \cdot \mathbb{1}_{A^c}) + \mathbb{E}(X_t \cdot \mathbb{1}_A)$.

$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{F}_s,\ \mathbb{E}(X_s \cdot \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_t \mathbb{1}_A)$. #

Korollar 4.15) Voraussetzungen wie in Korollar 4.14).

$\Rightarrow$ Äquivalente Aussagen:

ⓐ X ist sub-Martingal,

ⓑ $\forall$ beschränkten Stoppzeiten $S \leq T$, gilt

$$\mathbb{E}(X_S) \leq \mathbb{E}(X_T).$$

Beweis: ⓐ $\Rightarrow$ ⓑ: Optional Sampling (Thm 4.13)

$$\mathbb{E}(X_T) \underset{\substack{\nearrow \\ \mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T \text{ weil } S \leq T}}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S)) \geq \mathbb{E}(X_S).$$

ⓑ $\Rightarrow$ ⓐ: Sei $s < t$, $A \in \mathcal{F}_s$,

. S und T wie im obigen Beweis.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_S) \leq \mathbb{E}(X_T)$$

$$\mathbb{E}(X_S) = \mathbb{E}(X_t \mathbb{1}_{A^c}) + \mathbb{E}(X_s \mathbb{1}_A) \quad \Big| \quad \mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_t \mathbb{1}_{A^c}) + \mathbb{E}(X_t \mathbb{1}_A).$$

$$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{F}_s: \ \mathbb{E}(X_s \mathbb{1}_A) \leq \mathbb{E}(X_t \mathbb{1}_A) \Rightarrow \#$$

Korollar 4.16)

Sei X ein rechtsstetiges (sub-)Martingal,

T eine Stoppzeit.

Dann ist auch $X^T \equiv (X_{t \wedge T})_{t \geq 0}$ ein (sub-)Martingal.

Beweis: . $t \wedge T$ ist eine beschränkte Stoppzeit.

$$\underset{\text{Thm 4.13}}{\Longrightarrow} \ \forall s < t \wedge T: \ \mathbb{E}(X_{t \wedge T} \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s \text{ f.s.} \quad \#$$

5) Stetige Semimartingale und quadratische Variation.

. Wir betrachten immer standard filtrierter W-räume: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$
(d.h., alle $(\mathcal{F},\mathbb{P})$-Nullmengen in $\mathcal{F}_0$ erhalten, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ rechtsstetig).

5.1) Semimartingale.

Das Itô-Integral wird für stetige Semimartingale mit endlichen quadratische Variation definiert.

Def. 5.1) $X \in \mathcal{A}^+$: Ein Prozess X heisst <u>stetig und wachsend</u>, falls X ist adaptiert und für fast alle $\omega \in \Omega$,

$$t \mapsto X_t(\omega) \quad \text{stetig und wachsend ist.}$$

. $X \in \mathcal{A}$: Ein Prozess X heisst <u>stetig</u> und von <u>endlicher Variation</u>, falls X ist adaptiert und für fast alle $\omega \in \Omega$: $t \mapsto X_t(\omega)$ ist stetig und von endlicher Variation;

↳ $\forall t \geq 0$, die Variation

$$S_t(\omega) \equiv S_t(X(\omega)) := \sup_{\substack{0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq t, \\ n \in \mathbb{N}}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left| X_{t_k}(\omega) - X_{t_{k-1}}(\omega) \right| \right\}$$

von $s \mapsto X_s(\omega)$ auf $[0,t]$ <u>endlich ist</u>.

. $X \in \mathcal{M}$: . X ein stetiges Martingal.

. $X \in \mathcal{M}_{loc}$: Ein Prozess X heisst <u>stetiges</u>, <u>lokales Martingal</u>, falls X ist adaptiert und $\exists$ Stoppzeiten $T_n, n \geq 1$ s.d. $T_n \nearrow \infty$ f.s. und X^{T_n} ein Martingal ist $(\forall n \geq 1)$

Lemma 5.2) $X \in \mathcal{A} \Leftrightarrow X = Y - Z$ mit $Y, Z \in \mathcal{A}^+$.

Beweis: Nehme $Y = \frac{1}{2}(S+X)$, $Z = \frac{1}{2}(S-X)$ mit

S = Variation von X. #

Einige Eigenschaften.

Lemma 5.3) (a) $X \in \mathcal{M} \Rightarrow X \in \mathcal{M}_{loc}$.

(b) $X \in \mathcal{M}_{loc}$ und $X \geq 0 \Rightarrow X$ Supermartingal.

(c) $X \in \mathcal{M}_{loc}$ und beschränkt $\Rightarrow X$ Martingal

(d) $X \in \mathcal{M} \Leftrightarrow X \in \mathcal{M}_{loc}$ und $\forall s \geq 0$, $\{X_{T \wedge s}\}_{T \in \text{Stoppzeiten}}$ ist uniform integrierbar.

(e) $\exists\, X \in \mathcal{M}_{loc}$, X uniform integrierbar s.d. $X \notin \mathcal{M}$.

Beweis (a)-(d): (a) Wähle $T_n = \infty$, $n \geq 1$.

(b) $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} X_{T_n \wedge t} | \mathcal{F}_s)$

$0 \leq s < t$

$$\underset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{T_n \wedge t} | \mathcal{F}_s) = \liminf_{n\to\infty} X_{T_n \wedge s} = X_s.$$

(c) $|X| \leq C \Rightarrow$ aus (ii): $X + C$ superm., $C - X$ " $\Rightarrow X$ sup. und $-X$ sup. $\Rightarrow X$ Mart.

(d) $\Rightarrow$. $X \in \mathcal{M}_{loc}$ wegen (i).

$$\mathbb{E}(|X_{T\wedge s}|) \overset{\text{Mart.}}{=} \mathbb{E}(|\mathbb{E}(X_s | \mathcal{F}_{T\wedge s})|)$$

$$\underset{\text{Jensen}}{\leq} \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X_s| \,|\, \mathcal{F}_{T\wedge s})) = \mathbb{E}(|X_s|) < \infty \checkmark$$ uniform in T.

$\Leftarrow$: $\exists$ Stoppzeiten $(S_n)_{n\geq 1}$ mit $S_n \uparrow \infty$ und

$t \mapsto X_{S_n \wedge t}$ martingal.

$\underset{\text{Kor 4.15}}{\Rightarrow}$ $\forall$ beschränkte Stoppzeiten T, $\mathbb{E}(X_{S_n \wedge T}) = \mathbb{E}(X_0)$.

Unif. int. $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathbb{E}(X_{S_n\wedge T})}_{=\mathbb{E}(X_0)} = \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} X_{S_n \wedge T}) = \mathbb{E}(X_T)$.

· Kor 4.14 in die andere Richtung $\Rightarrow X_t$ ist ein Martingal. #

Def. 5.4) $X \in S$: Ein Prozess heisst stetiges Semimartingal,

falls $\exists\, M \in \mathcal{M}_{loc}$ und $A \in \mathcal{A}$ s.d.

$$X = M + A.$$

Thm. 5.5) Sei $\mathcal{M}^0_{loc} := \{X \in \mathcal{M}_{loc}, X_0 = 0 \text{ f.s.}\}$.

Dann ist $\mathcal{M}^0_{loc} \cap \mathcal{A} = \{0\}$ und $S = \mathcal{M}^0_{loc} \oplus \mathcal{A}$.

([d.h., $X \in \mathcal{M}_{loc} \cap \mathcal{A} \Rightarrow X = \text{konstant} = X_0$].)

Beweis: · Es reicht zu zeigen $X \in \mathcal{M}^0 \cap \mathcal{A} \Rightarrow X = 0$. ⊛

In der Tat, $X \in \mathcal{M}^0_{loc} \cap \mathcal{A} \Rightarrow \exists\, (T_n)_{n \geq 1}$ s.d.

$X^{T_n} \in \mathcal{M}^0 \cap \mathcal{A} \overset{⊛}{\Longrightarrow} X^{T_n} = 0$,

d.h., $X_{T_n \wedge t} = 0 \Rightarrow X_t = 0$, da $T_n \nearrow \infty$.

· Ausserdem, können uns auf X beschränkt mit $S_\infty(X) < \infty$, konzentrieren. In der Tat,

Sei $T_n = \inf\{t \geq 0 \mid |X_t| > n \text{ oder } S_t > n\}$,

dann, $X^{T_n} \in \mathcal{M}^0 \cap \mathcal{A} \Rightarrow X = 0$.

· Sei $\varepsilon > 0$, $T_0 = 0$, $T_{k+1} = \inf\{t \geq T_k \mid |X_t - X_{T_k}| > \varepsilon\}$.

Da X stetig ist $\overset{\text{und in } \mathcal{A} \text{ (bd. var.)}}{\Rightarrow} \lim_{k \to \infty} T_k = \infty$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_{T_n}^2) = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} (X_{T_{k+1}}^2 - X_{T_k}^2)\Big)$$

$$= \mathbb{E}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} (X_{T_{k+1}} - X_{T_k})^2\Big) + 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\Big(X_{T_k}\underbrace{\mathbb{E}(X_{T_{k+1}} - X_{T_k} \mid \mathcal{F}_{T_k})}_{\equiv 0}\Big)$$

$$\leq \varepsilon \cdot \mathbb{E}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} |X_{T_{k+1}} - X_{T_k}|\Big) \leq \varepsilon\, \mathbb{E}(S_\infty).$$

Aber $S_\infty < \infty$ und $\varepsilon \to 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X_{T_n}^2) = 0$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_\infty^2) = 0.$$

. "Doob's maximal inequality" für $p=2$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left(\sup_{t\geq 0} X_t^2\right) \leq 4\cdot\mathbb{E}(X_\infty^2) = 0 \quad, \text{d.h., } \underline{X=0 \text{ f.s.}}$$

\#

5.2) Doob-Meyer Zerlegung.

. <u>Thm. 5.6)</u> Sei X stetiges <u>Supermartingal</u>. Dann,

$\exists\, M \in \mathcal{M}^0_{loc}$ und $A \in \mathcal{A}^+$ s.d.:

$$X_t = M_t - A_t.$$

. M und A sind, bis auf Ununterscheidbarkeit, eindeutig.

<u>Korollar 5.7)</u> . Jedes stetige Supermartingal ist stetiges Semimartingal.

(Es folgt aus Thm 5.6) und Lemma 5.2.)

. <u>Hint zum Beweis von Thm. 5.6)</u>

. Eindeutigkeit: Sei $X_t = M_t - A_t = \tilde{M}_t - \tilde{A}_t$, mit

$M_t, \tilde{M}_t \in \mathcal{M}^0_{loc}$, $A_t, \tilde{A}_t \in \mathcal{A}^+$.

$$\Rightarrow M_t - \tilde{M}_t = A_t - \tilde{A}_t \in \mathcal{M}_0^{loc} \cap \mathcal{A} = \{0\}.$$

. Existenz: In diskrete Zeit Fall: Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ diskretes <u>Supermart.</u>

$\Rightarrow$. $Y_n := \mathbb{E}(X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_n) \geq 0$ und ist $\mathcal{F}_n$-messbar

. $A_n := \sum_{k=1}^{n-1} Y_k$ wachsend und $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar

und . $M_n := X_n + A_n$ ist ein Martingal.

. Noch ein Lemma.

Lemma 5.8) ⓐ Sei $(A_n)_{n\geq 0}$ ein wachsender Prozess mit $A_0 = 0$ und A_n $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar.

Wenn $\mathbb{E}(A_\infty - A_n | \mathcal{F}_n) \leq K, \quad \forall n \geq 0$

$\Rightarrow \quad \mathbb{E}(A_\infty^2) \leq 2K^2$

ⓑ Seien $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ wie in Teil ⓐ und $B = A^{(1)} - A^{(2)}$.

Wenn $\exists$ eine Z.V. $W \geq 0$ mit $\mathbb{E}(W^2) < \infty$ und $|\mathbb{E}(B_\infty - B_n | \mathcal{F}_n)| \leq \mathbb{E}(W | \mathcal{F}_n)$,

dann $\mathbb{E}(\sup_{n\geq 0} B_n^2) \leq c\left(\mathbb{E}(W^2) + K \cdot \sqrt{\mathbb{E}(W^2)}\right)$

für eine Konstante $c > 0$.

Beweis: ⓐ Sei $a_n = A_{n+1} - A_n$. (O.B.d.A, $A_n \leq C$ f.s. $\Rightarrow a_n \leq C$ f.s.)

$$\Rightarrow A_\infty^2 = \left(\sum_{n=0}^\infty a_n\right)^2 = \sum_{k,n\geq 0}^\infty a_n a_m$$

$$= \sum_{n=0}^\infty a_n^2 + 2 \cdot \sum_{n\geq 0}^\infty a_n \underbrace{\sum_{m=n+1}^\infty a_m}_{= A_\infty - A_{n+1} = (A_\infty - A_n) - a_n}$$

$$= 2 \cdot \sum_{n=0}^\infty (A_\infty - A_n) a_n - \sum_{n=0}^\infty a_n^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(A_\infty^2) \underset{\text{lin. + } a_n\ \mathcal{F}_n\text{-messbar}}{=} 2 \cdot \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}(A_\infty - A_n | \mathcal{F}_n) \cdot a_n\right) - \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^\infty a_n^2\right)$$

$$\leq 2 \cdot K \cdot \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^\infty a_n\right) = 2K \cdot \mathbb{E}(A_\infty)$$

$$= 2 \cdot K \cdot \mathbb{E}(\mathbb{E}(A_\infty - A_0 | \mathcal{F}_0)) \leq 2K^2.$$

(b) Sei $b_n = B_{n+1} - B_n$, $a_n^{(i)} = A_{n+1}^{(i)} - A_n^{(i)}$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(B_\infty^2) = 2 \cdot \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(B_\infty - B_n | \mathcal{F}_n)\, b_n\right) - \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2\right)$$

$$\leq 2 \cdot \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(W | \mathcal{F}_n)(a_n^{(1)} + a_n^{(2)})\right)$$

$$= 2 \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} W (a_n^{(1)} + a_n^{(2)}) \Big| \mathcal{F}_n\right)\right)$$

$$= 2 \cdot \mathbb{E}\left(W \cdot (A_\infty^{(1)} + A_\infty^{(2)})\right)$$

$$\underset{C.S.}{\leq} 2 \cdot \mathbb{E}(W^2)^{1/2} \cdot \left(\underbrace{\mathbb{E}((A_\infty^{(1)})^2)^{1/2}}_{\leq \sqrt{2}K} + \underbrace{\mathbb{E}((A_\infty^{(2)})^2)^{1/2}}_{\leq \sqrt{2}K}\right)$$

$$\leq 4\sqrt{2} K \, \mathbb{E}(W^2)^{1/2}.$$

. Nächstes, seien Martingale $M_n := \mathbb{E}(B_\infty | \mathcal{F}_n)$, $W_n := \mathbb{E}(W | \mathcal{F}_n)$,
$X_n := M_n - B_n$.

$\Rightarrow |X_n| = |\mathbb{E}(B_\infty - B_n | \mathcal{F}_n)| \leq W_n$ (per def. of W_n)

Doob $\Rightarrow$. $\mathbb{E}(\sup_{n \geq 0} X_n^2) \leq \mathbb{E}(\sup_{n \geq 0} W_n^2) \leq 4 \cdot \mathbb{E}(W_\infty^2)$

$$= 4 \cdot \mathbb{E}(W^2).$$

$$\cdot\ \mathbb{E}(\sup_{n \geq 0} M_n^2) \leq 4 \cdot \mathbb{E}(M_\infty^2) = 4 \cdot \mathbb{E}(B_\infty^2).$$

$\Rightarrow$ Aus $\sup_{n \geq 0} |B_n|^2 \leq 2 \left(\sup_{n \geq 0} |X_n|^2 + \sup_{n \geq 0} |M_n|^2\right)$, folgt

$$\mathbb{E}(\sup_{n \geq 0} |B_n|^2) \leq 8 \cdot \mathbb{E}(W^2) + 8 \cdot \mathbb{E}(B_\infty^2)$$

$$\leq 8\, \mathbb{E}(W^2) + 32\sqrt{2}\, K \cdot \mathbb{E}(W^2)^{1/2}$$

$\Rightarrow$ mit $c = 32\sqrt{2}$. #

$a, b \geq 0$:
$2ab \leq a^2 + b^2$
$\Rightarrow |B_n|^2 \leq |X_n|^2 + |M_n|^2 + 2|X_n||M_n|$
$\leq 2(|X_n|^2 + |M_n|^2)$

5.3) Quadratische Variation.

. Wir haben die Variation definiert. Jetzt schauen an die Quadratische Variation.

Vorläufige Def. 5.9) Sei X ein stochastisches Prozess. Dann ist die Quadratische Variation von $(X_s)_{0\le s\le t}$ definiert durch:

$$Q_t(X) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \left\{ \sum_{k=1}^{n} |X_{t_k}(\omega) - X_{t_{k-1}}(\omega)|^2 \right\}$$

mit $\|\Delta\| = \sup_{1\le k\le n} |t_k - t_{k-1}|$.

. Beispiel: Wir haben schon gesehen (Lemma 2.6), dass für X = Brownsche Bewegung,

$$Q_t(B) = t. \quad (\text{in } L^2)$$

. Das ist klar, dass Q_t ist eine wachsende Funktion von t und wenn $X(\omega)$ stetig ist, wird auch $Q_t(X(\omega))$ stetig sein (falls nicht ∞ ist!).

up to indistinguishability

. Thm. 5.10) (a) $\forall M \in \mathcal{M}_{loc}, \exists! \langle M\rangle \in \mathcal{A}_0 : M^2 - M_0^2 - \langle M\rangle \in \mathcal{M}_{loc}^0$

(b) $\forall M, N \in \mathcal{M}_{loc}, \exists! \langle M, N\rangle \in \mathcal{A}_0$ s.d.

$$M\cdot N - M_0 N_0 - \langle M, N\rangle \in \mathcal{M}_{loc}^0.$$

Beweis: (a) $M \in \mathcal{M}_{loc} \Rightarrow M^2$ ist ein lokales Submartingal

$\Rightarrow$ wegen Doob-Meyer Decomposition, $M^2 = N + A$

wobei $N \in \mathcal{M}_{loc}$ und $A \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow M^2 - A = N \in \mathcal{M}_{loc}$

(hier wird $\langle M\rangle := A \Rightarrow N = M_0^2 + \tilde{N} : M^2 - M_0^2 - \langle M\rangle = \tilde{N} \in \mathcal{M}_{loc}$).

(b). Man benutzt die Polarisation Identität:

$$M \cdot N = \frac{1}{4}\left((M+N)^2 - (M-N)^2\right),$$

zusammen mit (a). #

<u>Beispiel:</u> Brownsche Bewegung: aus Prop. 4.6) in $d=1$,

$B_t^2 - t$ ist ein Martingal (und $B_0 = 0$).

Deshalb, $\langle B_t \rangle = t$, genau wie .

$$Q_t(B) = t.$$

Das ist keinen Zufall, dass dien Wachsende Teil von B_t^2 ist die Quadratische Variation, als wir gleich sehen werden.

<u>Zweite Definition 5.9)</u> (a) $\langle M \rangle \equiv \langle M, M \rangle \equiv (\langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$ heisst die <u>quadratische Variation von M.</u>

(b) $\langle M, N \rangle \equiv (\langle M, N \rangle_t)_{t \geq 0}$ heisst die <u>quadratische Kovariation von M und N.</u>

Es gilt: $\langle M, N \rangle = \frac{1}{4}\left(\langle M+N \rangle - \langle M-N \rangle\right)$.

• Ein paar Eigenschaften:

<u>Lemma 5.11)</u> $\forall\, M, N \in \mathcal{M}_{loc}$ es gilt:

(a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist symmetrisch, bilinear, positiv semidefinit.

(b) $\forall$ Stoppzeit T,

$$\langle M, N \rangle^T = \langle M^T, N^T \rangle.$$

(c) $\langle M \rangle = \langle M - M_0 \rangle$

(d) $\langle M \rangle = 0 \iff M$ konstant.

Beweis: (a) Easy. ✓.

(b) $$\underbrace{(M^2-M_0^2-\langle M\rangle)}_{\in \mathcal{M}_{loc}}^T = (M^T)^2 - M_0^2 - \langle M\rangle^T \underset{(\text{Kor } 4.17)}{\in} \mathcal{M}_{loc}$$

aber $\exists!\ \langle M^T\rangle$ s.d. $(M^T)^2 - M_0^2 - \langle M^T\rangle \in \mathcal{M}_{loc}$

$$\Rightarrow \langle M\rangle^T = \langle M^T\rangle.$$

Wegen (b),

O.b.d.A, $M-M_0$ beschränkt $\underset{\text{Lemma } 5.3\,(c)}{\Rightarrow}$ $M-M_0 \in \mathcal{M}$

(c) Zeigen wir: $(M_t-M_0)M_0 \in \mathcal{M}$:

für $s<t$: $\mathbb{E}((M_t-M_0)M_0 \mid \mathcal{F}_s) = M_0 \cdot \mathbb{E}(M_t-M_0 \mid \mathcal{F}_s) = M_0(M_s-M_0)$.

Thm 5.10 $\Rightarrow \exists!\ \langle M-M_0\rangle \in \mathcal{A}$ s.d.

$$(M-M_0)^2 - \langle M-M_0\rangle \in \mathcal{M}$$

aber, $(M-M_0)^2 - \langle M\rangle = \underbrace{M^2 - M_0^2 - \langle M\rangle}_{\in \mathcal{M}} - \underbrace{2(M-M_0)M_0}_{\in \mathcal{M}} \in \mathcal{M}$.

$$\Rightarrow \langle M\rangle = \langle M-M_0\rangle.$$

(d) $\langle M\rangle = 0$ auf $[0,t] \overset{(c)}{\Rightarrow} (M-M_0)^2$ Martingal auf $[0,t]$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t} (M_s-M_0)^2\Big) \underset{\text{Doob}}{\le} 4 \cdot \mathbb{E}(M_t-M_0)^2 = 0,$$

d.h., M Konstant auf $[0,t]$. Und das gilt $\forall t\ge 0$.

\#

Beispiel.

Sei X stetig, zentriert, adaptiert, ~~mit~~ $\langle X\rangle_t < \infty$, $\forall t \ge 0$, und mit unabhängige Zuwächse. Dann ist $X \in \mathcal{M}$ und

$$\langle X\rangle_t = \mathbb{E}((X_t-X_0)^2) \text{ f.s.}$$

In der Tat, $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\underbrace{X_t - X_s}_{\text{unab. von } \mathcal{F}_s} \mid \mathcal{F}_s) + X_s$

$$= \underbrace{\mathbb{E}(X_t-X_s)}_{\substack{=0 \\ \text{weil}}} + X_s$$

Beispiel: Sei X stetig, adaptiert, quadrat-integrierbar und mit unabhängigen zentrierten Zuwächse.

Dann, $X \in \mathcal{M}$ und

$$\langle X \rangle_t = Var(X_t - X_0) = \mathbb{E}\left((X_t - X_0)^2\right) f.s.$$

In der Tat, · $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty \ \forall t \geq 0$ weil sogar $\mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty, \forall t \geq 0$

und · $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \underset{s<t}{=} \mathbb{E}(X_t - X_s | \mathcal{F}_s) + X_s$

$$\overset{\text{unab. Zuw.}}{=} \mathbb{E}(X_t - X_s) + X_s = X_s.$$

zentriert

· $\mathbb{E}\left(X_t^2 - X_0^2 - \mathbb{E}(X_t - X_0)^2\right) =$

$(X_t - X_0)^2 =$
$= X_t^2 - X_0^2 - 2X_0(X_t - X_0)$

$$= 2\mathbb{E}\big(\underbrace{X_0(X_t - X_0)}_{\substack{\text{Mart} \\ \text{(Beweis Lem 5.11(c))}}}\big) = 2\mathbb{E}(X_0(X_t - X_0)) = 0, \ \forall t \geq 0.$$

$\Rightarrow X_t^2 - X_0^2 - \mathbb{E}(X_t - X_0)^2$ ist ein Martingal,

d.h., $\langle X \rangle_t = \mathbb{E}(X_t - X_0)^2$.

. Jetzt schauen wir, dass die zwei definitionen sind in einer Sinn identisch.

Def. 5.12) Für eine Partition $\Delta = \{t_0, t_1, \dots\}$ mit $t_k \nearrow \infty$ und $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots$, und ein Stoch. prozess M, die quadratische Variation von M auf Δ ist definiert durch:

$$Q_t^\Delta = \sum_{k=1}^{\infty} | M_{t_k \wedge t} - M_{t_{k-1} \wedge t} |^2.$$

· $\|\Delta\| := \sup_k |t_k - t_{k-1}|$ ist die Feinheit von Δ.

Prop 5.13) Seien $M \in \mathcal{M}_{loc}$ und $t \geq 0$.

Dann gilt:

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} Q_t^\Delta = \langle M \rangle_t \quad \mathbb{P}\text{-stochastisch}$$

(d.h., $\forall \varepsilon > 0, \eta > 0, t \geq 0$, $\exists \delta > 0$ s.d.

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |Q_s^\Delta - \langle M \rangle_s| > \varepsilon \right) < \eta$$

für alle Partitionen Δ mit $\|\Delta\| \leq \delta$.)

Beweis: . $M \in \mathcal{M}_{loc}$ und $t \geq 0$ fest, und $\Delta = \{t_0, t_1, \dots\}$ eine beliebige Partition mit $\|\Delta\| \leq \delta$.

ⓐ Fall von M und $\langle M \rangle$ beschränkt.

. Sei
$$\begin{cases} a_k^{(1)} = (M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2 \\ a_k^{(2)} = \langle M \rangle_{t_{k+1}} - \langle M \rangle_{t_k} \\ b_k = a_k^{(1)} - a_k^{(2)}. \end{cases}$$

Mit diesen Notationen
$$\Rightarrow \begin{cases} A_n^{(1)} := \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(1)} = Q_{t_n}^\Delta(M) \\ A_n^{(2)} := \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(2)} = \langle M \rangle_{t_n}, \text{ s.d} \\ .B_n := A_n^{(1)} - A_n^{(2)} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k = Q_{t_n}^\Delta(M) - \langle M \rangle_{t_n} \end{cases}$$

. Wir werden Lemma 5.8 benutzen. Dazu, sei $\mathcal{F}_n := \sigma(M_{t_{k+1}}, k \leq n)$. Dann, $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}$ sind $\mathcal{F}_n$-messbar, und $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}$ sind $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar.

. Aber M und $\langle M \rangle$ sind gleichmässig stetig auf $[0, t]$, so

$$W(\delta) := \sup_{\substack{0 \leq s \leq t \\ 0 \leq \varepsilon \leq \delta}} \left(|M_{s+\varepsilon} - M_s|^2 + |\langle M \rangle_{s+\varepsilon} - \langle M \rangle_s| \right) \to 0,$$

fast sicher als $\delta \to 0$, und in L^2 weil sind beschränkt.

. Zeigen wir: $|\mathbb{E}(B_\infty - B_n | \mathcal{F}_n)| \leq \mathbb{E}(W(\delta)|\mathcal{F}_n)$:

$\cdot\, B_\infty - B_n = \sum_{k \geq n} b_k$ und $\mathbb{E}(b_k|\mathcal{F}_n) = 0$ für $k > n$,

weil b_k: unab. von $\mathcal{F}_n$ und $\mathbb{E}(b_k) = 0$ (weil $(M_{t_k})_{k\geq 1}$ Martingal + Rechnung im vorherigen Beispiel).

$$\Rightarrow |\mathbb{E}(B_\infty - B_n|\mathcal{F}_n)| = |\mathbb{E}(b_n|\mathcal{F}_n)| \overset{b_n\ \mathcal{F}_n\text{-messbar}}{=} |b_n| \leq a_n^{(1)} + a_n^{(2)}$$

$$= \mathbb{E}(a_n^{(1)} + a_n^{(2)} | \mathcal{F}_n) \leq \mathbb{E}(W(\delta)|\mathcal{F}_n).$$

$$\text{Lemma 5.8)} \Rightarrow \mathbb{E}\left(\sup_n B_n^2\right) \leq \tilde{c}\cdot\left(\mathbb{E}(W(\delta)^2) + \mathbb{E}(W(\delta)^2)^{1/2}\right) \xrightarrow[\delta\to\infty]{} 0.$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t} |Q_s^\Delta(M) - \langle M\rangle_s|^2\right) \leq$$

$$\overset{|a-b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2}{\leq} 2\cdot\mathbb{E}\left(\sup_n B_n^2\right) + 2\cdot\mathbb{E}(W(\delta)^2) \xrightarrow[\delta\to\infty]{} 0.$$

Deshalb, für M und $\langle M\rangle$ beschränkt, $Q_s^\Delta(M)$ konvergiert, gleichmässig auf $s\in[0,t]$, nach $\langle M\rangle_s$ in L^2 und stochastische Konvergenz.

b) ~~Fall~~ Fall M oder $\langle M\rangle$ nicht beschränkt:

. Sei $T_n := \inf\{t \geq 0 \,|\, |M_t| > n \text{ oder } \langle M\rangle_t > n\}$.

$$\text{Dann, } \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} |Q_s^\Delta(M) - \langle M\rangle_s| > \varepsilon\right) \leq$$

$$\leq \underbrace{\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} |Q_s^\Delta(M^{T_n}) - \langle M^{T_n}\rangle_s| > \varepsilon\right)}_{\text{(2) nehme } n\gg 1 \text{ s.d. (1) gilt, dann für } \|\Delta\| \text{ klein genug ist das } \leq \gamma/2} + \underbrace{\mathbb{P}(T_n < t)}_{\text{(1) } < \frac{\gamma}{2} \text{ für } n \text{ gross genug}}$$

#.

Korollar 5.14) Seien $M, N \in \mathcal{M}_{loc}$, $t \geq 0$ fest.

Dann,

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} Q_t^{\Delta}(M,N) = \langle M,N \rangle_t \ \text{P-stochastisch},$$

wobei $Q_t^{\Delta}(M,N) := \sum_{t_k \in \Delta} (M_{t_{k+1} \wedge t} - M_{t_k \wedge t}) \cdot$

$$\cdot (N_{t_{k+1} \wedge t} - N_{t_k \wedge t}).$$

. Wenn die quadratische Variation, die eine wachsende (bzgl. Zeit) Funktion ist, bleibt für eine Weile konstant, dann muss der Prozess konstant sein.

Lemma 5.15) ⓐ Für fast alle $\omega \in \Omega$, $\forall a < b$,

$$\langle M \rangle_a(\omega) = \langle M \rangle_b(\omega) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M_t(\omega) = M_a(\omega) \text{ für alle } t \in [a,b].$$

ⓑ Für fast alle $\omega \in \Omega$ s.d. $\langle M \rangle_\infty(\omega) = \sup_{t \geq 0} \langle M \rangle_t(\omega) < \infty$,

es gilt: $\lim_{t \to \infty} M_t(\omega)$ existiert und ist endlich.

Beweis: Übungen. #

. Jetzt schauen wir die Semimartingale an.

. Ein Semimartingal $X = M + A$ mit $M \in \mathcal{M}_{loc}, A \in \mathcal{A}_0$.

Def. 5.16) Seien $X, \tilde{X} \in \mathcal{S}$ mit $X = M+A$, $\tilde{X} = \tilde{M} + \tilde{A}$
wobei $M, \tilde{M} \in \mathcal{M}_{loc}$, $A, \tilde{A} \in \mathcal{A}_0$.
Dann, definiert man
$$\langle X, \tilde{X} \rangle := \langle M, \tilde{M} \rangle \quad \text{und} \quad \langle X \rangle := \langle M \rangle.$$

. Diese Definition ist sinnvoll, wegen das folgende Thm.

Thm. 5.17) Seien $X, \tilde{X} \in \mathcal{S}$, $t \geq 0$. Dann,
$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} Q_t^\Delta(X, \tilde{X}) = \langle X, \tilde{X} \rangle_t \quad , \mathbb{P}\text{-stochastisch.}$$
$$(= \langle M, \tilde{M} \rangle_t).$$

Beweis: Zu zeigen: $Q_t^\Delta(M, A) \to 0$ und $Q_t^\Delta(A,A) \to 0$
wenn $\|\Delta\| \to 0$, $M \in \mathcal{M}_{loc}$, $A \in \mathcal{A}_0$.

$$\cdot \left| Q_t^\Delta(M,A) \right| = \left| \sum_{t_k \in \Delta} (M_{t_{k+1} \wedge t} - M_{t_k \wedge t})(A_{t_{k+1} \wedge t} - A_{t_k \wedge t}) \right|$$
$$\leq \sup_{t_k \in \Delta} |M_{t_{k+1} \wedge t} - M_{t_k \wedge t}| \cdot \underbrace{\sum_{t_k \in \Delta} |A_{t_{k+1} \wedge t} - A_{t_k \wedge t}|}_{\leq S_t^1(A) < \infty}$$
$$\xrightarrow[\|\Delta\| \to 0]{} 0, \text{ weil}$$
M ist gleichmässig stetig auf $[a, t]$ und $S_t^1(A) < \infty$.

. Für $|Q_t^\Delta(A,A)|$ ist analog. #

Korollar 5.18) Seien $X, \tilde{X} \in \mathcal{S}$ und $t \geq 0$.
$$\text{Dann } \langle X, \tilde{X} \rangle_t \leq (\langle X \rangle_t \langle \tilde{X} \rangle_t)^{1/2}$$
$$\leq \tfrac{1}{2} (\langle X \rangle_t + \langle \tilde{X} \rangle_t).$$

Beweis: Cauchy-Schwarz + $(a \cdot b)^{1/2} \leq \frac{a+b}{2}$. #

5.4) L^2-beschränkte Martingale

Def. 5.19) Der Raum der Stetigen L^2-beschränkten Martingale ist:

$$H^2 := \{ M \in \mathcal{M} \mid \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}(M_t^2) < \infty \}.$$

Beispiel: Sei $T \in \mathbb{R}_+$ eine Konstante, [redacted].
Und $(B_t)_{t \geq 0}$ eine 1-dim. (standard) B.B.
$\Rightarrow (B_{T \wedge t})_{t \geq 0}$ ist ein [redacted] stetiges Martingal mit $\mathbb{E}(B_{T \wedge t}^2) \leq T, \ \forall t \geq 0$, so [redacted] ist in H^2.

Prop. 5.20) ⓐ H^2 ist ein Hilbert-raum bzgl. der Norm

$$\| M \|_{H^2} := \left(\mathbb{E}(M_\infty^2) \right)^{1/2} = \lim_{t \to \infty} \left(\mathbb{E}(M_t^2) \right)^{1/2}$$

ⓑ Äquivalente Norm:

$$\| M_\infty^* \|_2 = \left(\mathbb{E} \left(\sup_{t \geq 0} |M_t^2| \right) \right)^{1/2}$$

ⓒ Für $M \in H_0^2 := \{ X \in H^2 \mid X_0 = 0 \}$, gilt

$$\| M \|_{H^2} = \left(\mathbb{E}(\langle M \rangle_\infty) \right)^{1/2}.$$

Beweis: [redacted]. Norm-Eigenschaften: selber checken.

- Assoziierter Skalar Produkt:

$$(M, N)_{H^2} = \frac{1}{4} \left(\| M + N \|_{H^2}^2 - \| M - N \|_{H^2}^2 \right).$$

- $M \in H^2 \Rightarrow \mathbb{E}(M_\infty^{*2}) \underset{\text{Doob}}{=} 4 \cdot \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}(M_t^2) < \infty$, d.h.,

$$M_\infty^* = \sup_{t \geq 0} |M_t| \in L^2. \ (\Rightarrow L^1 \text{ auch}).$$

. Wegen Thm 4.13(d), da M Martingal ist,

$$\exists\, M_\infty \in L^1 \text{ s.d. } M_t = \mathbb{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_t).$$

. Schauen wir (b) und $M_\infty \in L^2$:

$$\|M\|^2_{H^2} = \mathbb{E}(M_\infty^2) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(M_t^2)$$

$$\overset{\text{subm.}}{=} \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}(M_t^2)$$

$$\leq \mathbb{E}\Big(\sup_{t\geq 0} M_t^2\Big) = \mathbb{E}(M_\infty^{*2})$$

$$\underset{\text{Doob}}{\leq} 4 \cdot \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}(M_t^2) = 4\cdot \|M\|^2_{H^2} < \infty.$$

. Ist H^2 Vollständig?

. Seien $M^n, M^m \in H^2$ mit $\|M^n - M^m\|_{H^2} \to 0$ für $n,m\to\infty$.

$$\Rightarrow \exists\, M^n_\infty, M^m_\infty \in L^2 \text{ s.d. } M^n_t = \mathbb{E}(M^n_\infty \mid \mathcal{F}_t)$$
$$M^m_t = \mathbb{E}(M^m_\infty \mid \mathcal{F}_t).$$

. Im L^2-norm: $\|M^n_\infty - M^m_\infty\|_{L^2} = \|M^n - M^m\|_{H^2} \longrightarrow 0$,

So, wegen Vollständigkeit von L^2,

$$\exists\, M_\infty \in L^2 \text{ s.d. } M^n_\infty \xrightarrow{n\to\infty} M_\infty \text{ in } L^2.$$

Definiere: $M_t := \mathbb{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_t)$. Das ist ein Martingal und

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{t\geq 0} |M^n_t - M_t|^2\Big) \underset{\text{Doob}}{\leq} 4\cdot \mathbb{E}(|M^n_\infty - M_\infty|^2)$$

$$= 4\cdot \|M^n - M\|^2_{H^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(Lemma 2.7) $\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(n_k)_k$ s.d.

$$\sup_{t\geq 0} |M^{n_k}_t - M_t| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \text{ f.s.}$$

uniform stetig auf Teilfolge $\Rightarrow$ $t \mapsto M_t$ ist f.s. stetig

$\Rightarrow M \in \mathcal{M}$ (stetige Martingale) und $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}(M_t^2) = \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{F}_t)^2\right)$

$\leq \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(M_\infty^2|\mathcal{F}_t)\right) = \mathbb{E}(M_\infty^2) < \infty.$

$\Rightarrow$ ist $M \in H^2$.

· © letzlich, aus der Def. von $\langle M\rangle_t$,

$M_t^2 - M_0^2 - \langle M\rangle_t$ ist ein Mart.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(M_t^2) - \underbrace{\mathbb{E}(M_0^2)}_{\substack{=0 \\ \text{für } M\in H_0^2}} - \mathbb{E}(\langle M\rangle_t) = \mathbb{E}(\langle M\rangle_0) = 0.$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbb{E}(M_\infty^2)} = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(M_t^2) \underset{M_0=0}{=} \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(\langle M\rangle_t)$$

$$\underset{\substack{\text{Mon.}\uparrow \\ \text{Conv.} \\ \text{weil wachsend}}}{=} \underline{\mathbb{E}(\langle M\rangle_\infty)}.$$

#

<u>Beispiel:</u> Sei $M_t = B_{T\wedge t}$, T gegeben.

$$\Rightarrow \|M\|_{H^2}^2 \begin{cases} = \mathbb{E}(B_{\infty\wedge T}^2) = \mathbb{E}(B_T^2) = T. \\ = \mathbb{E}(\langle B_{T\wedge t}\rangle_\infty) = \mathbb{E}(\langle B\rangle_T) = T. \end{cases}$$

---

6) Stochastische Integration.

6.1) Lebesgue-Stieltjes-Integral (für Funktionen)

.. Das ist Integration bzgl. Funktionen statt Lebesgue.

. Riemann:

. Sei $\Delta_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$.

Riemann Integral:

$$\lim_{\|\Delta_n\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \,, \quad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}). \quad (*)$$

. Riemann-Stieltjes: gegeben eine Funktion g,

$$\lim_{\|\Delta_n\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big) \,, \quad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}). \quad (**)$$

. Wenn f ist stetig, dann $(*)$ existiert, aber $(**)$ existiert z.B. wenn g ist stetig und hat endliche Variation.

. Lebesgue-Stieltjes:

. **Prop 6.1)** Sei $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ rechtsstetig. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

ⓐ g ist von endlicher Variation, d.h., $\forall t \geq 0$

$$S_t(g) := \sup_{\substack{0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq t \\ n \in \mathbb{N}}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} |g(t_{k+1}) - g(t_k)| \right\} < \infty,$$

ⓑ $\exists\, g_1, g_2$ rechtsstetig und wachsend s.d. $g = g_1 - g_2$,

ⓒ $\exists$ (signiertes) Radon-Maß μ^g auf $\mathbb{R}_+$ mit

$$\boxed{\mu^g([0,t]) = g(t) \quad, \forall t \geq 0.}$$

[Radon-Maß ≡ Borel-Maß die beschränkt auf Kompakte Menge ist].

Beweis: ⓐ ⇔ ⓑ ist analogue zur Lemma 5.2)

ⓐ, ⓑ ⇔ ⓒ

(⇒) O.B.d.A., sei g wachsend, rechtsstetig, mit $S_t(g) < \infty$, $g(0) = 0$.

$\Rightarrow \mu([0,t]) := g(t) \geq 0$ ist ein Radon-Maß auf $\mathbb{R}_+$

(⇐) Umgekehrt, für ein positives Radon-Maß μ auf $\mathbb{R}_+$:

$t \longmapsto \mu([0,t])$ ist rechtsstetig und wachsend

und $\Rightarrow g(t) := \mu([0,t])$. #

Damit definiert man das Lebesgue-Stieltjes Integral.

Def 6.2) Sei $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ rechtsstetig, von endlicher Variation und $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt (und Borel-meßbar).

Dann ist das Lebesgue-Stieltjes Integral von f bzgl. g definiert durch

$$(*) \quad \int_{(0,t]} f(s)\, \mu^g(ds), \quad \text{wobei } \mu^g = \text{signiertes Radon-Maß zu } g \text{ ist.}$$

Notationen: $(*) \equiv \int_0^t f\, dg \equiv \int_0^t f(s)\, dg(s) \equiv \int_0^t f(s)\, g(ds)$.

Bemerkung: ⓐ Für $g \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $dg(s) = g'(s)\, ds$,

s.d. Leb-Stieltjes-Integral

$$\int_0^t f(s)\, dg(s)$$

ist ein gewöhnliches Leb-Integral

$$\int_0^t f(s)\, g'(s)\, ds \quad \text{mit Dichte } g'.$$

ⓑ Für g, h stetig und von endlicher Variation,

$$d(gh)(s) = g(s)\, dh(s) + h(s)\, dg(s).$$

Prop. 6.3) Sei g rechtsstetig und wachsend, f linksstetig und lokal beschränkt

Dann $\forall t>0$,

$$\int_0^t f\,dg = \lim_{\|\Delta\|\to 0} I_t^{\Delta}(f,g), \text{ wobei}$$

$$I_t^{\Delta}(f,g) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\left(g(t_{k+1})-g(t_k)\right), \text{ und}$$

Δ eine Partition von $[0,t]$: $t_0=0<t_1<\dots<t_n=t$.

Bem.: Falls f stetig ist, kann man $f(t_k)$ durch $f(t_{k+1})$ ersetzen.

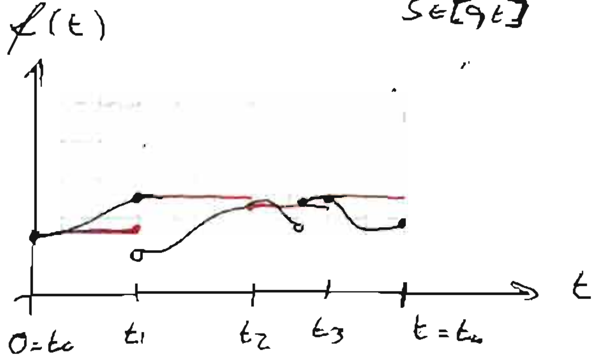
Beweis: Sei $f_\Delta := \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\cdot \mathbb{1}_{(t_k,t_{k+1}]}$ wobei

Δ ist eine Partition von $[0,t]$ mit

$0=t_0<t_1<\dots<t_n=t$.

Da f ist lokal beschränkt, ist

$$\sup_{s\in[0,t]} |f(s)| = C_t < \infty.$$



. Dann, $\lim_{\|\Delta\|\to 0} f_\Delta(s) = f(s)$, $\forall s\in(0,t]$, wegen Linksstetigkeit von f.

$\Rightarrow |f_\Delta(s)| \le C_t$, $\forall s\in(0,t]$.

$$\Rightarrow I_t^{\Delta}(f,g) = \int_{(0,t]} f_\Delta(s)\,\mu^g(ds)$$

$$\xrightarrow[\|\Delta\|\to 0]{} \int_{(0,t]} f(s)\,\mu^g(ds) \equiv \int_0^t f\,ds. \quad \#$$

6.2) Stochastische Integral (für endlicher-Variation Integratoren).

. Im Analogie mit dem Lebesgue-Stieltjes-Integral, wir können definieren Integrale

$$\int_0^t X_s \, dA_s$$

für $A \in \mathcal{A}$, $\boxed{X \in \mathcal{B} := \{ X \mid \text{adaptiert, linksstetig, \underline{pfadweise lokal beschränkt}} \}}$.

<u>Def. 6.4)</u> Für $A \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{B}$ heisst die <u>pfadweise definierte Zufallsvariable</u>

$$\Omega \longrightarrow (X \cdot A)_t := \int_0^t X_s \, dA_s$$

$$\omega \longmapsto \int_0^t X_s(\omega) \, dA_s(\omega)$$

stochastische Integral von X bzgl. A auf $[0,t]$.

(Notationen:)
- X heisst der Integrand
- A heisst der Integrator.
- $(X \cdot A) = ((X \cdot A)_t)_{t \geq 0}$ heisst unbestimmtes stochastisches Integral.

. Hier sind einige Eigenschaften:

<u>Thm. 6.5)</u> Für $A \in \mathcal{A}$, $X, Y \in \mathcal{B}$, es gilt:

ⓐ $X \cdot A \in \mathcal{A}_0$,

ⓑ $X \cdot A$ ist bilinear in A und X,

ⓒ für alle Stoppzeiten T, $(X \cdot A)^T = X \cdot A^T$,

ⓓ $Y \cdot (X \cdot A) = (Y \cdot X) \cdot A$ (Assoziativität).

Beweis: ⓐ · $(X \bullet A)_0 = 0$ ist klar.

· <u>Stetigkeit:</u> $t \mapsto \int_0^t X_s \, dA_s$ ist pfadweise stetig, weil A ist stetig.

· <u>Adaptiertheit:</u>

$$\int_0^t X_s \, dA_s = \lim_{n\to\infty} I_t^{\Delta_n}(X, A) \in \mathcal{F}_t,$$

für eine Folge von Partitionen Δ_n mit $\|\Delta_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

· <u>Endliche Variation:</u> $S_t((X \bullet A)(\omega)) \leq \sup_{0 \leq s \leq t} \|X_s(\omega)\| \cdot S_t^1(A(\omega))$

$< \infty$.

ⓑ klar.

ⓒ
$$(X \bullet A)^T_{(\omega)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} X_{t_k \wedge T(\omega)}(\omega) \left(A^{(\omega)}_{t_{k+1} \wedge T(\omega)} - A^{(\omega)}_{t_k \wedge T(\omega)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} X_{t_k}(\omega) \left(A^{(\omega)}_{t_{k+1} \wedge T(\omega)} - A^{(\omega)}_{t_k \wedge T(\omega)}\right)$$

$$= (X \bullet A^T)(\omega).$$

ⓓ
$$(Y \bullet (X \bullet A))_t = \int_0^t Y_s \, (X \bullet A)(ds)$$

$$\cancel{= \int_0^t Y_s \left(\int_s^{s+ds} X_{\tilde{s}} \, dA_{\tilde{s}} - X_s \, dA_s\right) + \int_0^t Y_s X_s \, dA_s}$$

$$= \int_0^t Y_s \underbrace{d(X \bullet A)(s)}_{\overset{ⓐ}{=} X_s \, dA_s \ (\text{Stetigkeit})} = ((Y \cdot X) \bullet A)_t \ \#$$

6.3) Das Itô-Integral

6.3.1) Problematik:

. Jetzt wollen wir das folgende Objekt definieren:

$$(X\cdot B)_t = \int_0^t X_s \, dB_s \quad \text{wobei } B \text{ ein B.B ist.}$$

. Aus Calculus: Wenn $f, g \in C^1$, dann

$$f(g(t)) = f(g(0)) + \int_0^t f'(g(s))\, g'(s)\, ds.$$

. Die B.B. ist f.s. nicht-ableitbar, deshalb können wir nicht einfach B_t statt $g(t)$ nehmen.

. Wir werden sehen, dass eine ähnliche Formel gilt:

$$f(B_t) = f(B_0) + \underbrace{\int_0^t f'(B_s)\, dB_s}_{\text{als Itô-Integral}} + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\, ds,$$

wenn $f \in C^2$.

. Frage: Was ist "dB_s"?

. Versuch: . Sei $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{f}(B_{s_k})(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$, $s_k \in [t_k, t_{k+1})$,
wobei $[0,t]$ ist partitioniert als $[\underset{0}{t_0}, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots [t_{n-1}, \underset{t}{t_n}]$

. Das Pfadweise (i.e., in Ω punktweise) Limes von S_n existiert nicht, weil Brownsche Trajektorien sind f.s. von unbeschränkten Variation.

$\Rightarrow$ Kann man nicht $\boxed{\int dB_s}$ als Stieltjes Integral gesehen werden.

. Aber: S_n hat ein L^2-limes.

. Trotzdem gibt ein weiteres Problem. Dafür betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel 6.6) Sei B eine standard 1-dim. B.B.,

$t_k := \frac{t \cdot k}{n}$, $0 \le k \le n$.

Dann,
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k} \cdot (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) = \frac{B_t^2 - t^2}{2} \text{ in } L^2,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_{k+1}} \cdot (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) = \frac{B_t^2 + t^2}{2} \text{ in } L^2.$$

· In der Tat,
$$a(b-a) = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2) - \tfrac{1}{2}(b-a)^2$$
$$b(b-a) = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2) + \tfrac{1}{2}(b-a)^2.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{2}(B_{t_{k+1}}^2 - B_{t_k}^2)}_{=\frac{1}{2}B_t^2} - \tfrac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2}_{\xrightarrow{n\to\infty} t}$$

wegen Lemma 2.6.

⇒ Der Limes hängt von die Wahl von $s_k \in [t_k, t_{k+1})$ ab.

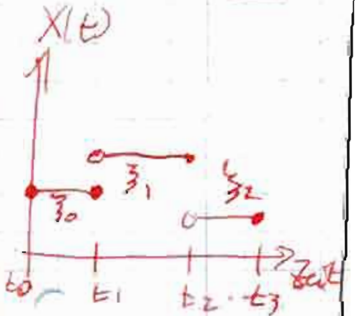
. Die Itô-Wahl ist $s_k = t_k$, so dass der Integrand ist an der "standard" Filtrierung adaptiert. ("Finanz-weise" mehr natürlich).

· ~~Stratonovic Wahl~~: $s_k = \frac{t_k + t_{k+1}}{2}$ ⇒ "$\int_0^t B_s \, dB_s = \frac{1}{2} B_t^2$": physikalisch mehr Natürlich)

6.3.2) Itô-Integral für Elementarprozesse.

. Wir definieren zuerst Elementarprozesse.

Def. 6.7) $\boxed{X \in \mathcal{E}}$



. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ ein standard filtrierte W-raum.

$X: \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ ist ein Elementarprozess falls:

· ∃ eine Folge $0 = t_0 < t_1 < \dots \nearrow \infty$,

· ∃ eine Folge von Zufallsvariablen $\{\xi_n\}_{n \ge 0}$, die gleichmässig beschränkt sind (d.h., ∃ $C > 0$ s.d. $\sup_{n\ge 0} |\xi_n(\omega)| \le C$, $\forall \omega \in \Omega$),

· ξ_n ist $\mathcal{F}_{t_n}$-messbar, und

$$X_t(\omega) = \xi_0(\omega) \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{n\ge 0} \xi_n(\omega) \mathbb{1}_{(t_n, t_{n+1}]}(t), \quad 0 \le t < \infty, \ \omega \in \Omega$$

Itô-Integral

Def. 6.8) Sei $X \in \mathcal{E}$ und $M \in H^2$. Dann ist das <u>stochastische Integral</u> von X bzgl. M <u>pfadweise definiert</u> durch

$$\int_0^t X_s \, dM_s \equiv (X \cdot M)_t := \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \left(M_{t_{k+1} \wedge t} - M_{t_k \wedge t} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \left(M_{t_{k+1} \wedge t} - M_{t_k \wedge t} \right) + \xi_n \cdot (M_t - M_{t_n})$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ ist die einzige Zahl s.d. $t_n \leq t < t_{n+1}$.

. <u>Bem.:</u> Die gleiche Def. gilt für $M \in \mathcal{S}$, aber den Teil mit endlichen Variation ist einfach den Lebesgue-Stieltjes stochastik Integral.

. Eine sehr wichtige Eigenschaft ist die <u>Itô-Isometrie</u>

Thm. 6.9) Sei $M \in H^2$ und $X \in \mathcal{E}$. Dann gilt:

ⓐ $X \cdot M \in H_0^2$,

ⓑ $\langle X \cdot M \rangle_t = \int_0^t X_s^2 \, d\langle M \rangle_s = (X^2 \cdot \langle M \rangle)_t$ (als Prozess).

ⓒ <u>Isometrie:</u>

$$\| X \cdot M \|_{H^2}^2 \equiv \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty X_s \, dM_s \right)^2 \right]$$

$$= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty X_s^2 \, d\langle M \rangle_s \right) \equiv \| X \|^2_{L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \langle M \rangle \otimes \mathbb{P})}$$

. <u>Bemerkung:</u> . Für den gestoppte Prozess zur Zeit t, die Isometrie ist:

$$\| (X \cdot M) \|_{L^2(\Omega, \mathbb{P})} = \| X \|_{L^2(\Omega \times [0,t], \mathbb{P} \otimes \langle M \rangle)}, \text{ d.h.,}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X_s \, dM_s \right)^2 \right] = \mathbb{E}\left(\int_0^t d\langle M \rangle_s \, X_s^2 \right).$$

Korollar 6.10) Für $M=(B_{t\wedge s})_{s\geq 0}$, $t \geq 0$ eine Konstante,

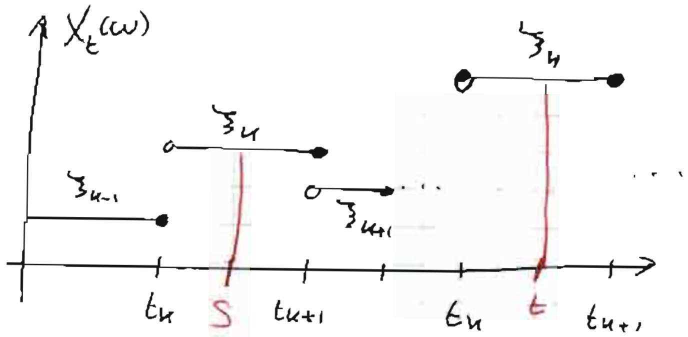
ⓐ $X \cdot B^t \in H_0^2$,

ⓑ $\langle X \cdot B \rangle_t = \int_0^t X_s^2 \, ds$ (als Prozess).

ⓒ $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X_s \, dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^t ds \, X_s^2\right)$.

Beweis von Thm. 6.9)

ⓐ



- $X \cdot M$ adaptiert, weil $(X \cdot M)_t \in \mathcal{F}_t$, da $\xi_k \in \mathcal{F}_{t_k} \subset \mathcal{F}_t$.
- $(X \cdot M)_0 = 0$ ✓.
- Stetigkeit und Martingal: Sei $s \in [t_k, t_{k+1})$ < $t \in [t_n, t_{n+1})$. Dann,

$$(X \cdot M)_t = (X \cdot M)_s + \xi_k \cdot (M_{t_{k+1}} - M_s) + \sum_{l=k+1}^{n-1} \xi_l \cdot (M_{t_{l+1}} - M_{t_l}) + \xi_n (M_t - M_{t_n}).$$

$\Rightarrow$ Stetigkeit folgt aus Stetigkeit von M (da ξ_k gleichmäßig beschränkt).

- Martingal-Eigenschaft:

$$\mathbb{E}((X \cdot M)_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\overbrace{(X \cdot M)_s}^{\mathcal{F}_s\text{-messbar}} \mid \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(\overbrace{\xi_k}^{\mathcal{F}_s\text{-messbar}} \cdot (M_{t_{k+1}} - M_s) \mid \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(\xi_n (M_t - M_{t_n}) \mid \mathcal{F}_s)$$
$$+ \sum_{l=k+1}^{n-1} \mathbb{E}(1 \cdot \xi_l \cdot (M_{t_{l+1}} - M_{t_l}) \mid \mathcal{F}_s)$$

$$= (X \cdot M)_s + \xi_k \cdot \overbrace{\mathbb{E}\left(M_{t_{k+1}} - M_s \mid \mathcal{F}_s\right)}^{=0 \text{ wegen } M \text{ Martingal}}$$

$$+ \mathbb{E}\Big(\xi_n \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left(M_t - M_{t_n} \mid \mathcal{F}_{t_n}\right)}_{=0} \Big| \mathcal{F}_s\Big)$$

$$+ \sum_{e=k+1}^{n-1} \mathbb{E}\Big(\xi_e \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left(M_{t_{e+1}} - M_{t_e} \mid \mathcal{F}_{t_e}\right)}_{=0} \Big| \mathcal{F}_s\Big)$$

$$= (X \cdot M)_s .$$

(b) O.B.d.A., nehme $s = t_k$; $t = t_{n+1}$ (sonst kann man $\{t_i\}$ mit die zwei Punkte s und t ergänzen).

Zu zeigen: $\mathbb{E}\left((X \cdot M)_t^2 - \int_0^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u \,\Big|\, \mathcal{F}_s\right) \overset{s<t}{=\!=}$

$$= (X \cdot M)_s^2 - \int_0^s X_u^2 \, d\langle M\rangle_u, \text{ d.h., ist}$$

ein Martingal. $\underset{\text{Thm } 5.10)}{\Rightarrow}$ $\langle X \cdot M\rangle_t = \int_0^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u$

$$\equiv (X^2 \cdot \langle M\rangle)_t .$$

. $\mathbb{E}\left((X \cdot M)_t^2 - (X \cdot M)_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right) =$

$$= \mathbb{E}\left(\left[(X \cdot M)_t - (X \cdot M)_s\right]^2 \mid \mathcal{F}_s\right) +$$

$$+ 2 \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left((X \cdot M)_s \left((X \cdot M)_t - (X \cdot M)_s\right) \mid \mathcal{F}_s\right)}_{\overset{(a)}{=} (X \cdot M)_s \mathbb{E}\left((X \cdot M)_t - (X \cdot M)_s \mid \mathcal{F}_s\right) = 0.}$$

$$= \mathbb{E}\left(\left[\sum_{e=k}^{n} \xi_e \left(M_{t_{e+1}} - M_{t_e}\right)\right]^2 \Big| \mathcal{F}_s\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{e=k}^{n} \xi_e^2 \left(M_{t_{e+1}} - M_{t_e}\right)^2 \Big| \mathcal{F}_s\right)$$

$$+ 2 \cdot \mathbb{E}\left(\sum_{\substack{j<e, \\ j,e \in [k,n]}} \xi_j \xi_e \left(M_{t_{e+1}} - M_{t_e}\right)\left(M_{t_{j+1}} - M_{t_j}\right) \Big| \mathcal{F}_s\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\int_s^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u \;\Big|\; \mathcal{F}_s \right)$$

$$+ 2 \cdot \mathbb{E}\Big(\sum_{\substack{j<e \\ j,e\in[k,n]}} \xi_j \xi_e (M_{t_{j+1}} - M_{t_j}) \cdot \underbrace{\mathbb{E}(M_{t_{e+1}} - M_{t_e} \mid \mathcal{F}_{t_e})}_{=0;\ \text{Martingal}} \Big| \mathcal{F}_s \Big)$$

$$= \mathbb{E}\left(\int_s^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u \;\Big|\; \mathcal{F}_s \right) \checkmark$$

(c) $\|X\cdot M\|^2_{H^2} \underset{\text{Prop 5.20}}{=} \mathbb{E}(\langle X\cdot M\rangle_\infty) \underset{(b)}{=} \mathbb{E}\left(\int_0^\infty X_u^2 \, d\langle M\rangle_u\right)$. #

. Gleich werden wir das stochastische Integral für allgemeiner Prozesse, die als L^2-Limes von Elementar Prozesse entstehen.

. Aber zuerst kommt eine Identität und Ungleichung.

Prop. 6.11) (Kunita-Watanabe)

. Für $M, N \in H^2$ und $X, Y \in \mathcal{E}$, es gilt:

(Als Prozess) (a) $\langle X\cdot M, Y\cdot N\rangle_t = \int_0^t X_s Y_s \, d\langle M,N\rangle_s = ((XY)\cdot\langle M,N\rangle)_t$

(b) $|\mathbb{E}\langle X\cdot M, Y\cdot N\rangle_\infty| \leq \mathbb{E}\left(\int_0^\infty |X_s||Y_s| \cdot |d\langle M,N\rangle_s|\right)$

$$\leq \left[\mathbb{E}\left(\int_0^\infty X_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right)\right]^{1/2} \left[\mathbb{E}\left(\int_0^\infty Y_s^2 \, d\langle N\rangle_s\right)\right]^{1/2}.$$

~~Beweis: (a) Man muss zeigen, dass~~

~~$(X\cdot M)_t (Y\cdot N)_t - \int_0^t X_u Y_u \, d\langle M,N\rangle_u$ ist ein Martingal.~~

~~Sei $s<t$: $\mathbb{E}\left((X\cdot M)_t (Y\cdot N)_t - (X\cdot M)_s (Y\cdot N)_s \mid \mathcal{F}_s\right) =$~~

Korollar 6.12) Für $M = N = (B_{t\wedge s})_{s\geq 0}$ (B.B.) und $X, Y \in \mathcal{E}$,

ⓐ $$\langle X\cdot B, Y\cdot B\rangle_t = \int_0^t X_s Y_s \cdot ds$$

ⓑ $$\left|\mathbb{E}\langle X\cdot B, Y\cdot B\rangle_\infty\right| \leq \mathbb{E}\left(\int_0^t |X_s|\cdot|Y_s|\,ds\right) \leq \left[\mathbb{E}\left(\int_0^t X_s^2\,ds\right)\right]^{1/2} \cdot \left[\mathbb{E}\left(\int_0^t Y_s^2\,ds\right)\right]^{1/2}.$$

Beweis von Prop. 6.11)

ⓐ Wir zeigen, dass

$$(X\cdot M)_t \cdot (Y\cdot N)_t - \int_0^t X_u Y_u \, d\langle M,N\rangle_u \text{ ist ein Martingal.}$$

Für $s<t$: $$\mathbb{E}\left((X\cdot M)_t (Y\cdot N)_t - (X\cdot M)_s (Y\cdot N)_s \mid \mathcal{F}_s\right) =$$

$$= \mathbb{E}\Big(\big[(X\cdot M)_t - (X\cdot M)_s\big]\cdot\big[(Y\cdot N)_t - (Y\cdot N)_s\big] \mid \mathcal{F}_s\Big)$$

$$\left.\begin{aligned}&+ \mathbb{E}\Big(\big((X\cdot M)_t - (X\cdot M)_s\big)\cdot (Y\cdot N)_s \mid \mathcal{F}_s\Big)\\ &+ \mathbb{E}\Big((X\cdot M)_s \cdot \big((Y\cdot N)_t - (Y\cdot N)_s\big) \mid \mathcal{F}_s\Big)\end{aligned}\right\} \text{+ Martingal} \Rightarrow \equiv 0. \text{ (Thm 6.9 ⓐ)}$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{e=k}^{n} X_{t_e} Y_{t_e} (M_{t_{e+1}} - M_{t_e})(N_{t_{e+1}} - N_{t_e}) \mid \mathcal{F}_s\right)$$

Ähnliche Notationen wie im Thm 6.9 ⓑ
$s = t_k$
$t = t_{n+1}$

$$= \mathbb{E}\left(\int_s^t X_u Y_u \, d\langle M,N\rangle_u \mid \mathcal{F}_s\right) \quad ✓$$

ⓑ Wir verwenden Korollar 5.18.

$$\left|\mathbb{E}\langle X\cdot M, Y\cdot N\rangle_\infty\right| \overset{ⓐ}{\leq}$$

$$\leq \mathbb{E}\left[\langle X\cdot M\rangle_\infty^{1/2} \cdot \langle Y\cdot N\rangle_\infty^{1/2}\right]$$

$$\leq \sqrt{\mathbb{E}(\langle X\cdot M\rangle_\infty)}\sqrt{\mathbb{E}(\langle Y\cdot N\rangle_\infty)} \quad \#$$

6.3.3) Itô-Integral für L^2-limes von $\mathcal{E}$.

. Wir erweitern Itô. Dazu schauen wir was ist $\sigma(\mathcal{E})$.

Def. 6.13) . Die σ-Algebra $\mathcal{P} = \sigma(\mathcal{E})$ auf $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ heisst : <u>vorhersagbare σ-Algebra</u>. Sie ist die kleinste σ-Algebra auf $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, bezüglich der die Abbildungen $(t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$ messbar sind für alle $X \in \mathcal{E}$.

. <u>Ein Prozess X</u> heisst <u>vorhersagbar</u> wenn ist $\mathcal{P}$-messbar.

. Insbesondere, in $\sigma(\mathcal{E})$ sind alle adaptierte stetige Prozesse enthalten:

Prop. 6.14)
$$\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\{X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R},\ \text{adaptiert}, X.\ \text{linksstetig auf } (0,\infty)\})$$
$$= \sigma(\{X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R},\ \text{adaptiert}, X.\ \text{stetig auf } [0,\infty)\}).$$

<u>Beweis</u>: Seien $\sigma_1 \equiv \sigma(\mathcal{E})$,
$\sigma_2 = \sigma(\dots \text{linksstetig})$,
$\sigma_3 = \sigma(\dots \text{stetig}\})$.

. . $\sigma_3 \subset \sigma_2$, weil stetige. $\Rightarrow$ linksstetig.

. $\sigma_2 \subset \sigma_1$, weil alle linksstetige X sind ein $n \to \infty$ Limes von $X^n \in \mathcal{E}$:
$$X^n_t(\omega) = X_0(\omega)\, \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} X_{\frac{k}{n}}(\omega)\, \mathbb{1}_{\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}(t)$$

. $\sigma_1 \subset \sigma_3$; weil alle $X \in \mathcal{E}$ sind ein $n \to \infty$ limes von $X^n \in \sigma_3$:

wir können wählen (d.h., existiert) $f_n \in C(\mathbb{R}_+)$, $|f_n| \le \mathbb{1}_{(0,1+\frac{1}{n}]}$ mit $f_n \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{1}_{(0,1]}$

und ein $g_n \in C(\mathbb{R}_+)$, $|g_n| \leq \mathbb{1}_{[0,1/n]}$ mit $g_n \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{1}_{[0]}$, dann

$$X_t^n = \xi_0 \cdot g_n(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \cdot f_n\left(\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}\right)$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \xi_0 \cdot \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \cdot \mathbb{1}_{(t_k,t_{k+1}]}(t). \qquad \#$$

. Aus Thm. 6.9) können wir erwarten, dass das Itô-Integral wird ~~gut~~ definiert wenn X ist vorhersagbar und $\|X\cdot M\|_{H^2}^2 \underset{\text{Isometrie}}{=} \mathbb{E}\left(\int_0^\infty X_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right) < \infty$ ist.

Def. 6.15)

- Sei M ein (stetiges) Martingal in H^2. Dann $\mathcal{L}^2(M) := \{X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$, vorhersagbar, mit

$$\|X\|_M := \|X\|_{L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\, d\langle M\rangle \otimes dP)} \equiv$$
$$\equiv \sqrt{\mathbb{E}\left(\int_0^\infty X_t^2 \, d\langle M\rangle_t\right)} < \infty \Big\},$$ und

$L^2(M) :=$ Raum der Äquivalenzklassen von $\mathcal{L}^2(M)$ bzgl. $\|\cdot\|_M$.

. Jede $X \in L^2(M)$ ist ein Limes von Elementarprozesse.

Prop. 6.16)

- Sei $X \in L^2(M)$. Dann existiert eine Folge von $X^n \in L^2(M) \cap \mathcal{E}$, $n \geq 1$, s.d.

$$\|X - X^n\|_M^2 \equiv \mathbb{E}\left(\int_0^\infty |X_t - X_t^n|^2 \, d\langle M\rangle_t\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

. Wir zeigen es wenn M eine B.B. in $[0,T]$ ist, d.h. $d\langle M\rangle_t = dt$.

. Die Erweiterung für $d\langle M\rangle_t$ absolut stetig bzgl. dt folgt ohne grosse Schwierigkeiten. Im allgemeiner Fall ist schwieriger (siehe z.B. Lemma 2.7 von Karatzas-Shreve).

. Beweis für B.B.: 3 zukzessive Approximationen.

. Sei B eine B.B. auf $[0,T]$.

1. Schritt:

. Beschränkte pfadweise stetige $Z \in \mathcal{L}^2(B)$.

- Seien $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ Zeiten die eine Partition von $[0,T]$ definieren.

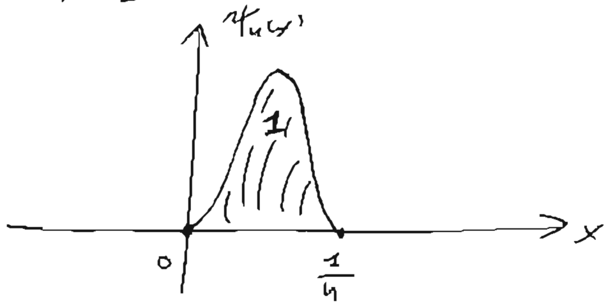
Sei
$$\phi_t^n(\omega) := Z_0(\omega) \cdot \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} Z_{t_k}(\omega) \mathbb{1}_{]t_k, t_{k+1}]}(t).$$

. Dann, wegen Stetigkeit von $t \mapsto Z_t(\omega)$ und
$$\max_{1 \le k \le n-1} |t_{i+1} - t_i| \to 0 \quad , \forall \omega \in \Omega,$$
es gilt:
$$\lim_{n \to \infty} \int_0^T \left(Z_t(\omega) - \phi_t^n(\omega) \right)^2 dt = 0.$$

. Dann, wegen Majorisierte Konvergenz, auch
$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(Z_t(\omega) - \phi_t^n(\omega) \right)^2 dt \right) = 0.$$

.2. Schritt: Beschränkte $Y \in \mathcal{L}^2(B)$.

- Sei $|Y| \le K$. Für jeden n, definiere ψ^n s.d.
$$\begin{cases} \psi^n(x) = 0 & , x \notin [0, 1/n] \\ \int_{-\infty}^{\infty} \psi^n(x)\, dx = 1 & \\ \psi^{(n)}(x) \ge 0 \text{ und stetig.} & \end{cases}$$



· Dann, sei $Z_t^n(\omega) := \int_0^t \psi^n(t-s)\, Y_s(\omega)\, ds.$

$t \mapsto Z_t^n(\omega)$ ist stetig $\forall \omega \in \Omega$ und $|Z_t^n| \leq K$.

· Da $\psi^n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta(t)$, $\forall \omega \in \Omega$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left(Z_t^n(\omega) - Y_t(\omega)\right)^2 dt = 0.$$

. Majorisierte Konvergenz $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(Z_t^n(\omega) - Y_t(\omega)\right)^2 dt\right) = 0.$$

.3. Schritt: Allgemeine $X \in L^2(B)$.

. Sei $X \in L^2(B)$ und definiere:

$$.\; Y_t^n(\omega) := \begin{cases} -n, & X_t(\omega) \leq -n, \\ X_t(\omega), & X_t(\omega) \in (-n, n), \\ n, & X_t(\omega) \geq n. \end{cases}$$

Dann, $$\|X - Y^n\|^2_{L^2(B)} = \mathbb{E}\left(\int_0^T (X_t - Y_t^n)^2 dt\right)$$

$$\leq \mathbb{E}\left(\int_0^T |X_t|^2 \cdot \mathbb{1}_{[|X_t| \geq n]}\, dt\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

wegen Majorisierte Konvergenz, weil $X \in L^2(B)$.

#

. Prop 6.16 zusammen mit Itô-Isometrie (Thm. 6.9 (c)) reichen um das Itô-Integral für $X \in L^2(M)$ zu definieren.

Thm. 6.17) Für alle $X \in L^2(M)$,

$\exists!\ (X \cdot M) \in H_0^2$ mit der Eigenschaft:

, ist $X^n \in \mathcal{E}$ eine Folge s.d.

$$\|X - X^n\|_M \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

dann $\|X \cdot M - X^n \cdot M\|_{H^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, deshalb

$$L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} (X^n \cdot M)_t = (X \cdot M)_t \quad , \quad \text{uniform in } t,$$

. Beweis: Aus Prop 6.16, $\exists$ eine Folge $X^n \in \mathcal{E}$ s.d.

$$\|X - X^n\|_M \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

$\Rightarrow$ Da $X^n - X^m \in \mathcal{E}$, ist $X^n \cdot M - X^m \cdot M \in H_0^2$, deshalb wegen Itô-Isometrie (Thm. 6.9. (c)) für Elementarprozesse,

$$\|X^n \cdot M - X^m \cdot M\|_{H^2} = \|X^n - X^m\|_M \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$$

$$\left(\leq \|X^n - X\|_M + \|X - X^m\|_M \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 \right)$$

. So ist $(X^n \cdot M)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in H^2, der ein Hilbert-Raum ist

$\Rightarrow \exists! (X \cdot M) \in H_0^2$ s.d. $X^n \cdot M \xrightarrow[n\to\infty]{} X \cdot M$ in H^2.

(. $X \cdot M$ ist unabhängig von der Wahl der Folge: sei $\tilde{X}^n$ eine zweite Folge, dann

$$\|\tilde{X}^n \cdot M - X^n \cdot M\|_{H^2} = \|\tilde{X}^n - X^n\|_M \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad).$$

Letztlich: $\mathbb{E}\left(\sup_{t\geq 0} ((X^n \cdot M)_t - (X \cdot M)_t)^2\right) \leq 4 \cdot \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left((X^n \cdot M)_t - (X \cdot M)_t\right)^2$

$$= 4 \cdot \|X^n - X\|_M \xrightarrow{n\to\infty} 0. \quad \#.$$

Bemerkung: Die Abbildung $L^2(M) \to H_0^2$

$$X \longmapsto X \bullet M$$

ist eine Isometrie :

$$\|X\|_M = \|X \bullet M\|_{H^2}.$$

Def. 6.18) Für $X \in L^2(M)$, das Itô-Integral von X bzgl. M ist ~~der~~ einzige Prozess $X \bullet M \in H_0^2$ von Thm. 6.17.

Notation: $(X \bullet M)_t \equiv \int_0^t X_s \, dM_s$

Korollar 6.19) . Prop. 6.11 (Kunita-Watanabe) gilt für $M, N \in H^2$, $X \in L^2(M)$, $Y \in L^2(N)$:

ⓐ $\langle X \bullet M \rangle_t = \int_0^t X_s^2 \, d\langle M \rangle_s = (X^2 \bullet \langle M \rangle)_t$

ⓑ $\langle X \bullet M, Y \bullet N \rangle_t = \int_0^t X_s Y_s \, d\langle M, N \rangle_s = ((XY) \bullet \langle M, N \rangle)_t$

[ⓐ ist partikular Fall von ⓑ].

ⓒ $|\mathbb{E}\langle X \bullet M, Y \bullet N \rangle_t| \leq \mathbb{E}\left(\int_0^t |X_s||Y_s| \, |d\langle M, N \rangle_s|\right)$

$$\leq \sqrt{\mathbb{E}\left(\int_0^t X_s^2 \, d\langle M \rangle_s\right)} \sqrt{\mathbb{E}\left(\int_0^t Y_s^2 \, d\langle N \rangle_s\right)}$$

(Ohne Beweis)

. Einige Eigenschaften von Itô-Integral.

Lemma 6.20) (Assoziativität)

. Sei $X \in L^2(M)$ und $Y \in L^2(X \bullet M)$.

Dann $YX \in L^2(M)$ und

$$Y \bullet (X \bullet M) = (YX) \bullet M.$$

Im Beweis von Lemma 6.20) benutzt man das folgende.

<u>Lemma 6.21)</u> $\forall M \in H^2, X \in L^2(M), \exists! I \in H_0^2$ s.d.

$$\forall N \in H^2, \quad \langle I, N\rangle = X \cdot \langle M, N\rangle,$$

nämlich $I = X \cdot M$.

<u>Beweis:</u> Kor. 6.19) (b) mit $Y \equiv 1$,

$$\Rightarrow \quad \langle X \cdot M, N\rangle = X \cdot \langle M, N\rangle \Rightarrow \text{existenz ok.}$$

<u>Eindeutigkeit</u>: Seien $I, \tilde{I} \in H_0^2$ mit

$$\langle I, N\rangle = \langle \tilde{I}, N\rangle, \quad \forall N \in H^2$$

$$\Rightarrow \langle I - \tilde{I}, N\rangle = 0, \quad \forall N \in H^2$$ (Insbesondere für $N = I - \tilde{I}$)

$$\underset{(\oplus\, I_0 = \tilde{I}_0 = 0)}{\overset{\text{Lemma 5.11 (d)}}{\Longrightarrow}} I = \tilde{I}.$$ #

<u>Beweis von Lemma 6.20)</u> <u>$Y \cdot X \in L^2(M)$</u>

Wegen $\langle X \cdot M\rangle = X^2 \cdot \langle M\rangle$ (Kor 6.19 (a)), und $Y \in L^2(X \cdot M)$, d.h.,

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty Y_t^2 \, d\langle X \cdot M\rangle_t\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty Y_t^2 X_t^2 \, d\langle M\rangle_t\right) < \infty,$$

es folgt $Y \cdot X \in L^2(M)$.

Für alle $N \in H^2$,

$$\langle (YX) \cdot M, N\rangle \underset{\text{Kor 6.19 (b)}}{=\!=\!=} (XY) \cdot \langle M, N\rangle$$

$$\underset{\text{Stieltjes}}{\overset{\text{Assoz.}}{=\!=\!=}} Y \cdot (X \cdot \langle M, N\rangle) \quad \text{Thm 6.5 (d)}$$

$$\overset{\text{Lem 6.21}}{=\!=\!=} Y \cdot \langle X \cdot M, N\rangle$$

$$\overset{\text{Lem 6.21}}{=\!=\!=} \langle Y \cdot (X \cdot M), N\rangle, \quad \forall N \in H^2$$

$\Rightarrow$ wegen Eindeutigkeit #.

Bem.: Symbolisch: $d(Y\cdot(X\cdot M))_t = Y_t\, d(X\cdot M)_t = Y_t X_t\, dM_t$.

Prop. 6.22) Sei $X \in \mathcal{L}^2(M)$ und T eine Stoppzeit.
Dann, $(X\cdot M)^T \overset{\circledast}{=} X\cdot M^T = (X \mathbb{1}_{[0,T]})\cdot M$.

Beweis: Aus Lemma 6.20, weil $M^T = \mathbb{1}_{[0,T]}\cdot M$. #

$\circledast$ Aus Limes von Def. 6.8. ✓

. Letzlich sind einige triviale Eigenschaften:

Lem. 6.23) . Seien $X, Y \in \mathcal{L}^2(M)$, $0 \le s < u < t$. Dann.

ⓐ $\int_s^t X_r\, dM_r = \int_s^u X_r\, dM_r + \int_u^t X_r\, dM_r$ f.s.,

ⓑ $\int_s^t (\alpha X_r + \beta Y_r)\, dM_r = \alpha \int_s^t X_r\, dM_r + \beta \int_s^t Y_r\, dM_r$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, f.s.

ⓒ $\mathbb{E}\left(\int_s^t X_r\, dM_r\right) = 0$ (weil Martingal)

ⓓ $\mathbb{E}\left(\int_0^t X_r\, dM_r \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right) = \int_0^s X_r\, dM_r$

. "Aussenbemerkung" über Korollar 4.15)

- $X_t \in L^1$, rechtsstetig, adaptiert $\Rightarrow$ X martingal $\iff$ $\forall$ beschr. Stopp. T, $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.

- Es reicht nicht, dass $\forall s < t$, $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_s)$.

Z.B.: Sei $X_t = \frac{B_t}{1+t}$ (B_t die B.B.).

$\Rightarrow \mathbb{E}(X_t) = 0 = \mathbb{E}(X_s)$, $\forall s, t$, aber für $s < t$,

$$\mathbb{E}\left(\frac{B_t}{1+t} \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right) = \frac{B_s}{1+t} \neq \frac{B_s}{1+s}.$$

6.4) Itô-Integral für lokale stetige Semimartingale.

- Erinnerung: • X ist ein stetiges Semimartingal, wenn

(Def 5.4) $\exists\, M \in \mathcal{M}_{loc}$ (stetiges, lokales Martingal)

und $A \in \mathcal{A}$ (stetiges, von endlicher Variation)

s.d. $X = M + A$.

(Def. 5.1) (T

• M ist ein stetiges lokales Martingal, wenn $\exists (T_n)_{n\geq 1}$ Stoppzeiten $T_n \nearrow \infty$ s.d. X^{T_n} ist ein Martingal

$(T_{n+1} \geq T_n)$

(Thm. 5.5) • Eindeutige Zerlegung: $\mathcal{S} = \mathcal{M}_{loc}^{0} \oplus \mathcal{A}$
$= \mathcal{M}_{loc} \oplus \mathcal{A}_0$

. Wir haben in Kapitel 6.2)

$$(X \cdot A)_t = \int_0^t X_s \, dA_s \quad \text{für } X \in \mathcal{B},\ A \in \mathcal{A} \quad \text{(adapt., linksstetig, pfadweise lokal beschränkt)}$$

definiert.

. Wir haben im Kapitel 6.3.2 - 6.3.3)

$$(X \cdot M)_t = \int_0^t X_s \, dM_s \quad \text{für } M \in H^2,\ X \in L^2(M) \text{ definiert.}$$

(Vorhersagbar, $\|X\|_M < \infty$).

. Dazu, aus Thm. 6.5(c) und Prop. 6.22, wissen wir dass $\forall$ Stoppzeiten T,

$$(X \cdot A)^T = X \cdot A^T$$

und

$$(X \cdot M)^T = X \cdot M^T.$$

· Sei $M \in \mathcal{M}_{loc}$ (stetiges lokales Martingal).

Def. 6.24) $X \in \mathcal{L}^2_{loc}(M)$: $\mathcal{L}^2_{loc}(M) := \{ X$ messbar, vorhersagbar und

$$\forall t \in [0,\infty), \mathbb{P}\left(\int_0^t X_s^2 \, d\langle M\rangle_s < \infty \right) = 1 \}.$$

$X \in L^2_{loc}(M)$: Äquivalenzklassen von $\mathcal{L}^2_{loc}(M)$.

Lem. 6.25) $X \in \mathcal{L}^2_{loc}(M) \iff X$ ist vorhersagbar und

$\exists$ (wachsende) Folge von Stoppzeiten

$T_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ (f.s.) s.d.

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{T_n} X_s^2 d\langle M\rangle_s \right) < \infty, \quad \forall n \geq 1.$$

$\left(\equiv X \cdot \mathbb{1}_{[0,T_n]} \in \mathcal{L}^2(M) \text{ bzw. } X \in \mathcal{L}^2(M^{T_n}) \right).$

Beweis: $\Rightarrow$: Wähle $T_n := \inf\{ t \geq 0 \text{ s.d. } \int_0^t X_s^2 \, d\langle M\rangle_s > n \}$.

$T_n \nearrow \infty$ als $n \to \infty$ (weil $X \in \mathcal{L}^2_{loc}(M)$).

Deshalb, $\int_0^{T_n} X_s^2 \, d\langle M\rangle_s \leq n$,

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left(\int_0^{T_n} X_s^2 \, d\langle M\rangle_s \right) \leq n.$$

$\Leftarrow$: $\mathbb{E}\left(\int_0^{T_n} X_s^2 d\langle M\rangle_s \right) < \infty$, deshalb $\forall t \geq 0$,

$\mathbb{P}\left(\int_0^{T_n \wedge t} X_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty \right) = 1$ und wegen $T_n \nearrow \infty$ f.s.,

auch $\mathbb{P}(T_n > t) \to 1$ als $n \to \infty$.

Deshalb, $\mathbb{P}\left(\int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty \right) = 1$. #

Def. 6.25) Für $M \in \mathcal{M}_{loc}$ und $X \in L^2_{loc}(M)$,

$$X \bullet M := \lim_{n\to\infty} \underbrace{X \bullet M^{T_n}}_{\text{Das stochastische Integral von Def. 6.18.}} \quad (*)$$

Def. 6.26) Für $V = M + A \in \mathcal{S}$ und $X \in \mathcal{B}$,

$$X \bullet V := X \bullet M + X \bullet A \in \mathcal{S}.$$

Bemerkung: . Existiert der Limes in $(*)$?

. Auf $t < T_n$, $\forall m \geq n$, $T_m \geq T_n$, deshalb

$$(X \bullet M^{T_m})_t = \left((X \bullet M^{T_m})^{T_n}\right)_t \underset{(\text{Prop } 6.22)}{=} (X \bullet M^{T_n})_t \checkmark$$

Zusammen mit $T_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ f.s. $\Rightarrow$ $(*)$ existiert.

. Wir fassen einige Eigenschaften zusammen.

Prop. 6.27) . Für alle $V, W \in \mathcal{S}$, $X, Y \in \mathcal{B}$:

ⓐ $X \bullet V$ ist bilinear in X und V,

ⓑ . Falls $V \in \mathcal{M}_{loc} \Rightarrow X \bullet V \in \mathcal{M}^0_{loc}$
. Falls $V \in \mathcal{A} \Rightarrow X \bullet V \in \mathcal{A}_0$

ⓒ Assoziativität: $(XY) \bullet V = X \bullet (Y \bullet V)$

ⓓ $\langle X \bullet V, Y \bullet W \rangle = (XY) \bullet \langle V, W \rangle$ ($\equiv 0$ falls V oder $W \in \mathcal{A}$)

ⓔ $(X \bullet V)^T = X \bullet V^T = (X \mathbb{1}_{[0,T]}) \bullet V$, $\forall$ Stoppzeiten T

ⓕ . Für fast jedes $\omega \in \Omega$, $a, b \in \mathbb{R}$;
$X(\omega) = 0$ auf $[a,b]$ oder $V(\omega) = \text{const}$ auf $[a,b]$ $\Rightarrow$ $(X \bullet V)(\omega) = \text{const}$ auf $[a,b]$.

<u>Beweis:</u> (a) klar.

(b) $V \in \mathcal{M}_{loc} \Rightarrow \exists S_n \nearrow \infty$ s.d. $V^{S_n} \in \mathcal{M}$.

$$\Rightarrow (X \cdot V)^{S_n} = \lim_{m \to \infty} X \cdot V^{S_n \wedge T_m} \in \mathcal{M}^0_{loc}.$$

· $V \in \mathcal{A}$: Thm 6.5 (a)

(c) Thm 6.5 (d) ⊕ Lemma 6.20.

(d) Kor. 6.19 (b)

(e) Thm 6.5 (c) ⊕ Prop. 6.22.

(f). Für $V \in \mathcal{A}$ ist klar aus der Def. von $X \cdot V$.

. Für $V \in \mathcal{M}_{loc}$: Aus <u>Hausaufgabe 4.3. (i)</u>, folgt $\langle V \rangle(\omega) =$ konstant oder ~~$X(\omega) = 0$ auf~~ $[a,b]$

$\Rightarrow t \mapsto (X^2 \cdot \langle V \rangle)_t = \left(\int_0^t X_s^2 \, d\langle V \rangle_s \right)(\omega)$ ist konstant auf $[a,b]$, d.h., aus $(X^2 \cdot \langle M \rangle)_t \overset{\text{Kor 6.19}}{=} \langle X \cdot M \rangle_t$, ist auch $X \cdot M$ = konstant auf $[a,b]$. #

. Was passiert wenn $X^{(n)}$ konvergiert gegen X?

<u>Thm 6.28)</u> (Stochastischer Integral Konvergenzsatz).

· Sei $V \in \mathcal{S}$, $X^{(n)}, \cancel{X} \in B$ mit $|X^{(n)}| \leq \cancel{X}$, $\forall n \geq 1$.

Wenn für jedes $t \geq 0$, $X_t^{(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ f.s.,

dann $X^{(n)} \cdot V \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ uniform, $\mathbb{P}$-stochastisch auf jedem kompakten Intervall $\subset \mathbb{R}_+$,

$$\left(\text{d.h., } \forall t \geq 0, \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |(X^{(n)} \cdot V)_s| \geq \varepsilon \right) = 0 \right).$$

Beweis: (a) Für $V \in \mathcal{A}$ $\equiv$ Satz der majorisierten Konvergenz.

(b) Für $V \in \mathcal{M}_{loc}$: Sei T eine Stoppzeit mit $V^T \in H^2$ und

$\cdot\, X^T$ beschränkt $\Rightarrow (X^{(n)})^T \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ in $L^2(V^T)$,

weil: $\|(X^{(n)})^T\|^2_{V^T} = \mathbb{E}\left(\int_0^T (X_t^{(n)})^2 d\langle V\rangle_t\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

wegen majorisierte Konvergenz.

$\cdot$ Itô-Isometrie $\|(X^{(n)})^T\|_{V^T} = \|(X^{(n)} \cdot V)^T\|_{H^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\cdot$ Aber $\|(X^{(n)} \cdot V)^T\|^2_{H^2} = \mathbb{E}\left(\left(\int_0^\infty X_t^{(n)}\, dV_t^T\right)^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

und ~~(z.B. via Tchebishev)~~ es folgt

$(X^{(n)} \cdot V)^T \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}\text{-stoch.}} 0$, gleichmässig auf $\mathbb{R}_+$.

$\left[\text{d.h., } \mathbb{P}\left(\sup_{t \geq 0} |(X^{(n)} \cdot V)_t^T| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \ \forall \varepsilon > 0\right]$

$\Rightarrow X^{(n)} \cdot V \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}\text{-stoch.}} 0$, lokal gleichmässig.

#

. Schauen wir zurück an unsere Versuch den Stoch. Integral als limes von Riemann-Summen:

$$\text{"}\int_0^t f_s\, dB_s\text{"} \cong \sum_{k=0}^{n-1} f(B_{t\cdot\frac{k}{n}}) \cdot \left(B_{t\frac{k+1}{n}} - B_{t\cdot\frac{k}{n}}\right).$$

. Wir haben es als Anfangspunkt benutzt, um das Stochastische Integral für Elementar Prozesse zu definieren. Deshalb erwarten wir das folgende:

Thm. 6.29) (Approximation durch Riemann-Summen).

. Sei $V \in S$, $X \in B$ und $t > 0$.
Sei Δ_n eine beliebige Folge von Partitionen von $[0,t]$ mit $\|\Delta_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. ($\Delta_n = [0,t_1] \cup [t_1,t_2] \cup \dots \cup [t_{n_t},t]$)

Dann,
$$I_s^{\Delta_n}(X,V) := \sum_{t_k \in \Delta_n} X_{t_k} (V_{s\wedge t_{k+1}} - V_{s\wedge t_k})$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}\text{-stoch}} \int_0^s X_u \, dV_u, \text{ gleichmässig in } s \in [0,t]. \quad (*)$$

Beweis: O.B.d.A. nehmen wir $X_0 = 0$.
Zuerst betrachten wir X beschränkt.
. $X \in B$ bedeutet, dass linksstetig ist. Deshalb,
$$X_t^{\Delta_n} = \sum_{t_k \in \Delta_n} X_{t_k} \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(t) \xrightarrow[\|\Delta_n\|\to 0]{} X_t$$
punktweise auf $\mathbb{R}_+ \times \Omega$.
. Aber $I_s^{\Delta_n}(X,V) = \int_0^s X_u^{\Delta_n} dV_u$ (X^{Δ_n} elementarprozess).

. Aus Thm 6.28 mit $X^{(n)} = X - X^{\Delta_n}$,
$$\int_0^s X_u \, dV_u - I_s^{\Delta_n}(X,V) \xrightarrow[\|\Delta_n\|\to 0]{\mathbb{P}\text{-stoch.}} 0,$$
gleichmässig auf $s \in [0,t]$.

. Für allgemeines X: existieren $T_m \xrightarrow{m\to\infty} \infty$ Stoppzeiten mit X^{T_m} beschränkt
(e.g. $T_m = m \wedge \inf\{t \geq 0 \text{ s.d. } X_t \geq m\}$). #

Bem.: $\exists$ Teilfolge $(n_k)_{k\geq 1}$ s.d. $(*)$ gilt $\mathbb{P}$-f.s..

(Analogue of Lemma 2.7 with power "$p=1$" instead of 2).

Thm 6.29 ist sehr nützlich und damit kann man eine <u>Partielle Integrationsformel</u> ableiten. Diese Formel ist ein Grundstein für die Itô-Formel.

Thm. 6.30) (Partielle Integration).

- Für alle $X, Y \in S$,

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t \quad (**)$$

- Insbesondere,

$$X_t^2 = X_0^2 + 2 \cdot \int_0^t X_s dX_s + \langle X\rangle_t. \quad (*)$$

Kor. 6.31) Für Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ (mit $B_0 = 0$)

$$B_t^2 - t = 2 \cdot \int_0^t B_s dB_s.$$

Beweis von Thm 6.30)

- Wir zeigen $(*)$. Dann $(**)$ folgt durch Polarisierung.
- In der Tat, $X_t Y_t = \frac{1}{4}\left[(X_t+Y_t)^2 - (X_t-Y_t)^2\right]$

$$= \frac{1}{4}\left[(X_0+Y_0)^2 + 2\int_0^t (X_s+Y_s)\, d(X_s+Y_s) + \langle X+Y\rangle_t\right]$$

$$- \frac{1}{4}\left[(X_0-Y_0)^2 + 2 \cdot \int_0^t (X_s-Y_s)\, d(X_s-Y_s) + \langle X-Y\rangle_t\right]$$

$$= X_0 Y_0 + \langle X, Y\rangle_t + \int_0^t X_s\, dY_s + \int_0^t Y_s\, dX_s .$$ (90)

. Nehmen wir deshalb $X = Y$.

mit $\|\Delta_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

. Sei Δ_n eine Partition von $[0,t]$ mit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$, Dann,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2 = X_{t_n}^2 - X_{t_0}^2 - 2 \sum_{k=0}^{n-1} X_{t_k}(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}).$$

. Wir wissen schon (Thm. 5.17), dass

$$\sum_{k=0}^{n-1} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle X\rangle_t$$

. Aus Thm. 6.29, $\sum_{k=0}^{n-1} X_{t_k}(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^t X_s\, dX_s$

und $X_{t_0} = X_0$, $X_{t_n} = X_t$.

Deshalb, wenn $\|\Delta_n\| \to 0$ (d.h., $n \to \infty$),

$$\langle X\rangle_t = X_t^2 - X_0^2 - 2\int_0^t X_s\, dX_s. \quad \#$$

6.5) Differentielle Schreibweise: (nützlich beim Rechnen).

. Thm 6.30 in differentieller Form ist:

$$d(X_t Y_t) = X_t\, dY_t + Y_t\, dX_t + d\langle X, Y\rangle_t$$

In $d=1$: Wenn man definiert $dX_t\, dY_t := d\langle X, Y\rangle_t$, dann

$$d(X_t Y_t) = X_t\, dY_t + Y_t\, dX_t + dX_t\, dY_t .$$ (***)

Insbesondere: $(dX_t)^2 = d\langle X\rangle_t$

und falls X oder $Y \in \mathcal{A}$, $dX_t\, dY_t = 0$.

Deshalb, $\forall X, Y, Z \in S'$,

$$(dX_t\, dY_t)\, dZ_t = dX_t (dY_t\, dZ_t) = 0,$$ weil

$\langle X, Y\rangle_t$ und $\langle Y, Z\rangle_t \in \mathcal{A}$.

. z.B., für die Brownsche Bewegung, kriegt man die folgenden Regeln:

$$\begin{cases} .\ (dB_t)^2 = dt \\ .\ dB_t\, dt = dt\, dB_t = 0 \\ .\ (dt)^2 = 0 \end{cases}$$ (vergleichen mit Lem. 2.6)

$d\geq 1$. Die Verallgemeinerung von ✱✱✱ für eine d-dimensionelle Brownsche Bewegung ist erhalten mit die Regeln:

$$\begin{cases} .\ dB_t^i\, dB_t^j = \delta_{ij}\, dt \\ .\ dB_t^i\, dt = dt\, dB_t^i = 0 \\ .\ (dt)^2 = 0 \end{cases}$$ (siehe ÜB. 4, HA 2(i)). $\langle B^i, B^j\rangle_t = \delta_{ij} \cdot t$.

. Zurück zu $d=1$. Wenn man schreibt "dV_t" sollte man es als Abbildung von $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2, a<b\} \to \mathbb{R}^{\Omega}$ interpretieren:

$$dV_t : [a,b] \longmapsto \int_a^b dV_t = V_b - V_a$$

$$\begin{matrix} X_t\, dV_t : [a,b] \longmapsto \int_a^b X_t\, dV_t \\ \parallel \qquad\qquad\qquad \parallel \\ d(X\cdot V)_t \qquad\qquad (X\cdot V)_b - (X\cdot V)_a \end{matrix}$$

. Mit diese Notationen, die Assoziativität wird :
$$d(Y\cdot(X\cdot V))_t = Y_t\, d(X\cdot V)_t = Y_t X_t\, dV_t$$

und (Kunita-Watanabe)

$$d(X\cdot V)_t\, d(Y\cdot W)_t = X_t Y_t\, dV_t\, dW_t$$
$$(d(X\cdot V)_t)^2 = X_t^2 (dV_t)^2$$

Beispiele: . Sei $X_t = B_t^2$ und suchen wir $\langle X\rangle_t$.

$$\Rightarrow \quad d\langle X\rangle_t = (dX_t)^2 = (dB_t^2)^2$$

Kor 6.31

$$= (2B_t\, dB_t + 1\cdot dt)^2$$
$$= 4B_t^2 \underbrace{(dB_t)^2}_{=dt} + 4B_t \underbrace{dB_t\, dt}_{=0} + \underbrace{(dt)^2}_{=0}$$

$$\Rightarrow \langle X\rangle_t \equiv \langle B^2\rangle_t = 4\cdot \int_0^t B_s^2\, ds.$$

. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$:

$$d(f(X))_t = f'(X_t)\, dX_t + \frac{f''(X_t)}{2}(dX_t)^2 + \frac{f'''(X_t)}{6}\underbrace{(dX_t)^3}_{=0} + \dots$$

und für $X_t = B_t$:

$$d(f(B))_t = f'(B_t)\, dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t)\, dt$$ (vergleichen mit ÜB6, H41(iii))

$\hookrightarrow$ Itô-Formel.

7) Die Itô-Formel und Anwendungen.

7.1) Die Itô-Formel.

Thm 7.1) . Sei $F \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ und $X = (X^1, \dots, X^d)$ mit $X^1, \dots, X^d \in S$.

Dann $F(X) \in S$ mit

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{k=1}^{d} \int_0^t \partial_k F(X_s)\, dX_s^k + \sum_{k,l=1}^{d} \frac{1}{2} \int_0^t \partial^2_{k,l} F(X_s)\, d\langle X^k, X^l\rangle_s \qquad (*)$$

.Notationen: $\cdot\, \partial_k F$ = Ableitung von F bzgl $k$te Koordinate.

$\cdot\, \partial^2_{k,l} F \equiv \partial_k \partial_l F$.

.Bemerkung: . Itô-Formel in Differentialform:

$$(**) \quad dF(X_t) = \sum_{k=1}^{d} \partial_k F(X_t)\, dX_t^k + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{d} \partial^2_{k,l} F(X_t)\, d\langle X^k, X^l\rangle_t.$$

Korollar 7.2). . Sei $F \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, . $(B_t)_{t \geq 0}$ eine d-dim. Brownsche Bewegung.

Dann,

$$F(B_t) = F(B_0) + \int_0^t \nabla F(B_s) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta F(B_s)\, ds.$$

Korollar 7.3) : . Sei $F \in C^2(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R})$, $(B_t)_{t \geq 0}$ d-dim. B.B

Dann,

$$F(t, B_t) = F(0, B_0) + \int_0^t \nabla F(s, B_s) \cdot dB_s + \int_0^t \dot{F}(s, B_s)\, ds + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta F(s, B_s)\, ds$$

wobei ∇F ist der Gradient von F

(Vektor mit Ableitungen bzgl der Raum-Variablen)

und $\dot{F}$ ist die Zeit-Ableitung.

Bemerkung: . Kor 7.2 in Diff. Form:

$$dF(B_t) = \nabla F(B_t) \cdot dB_t + \frac{1}{2}\Delta F(B_t)dt$$

. Kor 7.3 in Diff. Form:

$$dF(t,B_t) = \nabla F(t,B_t)\, dB_t + \frac{1}{2}\Delta F(t,B_t)dt + \dot{F}(t,B_t)dt.$$

Beweis von Thm 7.1)

ⓐ Wir wollen zeigen, dass $\circledast$ gilt für polynome

. Wegen linearität, es genug zu zeigen, dass wenn die Behauptung gilt für ein $F \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, dann gilt auch für

$$G(x_1, \dots, x_d) = x_k \cdot F(x_1, \dots, x_d).$$

. Dann, die Itô-Formel gilt für alle polynome, weil es gilt für $F \equiv 1$ (triviale).

$$G(X_t) - G(X_0) = X_t^k F(X_t) - X_0^k F(X_0)$$

$$\overset{\text{Part. Int. (Thm 6.30)}}{=} \int_0^t X_s^k \, dF(X_s) + \int_0^t F(X_s)\, dX_s^k + \langle X^k, F(X)\rangle_s$$

$$\overset{\text{Itô-Formel für } F: \circledast}{=} \sum_{e=1}^d \int_0^t X_s^k \, \partial_e F(X_s)\, dX_s^e$$

$$+ \sum_{e,m=1}^d \int_0^t X_s^k \, \frac{1}{2} \partial^2_{k,e} F(X_s)\, d\langle X^e, X^m\rangle_s$$

./.

$$+ \underbrace{\int_0^t F(X_s)\,dX_s^k}$$

$$+ \sum_{\ell=1}^d \int_0^t \partial_\ell F(X_s)\, d\langle X^k, X^\ell\rangle_s$$

wobei im letzen Schritt haben wir benutzt

$$F(X_t) = \int_0^t dF(X)_s = \sum_{\ell=1}^d \int_0^t \partial_\ell F(X_s)\, dX_s^\ell$$

und die linearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

$$\Rightarrow G(X_t) - G(X_0) = \int_0^t \sum_{\ell=1}^d \left\{ X_s^k \partial_\ell F(X_s) + \delta_{k,\ell} \cdot F(X_s) \right\} dX_s^\ell$$

$$+ \int_0^t \sum_{\ell,m=1}^d \left\{ X_s^k \frac{1}{2} \partial^2_{k,\ell} F(X_s) + \delta_{m,k} \cdot \partial_\ell F(X_s) \right\} \cdot d\langle X^\ell, X^k\rangle_s$$

. Anderseits: $\dfrac{\partial G(x_1 - x_d)}{\partial x_\ell} = \delta_{k,\ell} \cdot F(x_1 - x_d) + x_k \cdot \partial_\ell F(x_1 - x_d)$

und $\dfrac{\partial^2 G(x_1 - x_d)}{\partial x_\ell \partial x_m} = \delta_{k,\ell} \cdot \partial_m F(x_1 - x_d) + \delta_{k,m} \partial_\ell F(x_1 - x_d)$

$$+ x_k \cdot \partial^2_{\ell,m} F(x_1 - x_d)$$

$$\Rightarrow G(X_t) - G(X_0) = \sum_{\ell=1}^d \int_0^t \partial_\ell G(X_s)\, dX_s^\ell + \frac{1}{2} \sum_{\ell,m=1}^d \int_0^t \partial^2_{\ell,m} G(X_s)\, d\langle X^\ell, X^m\rangle_s.$$

(b) Zweiten Schritt: Von Polynome bis zur $C_0^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

. Sei $F \in C_0^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (d.h., mit Kompakten Träger).

Dann, . $\exists$ eine Folge von Polynomen $F_n, n \geq 1$,

s.d. $F_n \xrightarrow[n\to\infty]{} F$

(Weierstrass Approximationssatz).

Und dann auch

$$\partial_e F_n \xrightarrow{n\to\infty} \partial_e F ,$$

$$\partial_e \partial_m F_n \xrightarrow{n\to\infty} \partial_e \partial_m F .$$

. Jetzt anwenden wir den Stochastischer Integralkonvergenzsatz (Thm. 6.28) und erhalten ⊛ (Itô-Formel) für alle $F \in C_0^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

ⓒ <u>Erweiterung für alle $F \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$:</u>

. Sei $K_n, n \geq 1$, eine Folge von Kompakte Menge von $\mathbb{R}^d$ s.d. $K_n \nearrow \mathbb{R}^d$.

Definiere

$$T_n := \inf\{t \geq 0 \text{ s.d } X_t \notin K_n\}.$$

Dann, $T_n \nearrow \infty$ als $n \to \infty$.

. Sei nun $F_n = F \cdot \mathbb{1}_{K_n}$. So ist $F_n \in C_0^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

Aus ⓑ, gilt Itô-Formel ⊛ für F_n.

$\Rightarrow$ ⊛ gilt auf $\{\omega \in \Omega \mid T_n(\omega) > t\}$.

. Aber, $\forall t \geq 0$, $\mathbb{P}(T_n(\omega) > t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ ..

$\Rightarrow$ ⊛ gilt auf Ω

#

Korollar 7.4). Sei $X \in \mathcal{S}^d$, $F \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Dann,

$$\langle F(X) \rangle_t = \sum_{k,l=1}^{d} \int_0^t (\partial_k F \cdot \partial_l F)(X_s)\, d\langle X^k, X^l \rangle_s$$

- Für X eine d-dim. Brownsche Bewegung: $X \equiv B$,

$$\langle F(B) \rangle_t = \int_0^t (\nabla F)^2 (B_s)\, ds.$$

Beweis: Itô-Formel:

$$\left(dF(X_t)\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{d} \partial_k F(X_t)\, dX_t^k + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{d} \partial^2_{k,l} F(X_t)\, d\langle X^k, X^l \rangle_t \right)^2$$

$$= \sum_{k,l=1}^{d} \partial_k F(X_t)\, \partial_l F(X_t) \underbrace{dX_t^k\, dX_t^l}_{= d\langle X^k, X^l \rangle_t}$$

$$+ (\ldots) \underbrace{dX_t^k\, d\langle X^l, X^m \rangle_t}_{\equiv 0}$$

$$\Rightarrow \left(dF(X_t)\right)^2 \equiv d\langle F(X) \rangle_t = \sum_{k,l=1}^{d} \partial_k F(X_t)\, \partial_l F(X_t)\, d\langle X^k, X^l \rangle_t.$$

$$\Rightarrow \langle F(X) \rangle_t = \underbrace{\langle F(X) \rangle_0}_{\equiv 0} + \sum_{k,l=1}^{d} \int_0^t \partial_k F(X_s)\, \partial_l F(X_s)\, d\langle X^k, X^l \rangle_s$$

- Für BB: $d\langle B^k, B^l \rangle_s = \delta_{k,l} \cdot ds$. #

(Siehe Übungen $\nearrow$).

Korollar 7.5: Für $X = X_0 + M + A$, mit $M \in \mathcal{M}^0_{loc}$, $A \in \mathcal{A}_0$ und $F \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$F(X_t) = F(X_0) + \tilde{M}_t + \tilde{A}_t \text{ wobei}$$

$$\tilde{M}_t = \int_0^t F'(X_s)\, dM_s \in \mathcal{M}^0_{loc}$$

und

$$\tilde{A}_t = \int_0^t F'(X_s)\, dA_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\, d\langle M\rangle_s \in \mathcal{A}_0.$$

. Die Zerlegung im Martingal- und beschränkteVariationsprozess ist etwas, dass oft gesucht ist.

. Im ÜB3, HA3, hat man gezeigt, dass

wenn $M_t := \exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t)$

ist ein Martingal und B_t ein 1-d. stetiger Prozess mit $B_0 = 0$, dann ist B_t eine Brownsche Bewegung.

. M_t ist ein Beispiel von so-genannte "exponentielles lokales Martingal" und wird die Lévy Charakterisierung von BB geben.

. Dazu brauchen wir ein wenig Vorbereitungslemmas.

Prop. 7.6) ⓐ Sei B eine d-dim. BB., $f \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, und

$$Af \equiv \frac{1}{2}\Delta f + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Dann,

$$M_t := f(t, B_t) - f(0, B_0) - \int_0^t Af(s, B_s)\, ds \in \mathcal{M}^0_{loc}.$$

Insbesondere: Falls $Af = 0$ auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, dann

$$\left(f(t, B_t)\right)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_{loc}.$$

(b) Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$, dann

$$M_t = f(B_t) - f(B_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B_s)\,ds \in \mathcal{M}^0_{loc}.$$

Insbesondere: Falls f ist harmonisch auf $\mathbb{R}^d$, i.e., $\Delta f = 0$, dann $(f(B_t))_{t\geq 0} \in \mathcal{M}_{loc}$.

(c) Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ und $T = \inf\{t \geq 0 \text{ s.d. } B_t \notin D\}$. Dann, falls f ist harmonisch auf D,

$$f(B^T) - f(B_0) \in \mathcal{M}^0_{loc}.$$

Beweis: (a) Kor. 7.3:

$$\Rightarrow f(t,B_t) - f(0,B_0) - \int_0^t (Af)(s,B_s)\,ds = \int_0^t (\nabla f)(s,B_s)\,dB_s \in \mathcal{M}_{loc}.$$

(b) Ähnlich mit Kor 7.2.

(c) Betrachten statt M_t von (b), M_t^T. #

Lemma 7.7: Die quadratische Variation von M_t in Prop 7.6(a) ist:

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t |\nabla f(s,B_s)|^2\,ds$$

Beweis:

$$dM_t = \nabla f(t,B_t)\,dB_t + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\Delta f(t,B_t) + \dot{f}(t,B_t)\right)dt - (Af)(t,B_t)\,dt}_{=0}$$

$$\Rightarrow (dM_t)^2 = d\langle M \rangle_t = |\nabla f|^2\,ds. \quad \#$$

. Eine Generalisierung mit Diffusionskoeffiziente die Ort-abhängig sind ist die folgende.

Prop. 7.8) Sei B eine d-dim. Brownsche Bewegung, $\sigma(x) = [\sigma_{ij}(x)]_{1 \le i,j \le d}$ eine Matrix mit stetigen Koeffizienten $x \mapsto \sigma_{ij}(x)$ und X ein stetiger adaptierter d-dimensionaler Prozess mit

$$X_t^i = X_0^i + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma_{ij}(X_s)\, dB_s^j .$$

Dann:

ⓐ X^i ist ein lokales Martingal,

ⓑ $\forall f \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, sei

$$M_t^f := f(t, X_t) - f(0, X_0) - \int_0^t Af(s, X_s)\, ds,$$

mit

$$Af(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$a_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{d} \sigma_{ik}(x) \sigma_{jk}(x),$$

. M_t^f ist ein lokales Martingal.

Diff. Form: $dX_t^i = \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(X_t)\, dB_t^j$.

Beweis: ⓐ Folgt aus ⓑ mit $f(t, x_1, \dots, x_d) = x_i$.

ⓑ Berechnen wir zuerst die quadratische Kovariation von X^i und X^j:

$$d\langle X^i, X^j \rangle_t = \sum_{k,e=1}^{d} \sigma_{ik}(X_t) \sigma_{je}(X_t) \underbrace{d\langle B^k, B^e \rangle_t}_{= \delta_{k,e}\, dt}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{d} \sigma_{ik}(X_t) \sigma_{jk}(X_t) \right) dt = a_{ij}(X_t)\, dt.$$

Itô: $\Rightarrow \quad f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \nabla f(s,X_s)\, dX_s$

$$+ \int_0^t \dot{f}(s,X_s)\, ds + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^d \partial^2_{i,j} f(s,X_s)\, \underbrace{d\langle X^i, X^j\rangle_s}_{= a_{ij}(X_s) ds}$$

$$= f(0,X_0) + \int_0^t A f(s,X_s)\, ds + \underbrace{\int_0^t \nabla f(s,X_s)\, dX_s}_{\text{lokales Martingal.}}$$

#

7.2) Exponentielle Martingale.

. Zuerst ein Lemma.

. **Lemma 7.9)** Sei $F \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \text{und } M \in M_{loc}.$$

Dann $\tilde{M}_t := F(\langle M\rangle_t, M_t) \in M_{loc}$.

. **Beweis:** $d\tilde{M}_t = \frac{\partial F}{\partial t} \cdot d\langle M\rangle_t + \frac{\partial F}{\partial x}\, dM_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\, d\langle M\rangle_t$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)}_{\equiv 0} \cdot d\langle M\rangle_t + \frac{\partial F}{\partial x}\, dM_t$$

$$\Rightarrow \tilde{M}_t = \int_0^t (\nabla F)(\langle M\rangle_t, M_t)\, dM_t \in M_{loc}.$$

Def. 7.10) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $M \in M_{loc}$. Dann

$$\mathcal{E}_\lambda(M)_t = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M\rangle_t\right) :$$

heisst exponentielles lokales Martingal.

Lemm. 7.11) $\begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{C},\ M \in \mathcal{M}_{loc}, \\ \mathcal{E}_\lambda(M) \in \mathcal{M}_{loc} + i\mathcal{M}_{loc}. \end{cases}$

. Beweis: Folgt aus Lemma 7.9, weil
$$F(t,x) = e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}t} \quad \text{ist so dass}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)F(t,x) = 0. \quad \#$$

. Insbesondere, wenn wir nehmen $\lambda = i$, dann
$$\cos(M_t)e^{\frac{1}{2}\langle M\rangle_t} \quad \text{und}$$
$$\sin(M_t)e^{\frac{1}{2}\langle M\rangle_t} \quad \text{sind lokale Martingale.}$$

. Beispiel für BB: $X_t = \exp\left(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right) \in \mathcal{M} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$
$$\begin{cases} dX_t = \lambda X_t \, dB_t, \ d.h., \\ X_t = 1 + \lambda \int_0^t X_s \, dB_s \end{cases}$$

. Frage: Ist $\mathcal{E}_\lambda(M)$ ein Martingal und nicht nur ein lokales Martingal?

. Antwort: In allgemeiner: nein. (Siehe Übungen)

. Ein positives Ergebnis auf die Frage ist das Folgende.

Thm 7.12) $\mathcal{E}_\lambda(M) \in \mathcal{M} + i\mathcal{M}$ (d.h., ein $\mathbb{C}$-wert Martingal) unter: (mindestens) eine der folgenden Bedingungen:

(a) M ist beschränkt und $\lambda \in \mathbb{R}$,

(b) $\lambda \in i\mathbb{R}$ und $\langle M\rangle$ ist beschränkt

(c) $M_0 = 0$ und $\mathbb{E}(\mathcal{E}_\lambda(M)_t) = 1$, $\forall t \geq 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis: (a) M beschränkt und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow |\mathcal{E}_\lambda(M)| = |\exp(\lambda M_t) \cdot \underbrace{\exp(-\tfrac{\lambda^2}{2} \overbrace{\langle M\rangle_t}^{\geq 0})}_{\leq 1}|$$

$$\leq |\exp(\lambda M_t)| \text{ ist beschränkt.}$$

. Aber ein lokales beschränktes Martingal ist ein Martingal (Lemma 5.3).

(b) $$|\mathcal{E}_\lambda(M)| \leq |\overbrace{\exp(i|\lambda| \cdot M_t)}^{\leq 1} \cdot \exp(\tfrac{|\lambda|^2}{2} \langle M\rangle_t)|$$

$$\leq \exp\left(\tfrac{|\lambda|^2}{2} \langle M\rangle_t\right) \text{ ist beschränkt.}$$

Dann nochmal Lemma 5.3 (c).

(c) $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{E}_\lambda(M) \in \mathbb{R}_+$ und ist ein lokales Martingal. Aus Lemma 5.3 (b) folgt, dass $\mathcal{E}_\lambda(M)$ ist ein Supermartingal.

d.h. $\mathbb{E}(\mathcal{E}_\lambda(M)_t) \geq \mathbb{E}(\mathcal{E}_\lambda(M)_0) = 1$, $\forall t \geq 0$.

Aber wegen $\mathbb{E}(\mathcal{E}_\lambda(M)_t) = 1$, $\forall t \geq 0$ (Bedingung), es bedeutet, dass $\mathcal{E}_\lambda(M)_t$ ist ein Martingal.

#

7.3) Lévy Charakterisierung der Brownsche Bewegung.

• In Verbindung mit exponentielle Martingale ist die Lévy Characterisierung von Brownsche Bewegung.

. Das ist wichtig um zu wissen ob ein Prozess eine B.B. ist.

Thm 7.13) (Lévy) Sei X ein $\mathbb{R}^d$-wertig stetiges $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptiertes stochastik prozess mit $X_0 = 0$. Die folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) X ist eine d-dim B.B. bzgl $\mathcal{F}_t$.

(b) $X \in \mathcal{M}^0_{loc}$ und $\langle X^k, X^e\rangle_t = \delta_{k,e} \cdot t, \forall 1 \leq k,e \leq d$.

(c) $X \in \mathcal{M}^0_{loc}$ und für alle $f = (f_1, \dots, f_d)$ mit $f_k \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$,

$$M_t := \exp\left[i \sum_{k=1}^d \int_0^t f_k(s)\, dX^k_s + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \int_0^t f_k^2(s)\, ds \right] \in \mathcal{M} + i\mathcal{M} \; (\equiv \mathbb{C} \cdot \mathcal{M}).$$

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b): Wir wissen es schon.

(b) $\Rightarrow$ (c):

$$d(f \cdot X)_t = \sum_{k=1}^d f_k(t)\, dX^k_t$$

$$\Rightarrow (f \cdot X)_t = \sum_{k=1}^d \int_0^t f_k(s)\, dX^k_s \quad \text{und}$$

$$\langle f \cdot X\rangle_t = \sum_{k,e=1}^d \int_0^t f_k(s) f_e(s)\, \underbrace{d\langle X^k, X^e\rangle_s}_{= \delta_{k,e} \cdot ds}$$

$$= \sum_{k=1}^d \int_0^t f_k^2(s)\, ds.$$

Wegen Annahme $f_k \in L^2$ $\Rightarrow \langle f \cdot X\rangle \leq \sum_{k=1}^d \int_0^\infty f_k^2(s)\, ds < \infty.$

$\Rightarrow M_t \in \mathcal{E}_{\lambda=i}(f\circ X)_t \in \mathbb{C}\cdot\mathcal{M}_{loc}.$

Denn, Thm 7.12 (b) und $\langle f\circ X\rangle < \infty$, ist auch

$M_t \in \mathbb{C}\cdot\mathcal{M}.$

ⓒ ⇒ ⓐ: Seien $z \in \mathbb{R}^d$, $T > 0$. Definiere

Idee: Benutzen Fourier

$$f_k(s) = z_k \cdot \mathbb{1}_{[0,T)}(s).$$

Denn, $\sum_{k=1}^{d}\int_0^t f_k(s)\,dX_s^k = \sum_{k=1}^{d} z_k \cdot X_{t\wedge T}^k = (z, X_{t\wedge T})$,

und $\sum_{k=1}^{d}\int_0^t f_k^2(s)\,ds = \sum_{k=1}^{d} z_k^2\,(t\wedge T) \equiv \|z\|^2\cdot(t\wedge T)$.

Wegen ⓒ: $M_t = \exp\left[i(z, X_{t\wedge T}) + \frac{1}{2}\|z\|^2(t\wedge T)\right] \in \mathbb{C}\mathcal{M}$.

$\forall s < t \le T$:

$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{F}_s$, $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A\, e^{i(z,X_t)+\frac{1}{2}\|z\|^2 t} \mid \mathcal{F}_s\right) =$

$= \mathbb{1}_A \cdot \underbrace{e^{i(z,X_s)+\frac{1}{2}\|z\|^2 s}}_{\in \mathcal{F}_s}$

$\Rightarrow \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A\, e^{i(z,X_t-X_s)} \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{1}_A\, e^{-\frac{1}{2}\|z\|^2(t-s)}$

$\Rightarrow \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A\, e^{i(z,X_t-X_s)}\right) = \mathbb{P}(A)\cdot e^{-\frac{1}{2}\|z\|^2\cdot(t-s)}$,

Das gilt $\forall A \in \mathcal{F}_s \Rightarrow X_t - X_s$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und ist $\mathcal{N}(0,t-s)$ distributed. (Fourier Transformierte).

$\Rightarrow \mathbb{E}\left(e^{i(z,X_t-X_s)} \mid \mathcal{F}_s\right) = e^{-\frac{1}{2}\|z\|^2(t-s)} = \mathbb{E}\left(e^{i(z,X_t-X_s)}\right)$,

d.h., X ist eine B.B.

#

. Es gibt ein Paar Korollare von Thm 7.13. in $d=1$.

Korollar 7.14) Sei $X \in \mathcal{M}^0_{loc}$ mit $\langle X \rangle_t = t$. ($d=1$)

Dann ist X eine Brownsche Bewegung.

Beweis: trivial. #

Korollar 7.15) Sei $X \in \mathcal{M}^0_{loc}$ mit

$$t \longmapsto X_t^2 - t \in \mathcal{M}^0_{loc}.$$

Dann ist X eine Brownsche Bewegung.

Beweis: Folgt aus Thm 5.10, dass $\langle X \rangle_t = t$. Dann Kor. 7.14. #

. Bemerkung: . Hier ist die Eigenschaft "stetig" notwendig. Sonst, sei N_t ein Poisson Prozess mit Intensität 1, dann

$$\{M_t \equiv N_t - t, t \geq 0\}$$

ist ein Martingal in stetiger Zeit mit cadlag Trajektorien.

. Ausserdem, $\langle M \rangle_t = t$, aber M_t ist keine Brownsche Bewegung!

7.3) Einige Beispiele.

7.3.1) Brownsche Brücke.

. **Bedeutung:** Eine Brownsche Brücke X_t für $t \in [0,1]$ ist eine Brownsche Bewegung mit $X_0 = 0$ und bedingt auf $X_1 = 0$.

Definition 7.16 Eine (standard) Brownsche Brücke ist ein stetiges Gauss'sche Prozess X_t mit Mittelwert 0 und Kovarianz $Cov(X(t), X(s)) = s(1-t)$, $0 \le s \le t \le 1$.

. Wie kann man es konstruieren?

(a) Sei B_t eine Brownsche Bewegung mit $B_0 = 0$.
Dann $\tilde{X}_t := B_t - t \cdot B_1$, $0 \le t \le 1$,
ist eine Brownsche Brücke.

(b) Sei B_t eine Brownsche Bewegung mit $B_0 = 0$.
Dann
$$\begin{cases} X_t := (1-t) \cdot B_{\frac{t}{1-t}} & , 0 \le t < 1, \\ X_1 := 0 & , t = 1 \end{cases}$$
ist eine Brownsche Brücke.

. X_t ist klar ein Gaussche zentrierte stetiges Prozess und mit Kovarianz ($0 \le s < t \le 1$):

$$Cov(X_s, X_t) = (1-t)(1-s) \cdot \frac{s}{1-s} = (1-t) \cdot s$$

Lemma 7.17) $\begin{cases} (X_t)_{t\in[0,1)} \in S' \text{ mit } \langle X\rangle_t = t, \text{ aber} \\ \text{ist keine Brownsche Bewegung (weil ist} \\ \text{kein Martingal).} \end{cases}$

Beweis: Sei $\tilde{B}_t := B_{\frac{t}{1-t}}$. Dann ist $\tilde{B}$ ein Martingal bzgl. $\tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}_{t/1-t}$ und $\langle\tilde{B}\rangle_t = \frac{t}{1-t}$.

Dann, $X_t = (1-t)\tilde{B}_t$.

Wir anwenden Itô-Formel mit $F(t,\tilde{B}_t) = (1-t)\tilde{B}_t$

$\Rightarrow X_t = -\int_0^t \tilde{B}_s\,ds + \int_0^t (1-s)\,d\tilde{B}_s$, ($\Rightarrow X_t$ kein Martingal)

i.e., $dX_t = -\tilde{B}_t\,dt + (1-t)\,d\tilde{B}_t$.

Dann, $\langle X\rangle_t = \int_0^t (1-s)^2\,d\langle\tilde{B}\rangle_s = \int_0^t (1-s)^2\,d\left(\frac{s}{1-s}\right) = \int_0^t ds = t.$

$\zeta = \frac{s}{1-s}$

$d\zeta = \frac{ds}{(1-s)^2}$

#

compare

Bemerkung: Sei $V_t := X_t + \int_0^t \frac{X_s}{1-s}\,ds = \int_0^t (1-s)\,d\tilde{B}_s \in \mathcal{M}_{loc}$,

i.e., $dV_t = (1-t)\,d\tilde{B}_t \Rightarrow \langle V\rangle_t (= \langle X\rangle_t) = t$.

$\begin{cases} \Rightarrow (V_t)_{t\in[0,1)} \text{ ist eine 1-dim. BB bzgl. } \tilde{\mathcal{F}}_t, \\ \text{aber } V_t \neq B_t. \end{cases}$

Deshalb, $\boxed{dX_t = -\frac{X_t}{1-t}\,dt + dV_t}$ mit V_t eine B.B.

7.3.2) Ornstein-Uhlenbeck.

Def. 7.(8) Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine 1-d. Brownsche Bewegung.
Dann heisst $Y_t := \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{2\lambda}} B_{e^{2\lambda t}}$, $t \in \mathbb{R}$,
ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess.

Bedeutung: Das beschreibt die Bewegung einer Brownsche Teilchen in ein quadratische Potential: $U(x) = \lambda x^2$. (check it!)

Lemma 7.(9) $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+} \in S$ und $\langle Y \rangle_t = t$,
aber ist keine Brownsche Bewegung.

Beweis. $\tilde{B}_t := B_{e^{2\lambda t}}$ ist ein Mart. bzgl $\tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}_{e^{2\lambda t}}$.

Itô-Formel mit $F(t,x) = \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{2\lambda}} x$:

$$\Rightarrow dY_t = -\lambda Y_t\, dt + \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{2\lambda}} d\tilde{B}_t$$

$$\Rightarrow Y_t = Y_0 + \lambda \int_0^t Y_s\, ds + \int_0^t \frac{e^{-\lambda s}}{\sqrt{2\lambda}} d\tilde{B}_s$$

$$= Y_0 - \lambda \int_0^t \frac{e^{-\lambda s}}{\sqrt{2\lambda}} \tilde{B}_s\, ds + \int_0^t \frac{e^{-\lambda s}}{\sqrt{2\lambda}} d\tilde{B}_s \in S$$

(aber nicht $\in M_{loc}$) wegen

Und: $\langle Y \rangle_t = \int_0^t \frac{e^{-2\lambda s}}{2\lambda} d(e^{2\lambda s}) = \int_0^t \frac{\cancel{2\lambda}\, ds}{\cancel{2\lambda}} = t$. #

Bemerkung: Sei $W_t := Y_t - Y_0 + \lambda \int_0^t Y_s\, ds$

$$= \int_0^t \frac{e^{-\lambda s}}{\sqrt{2\lambda}} d\tilde{B}_s \in M_{loc} \quad \left(\Rightarrow dW_t = \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{2\lambda}} d\tilde{B}_t\right)$$

und $\langle W \rangle_t = \int_0^t \frac{e^{-2\lambda s}}{2\lambda} d(e^{2\lambda s}) = t$.

So, $(W_t)_{t\geq 0}$ ist eine B.B bzgl $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$, wobei $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{e^{2\lambda t}}$.

Aber $W_t \neq B_t$.

Letztlich: $\boxed{dY_t = -\lambda Y_t\, dt + dW_t}$ mit W_t eine B.B.

7.3.3) Bessel Prozesse.

- Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine d-dimensionelle Brownsche Bewegung und setzte

$$R_t := \|B_t\| = \sqrt{(B_t^1)^2 + \cdots + (B_t^d)^2}.$$

- Wir betrachten den Fall, dass die Brownsche Bewegung von $x \in \mathbb{R}^d$ statt $x=0$ anfängt.
Die Wahrscheinlichkeitsmass wird als $\mathbb{P}^x$ bezeichnet.

- Für ein $y \in \mathbb{R}^d$ mit $\|y\| = \|x\|$, existiert eine Rotation Matrix σ sd. $y = \sigma \cdot x$. σ ist orthogonal, so $|\det(\sigma)| = 1$.
- Da eine B.B die von 0 anfängt hat eine Verteilung die symmetrische um 0 herum.
- Deshalb die Verteilung von R_t nur abhängig von $\|x\|$:

$$\mathbb{P}^x(R_t \in dq) = \mathbb{P}^{(\|x\|, 0, \dots, 0)}(R_t \in dq).$$

- Definiere, $\forall r \geq 0$ $\quad \hat{\mathbb{P}}^r$ die W-mass mit

$$\hat{\mathbb{P}}^r(R_t \in dq) = \mathbb{P}^{(r, 0, \dots, 0)}(R_t \in dq),$$

Damit kann man Bessel prozesse definieren.

Def. 7.20) Für festes $r \geq 0$, $d \geq 2$, der Prozess $(R_t)_{t\geq 0}$, gegeben durch $(R_t = \|B_t\|)_{t\geq 0}$, auf dem W-raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \hat{\mathbb{P}}^r)$ heisst d-dimensionale Bessel Prozess startend in r.

Thm 7.21) Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine d-dim. B.B. startend in $x\in\mathbb{R}^d$, $d\geq 2$ und $(R_t)_{t\geq 0} = (\|B_t\|)_{t\geq 0}$ der d-dim. Bessel Prozess startend in $r=\|x\|\geq 0$. Dann:

ⓐ $X_t = \sum_{k=1}^{d} X_t^k$, mit $X_t^k := \int_0^t \frac{B_s^k}{R_s} dB_s^k$, ist eine standard 1-d. B.B.

ⓑ Im Differenzialform:

$$\boxed{dR_t = \frac{d-1}{2R_t}dt + dX_t} \quad (\text{mit } X_t \text{ eine BB}).$$

Beweis: · $\mathrm{Leb}(\{s\in[0,t] \text{ s.d. } R_s=0\}) \leq \mathrm{Leb}(\{s\in[0,t] \text{ s.d. } B_s^k=0\}) = 0$, deshalb sind X_t^k, $k=1,\dots,d$, wohldefiniert. (Zeit der B_s^k bleibt in 0)

ⓐ · X_t^k ist ein Martingal, weil $\frac{B_s^k}{R_s}$ ist stetiges und beschränkt: $\left|\frac{B_s^k}{R_s}\right| \leq 1$.

$$\cdot\ \langle X^k, X^e\rangle_t = \int_0^t \frac{B_s^k B_s^e}{R_s^2}\, d\langle B^k, B^e\rangle_s$$

$$= \delta_{k,e}\cdot\int_0^t \frac{(B_s^k)^2}{(R_s)^2} ds$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle X\rangle_t = \sum_{k,e=1}^{d}\langle X^k,X^e\rangle_t = \int_0^t \underbrace{\frac{\sum_{k=1}^d (B_s^k)^2}{(R_s)^2}}_{=1} ds = t.}$$

Dann, aus Thm 7.13 (Lévy Char.), es folgt, dass $(X_t)_{t\geq 0}$ ist eine 1-d. B.B. mit $X_0 = 0$.

ⓑ Wo wir aufpassen müssen ist wenn $\|B_t\| \not\approx 0$ ist.

~~Sei $F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$, und definiere, für $k\geq 1$, eine Funktion $F_k: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $F_k \in C^\infty$ und $F \equiv F_k$ auf $\{x: \|x\|\geq \frac{1}{k}\}$.~~

(b) Wo wir aufpassen müssen ist wenn $\|B_t\| \approx 0$.

- Aber in $d \geq 2$, die W-keit dass eine d-dim. B.B. die von $x \neq 0$ anfängt, den Ursprung erreicht ist Null (siehe auch ÜB 7, HA 1(ii)).

- Anderseits, auch wenn wir von $x=0$ anfangen, f.s. $\|B_\varepsilon\| > 0$, $\forall \varepsilon > 0$.

- Sei $F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \|x\|$
und für alle $k \geq 1$ definiere eine Funktion $F_k: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ s.d. $F_k \in C^2$ und $F_k \equiv F$ auf die Menge $\{x : \|x\| \geq 1/k\}$. [Eg, $F_k(x_1, \dots, x_d) = g_k(x_1^2 + \dots + x_d^2)$
wobei $g_k(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, & y \geq 1/k, \\ \text{Taylor Reihe 2ter Ordnung an } y = 1/k, & y < 1/k \end{cases}$]

- Definiere:
  - $T_{k,e} := \inf\{t \geq \frac{1}{e} \text{ s.d. } \|B_t\| < 1/k\}$
  $\xrightarrow{k \to \infty} \inf\{t \geq \frac{1}{e} \text{ s.d. } \|B_t\| = 0\} = \infty$ f.s. $(d \geq 2)$.

  - Itô-Formel gilt auf $\{(t,\omega) \mid T_{k,e}(\omega) \geq t > \frac{1}{e}\}$, d.h., $t > \frac{1}{e}$ und die Brownsche Bewegung bleibt mindestens auf $\frac{1}{k}$ Entfernung von der Ursprung. (wo $F_k = F$).

Auf diese Menge:

$$\Rightarrow F(B_t) = F(B_{1/e}) + \int_{1/e}^{t} \sum_{i=1}^{d} \partial_i F(B_s)\, dB_s^i + \int_{1/e}^{t} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i \partial_j F(B_s)\, d\langle B^i, B^j \rangle_s$$

und: $\partial_i F(B_s) = \dfrac{B_s^i}{\|B_s\|}$, $\quad \partial_i \partial_j F(B_s) = \dfrac{\delta_{ij}}{\|B_s\|} - \dfrac{B_s^i B_s^j}{\|B_s\|^3}$.

$$\Rightarrow \underbrace{F(B_t)}_{=R_t} = F(B_{1/e}) + \int_{1/e}^{t} \sum_{i=1}^{d} \frac{B_s^i}{\|B_s\|}\, dB_s^i + \frac{1}{2}\int_{1/e}^{t} \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{1}{\|B_s\|} - \frac{(B_s^i)^2}{\|B_s\|^3} \right) ds$$

$$= F(B_{1/e}) + X_t - X_{1/e} + \int_{1/e}^{t} \frac{d-1}{2\cdot\|B_s\|}\, ds$$

- Im $k\to\infty$ Limes, $T_{k,1/e}(\omega) \geq t$ f.s..

$$\Rightarrow R_t = R_{1/e} + X_t - X_{1/e} + \int_{1/e}^{t} \frac{d-1}{2R_s}\, ds.$$

- letztlich, wegen Stetigkeit von $R_\cdot$ und $X_\cdot$,

$$R_t = R_0 + X_t - X_0 + \int_0^t \frac{d-1}{2R_s}\, ds \quad \text{f.s.} \qquad \#$$

- Hier sind einige Eigenschaften von Bessel Prozesse und (ohne Beweise) Brownsche Bewegung.

Prop. 7.22)
(a) $d=1, \alpha\geq 0$: $\mathbb{P}^x(\|B_t\| = \alpha \text{ für ein } t>0) = 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$

(b) $d=2, \alpha>0$: $\mathbb{P}^x(\|B_t\| = \alpha \text{ für ein } t>0) = 1$, $\forall x\in\mathbb{R}^2$.

(c) $d=3, \alpha>0$: $\mathbb{P}^x(\|B_t\| = \alpha \text{ für ein } t>0) = \left(\min\left\{1, \frac{\alpha}{\|x\|}\right\}\right)^{d-2}$

(d) $d\geq 2$: $\mathbb{P}^x(\|B_t\| = 0 \text{ für ein } t>0) = 0$, $\forall x\in\mathbb{R}^d$.

(e) $d\geq 3$: $\mathbb{P}^x(\lim_{t\to\infty} \|B_t\| = \infty) = 1$.

$\Rightarrow$ Die Brownsche Bewegung auf $\mathbb{R}^d$ ist transient für $d\geq 3$ und rekurrent falls $d\leq 2$.

. Parenthesis:

. Brownsche Bewegung ist mit dem Semigroup

e^{-tH_0}, wobei $H_0 = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$, verbunden.

. In der Tat, e^{-tH_0} hat den Integral Kernel:

$$P_t(x,y) = \langle y, e^{-tH_0} x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{1}{2t}|x-y|^2}.$$

$\Rightarrow$ Für $f \in L^2(\mathbb{R})$, $(e^{-tH_0} f)(x) = \int_{\mathbb{R}} P_t(x,y) f(y)\, dy$.

. Prop 7.23) Seien $f_1, \dots, f_{n-1} \in L^\infty(\mathbb{R})$, $f_n \in L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R})$ und $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n$; und $(B_t)_{t \geq 0}$ eine 1d BB.

Dann:

$$\mathbb{E}(f_1(B_{s_1}) \cdots f_n(B_{s_n})) =$$

$$= (e^{-t_1 H_0} f_1\, e^{-t_2 H_0} f_2 \dots e^{-t_n H_0} f_n)(0),$$

wobei $t_1 = s_1$, $t_2 = s_2 - s_1, \dots, t_n = s_n - s_{n-1}$.

Beweis:

$$\mathbb{E}(f_1(B_{s_1}) \dots f_n(B_{s_n})) = \int_{\mathbb{R}} dx_1 \dots \int_{\mathbb{R}} dx_n\, P_{t_1}(0,x_1) P_{t_2-t_1}(x_1,x_2) \cdots P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},x_n) \cdot f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) \;\#$$

. Frage: Was ist die analogue Formula für ein OU process statt eine B.B?

. Betrachten wir: . $L_0 := -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$. ($\to$ diskrete Spektrum)

. Die Eigenfunktion mit dem kleinste Eigenwert ist

$\Omega_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ und

$$L_0 \Omega_0 = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} |\Omega_0|^2 dx = 1.$$

. Zusätzlich: $x\Omega_0$ ist ein EV von L_0:

$$L_0(x\Omega_0) = x\Omega_0 \text{ und } \int x^2 |\Omega_0|^2 dx = \frac{1}{2}.$$

. Prop 7.2(4) Seien $f_0, \dots, f_n \in L^\infty(\mathbb{R})$ und $-\infty < s_0 < \dots < s_n < \infty$.
~~Sei Y_t ein OU (mit $\lambda = 1$).~~
Dann,

$$\mathbb{E}(f_0(Y_{s_0}) \dots f_n(Y_{s_n})) =$$

$$= (\Omega_0, f_0 e^{-(s_1 - s_0)L_0} f_1 \dots e^{-(s_n - s_{n-1})L_0} f_n \Omega_0). \quad (*)$$

. Beweis: Sei $t_i := s_i - s_{i-1}$.

$$(*) \overset{\text{Trotter}}{=} \lim_{m \to \infty} (\Omega_0, f_0 (e^{-t_1 \frac{H_0}{m_1}} e^{-t_1 \frac{W}{m_1}})^{m_1} f_1 \dots f_n \Omega_0) \quad (**)$$

wobei $\vec{m} = (m_1, \dots, m_n)$, $W(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.

. $\forall$ festes $\vec{m}$, $(**) = \int f_0(x_0) \dots f_n(x_n)\, dG_{\vec{m}}(x, y)$

wobei $G_{\vec{m}}$ ist eine Gaussche Mass in x and y.

$\int_y dG_{\vec{m}}(x, y)$ ist noch Gaussche und ein limes

von Gaussche ist Gaussche

$$\Rightarrow (*) = \int f_0(x_0) \dots f_n(x_n)\, dG(x) \quad ; x = (x_1, \dots, x_n)$$

. Für $i < j$: $\int x_i x_j\, dG \equiv (x\Omega_0, e^{-(s_j - s_i)L_0} x\Omega_0)$

$$= \frac{1}{2} e^{-(s_j - s_i)}, \text{ weil}$$

$$L_0(x\Omega_0) = x\Omega_0; \quad \int x^2 |\Omega_0|^2 dx = 1/2.$$

$\Rightarrow dG$ ist die Verteilung von $Y_{s_0}, \dots, Y_{s_n}$. #

Kernel von e^{-tL_0} ist

$$(e^{-tL_0}f)(x) = \int_{\mathbb{R}} Q_t(x,y) f(y)\,dy$$

$$(g, e^{-tL_0} f) = (\Omega_0, \Omega_0^{-1} g\, e^{-tL_0} f \Omega_0^{-1}, \Omega_0)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} f(y)\, \Omega_0^{-1}(y)\, g(x)\, \Omega_0^{-1}(x)\, dG(x,y)$$

wobei dG ist Gaussche mit Kovarianz Matrix

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^{-t} \\ e^{-t} & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrix inversion $\Rightarrow$ $$\boxed{dG(x,y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \cdot e^{-x^2} \cdot e^{-\frac{(y-e^{-t}x)^2}{1-e^{-2t}}}}$$

d.h. $$Q_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{1-e^{-2t}}} \cdot e^{-\frac{(x^2+y^2)(1+e^{-2t})}{2(1-e^{-2t})}} \cdot e^{\frac{-2e^{-t}xy}{1-e^{-2t}}}.$$

8) Stochastische Differenzialgleichungen (SDE).

Problem: Nehmen wir an, dass wir für ein bestimmtes Problem ein Model erfunden haben, wo die Evolution einer Grösse $X \in \mathbb{R}^d$ ist durch eine Gleichung der Form

$$\text{(EQ 1)} \quad \begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dW_t \\ X_0 = \xi \end{cases}$$

Fragen: ① Existiert eine Lösung von (EQ1)? ② Ist die Lösung eindeutig?

wobei:
- $b(t,x) = [b_i(t,x)]_{1 \le i \le d}$: Drift-Vektor
- $\sigma(t,x) = [\sigma_{ij}(t,x)]_{\substack{1 \le i \le d \\ 1 \le j \le n}}$: Dispersionmatrix

unabhängig:
- $(W_t)_{t \ge 0}$ eine n-dim. Brownsche Bewegung.
- $\xi \in \mathbb{R}^d$ ein zufälligen Vektor (Anfangsbedingung)

- $(X_t)_{t \ge 0}$ ein d-dim. Semimartingal.

. . . . .

Annahmen: $\forall i,j$,
- $b_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Borel-messbar,
- $\sigma_{ij} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ "
- $a_{ij} := (\sigma\sigma^T)_{ij} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ "

Notation: $a(t,x) = [a_{ij}(t,x)]_{1 \le i,j \le d}$ wobei $a_{ij}(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}(t,x)\sigma_{jk}(t,x)$

heisst die Diffusionsmatrix.

Def. 8.1) Wir definierten die folgenden Normen:

$$\|b(t,x)\| := \left(\sum_{i=1}^{d} b_i^2(t,x)\right)^{1/2},$$

$$\|\sigma(t,x)\| := \left(\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2(t,x)\right)^{1/2}.$$

8.1) Starke Lösungen

. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ ein standard filtrierter W-raum.
(Insbesondere, wenn $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$ ist die Filtration, von der BB. W erzeugte
dann $\mathcal{F}_t$ = Augmentierung von $\sigma(\xi, W_s, 0\leq s\leq t)$.).

. Zuerst definieren wir, was eine Starke Lösung ist und danach werden wir ~~mit~~ der Existenz und Eindeutigkeit Fragen beschäftigen.

Def. 8.2) Eine starke Lösung von (EQ1) ist ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozess $X=(X_t)_{t\geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert mit:

ⓐ $X_0 = \xi$ f.s.

ⓑ X ist an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptiert ($\mathcal{F}_t$ von oben).

ⓒ X ist ein stetiges Semimartingal s.d. $\forall t\in[0,\infty)$,

$$\int_0^t \left(\|b(s,X_s)\| + \|\sigma(s,X_s)\|^2\right) ds < \infty \quad \text{f.s.}$$

(d) X löst die stochastische Integralgleichung:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s \quad , 0 \le t < \infty \text{ f.s.}$$

Bemerkungen: (a) Anfangsbedingung

(b) Kausalitätprinzip: X_t ist (im Wesentlichen) Funktion von ξ und $\{W_s ; 0 \le s \le t\}$, d.h., output zur Zeit t hängt nur ab vom Input bis zur Zeit t.

(c) Technische Bedingung für (d).

(d) Integralform von (EQ1).

Def. 8.3) Für (EQ1) (mit den Annahmen) gilt starke Eindeutigkeit wenn $\forall X, \tilde{X}$ starke Lösungen von (EQ1) sind X und $\tilde{X}$ ununterscheidbar.

. Das Problem von Eindeutigkeit ist nicht trivial.

Zum Beispiel; $\sigma = 0$, $b(t,x) = |x|^{\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$ und $\xi \equiv 0$.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = |x|^{\alpha}. \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

. Für $\alpha \geq 1$, hat man Eindeutigkeit mit $X(t) \equiv 0$.

. Für $0 < \alpha < 1$, es gibt ∞-viele Lösungen:

$$X_t := \begin{cases} 0, & 0 \le t \le T \\ ((1-\alpha)(t-T))^{\frac{1}{1-\alpha}}, & T \le t < \infty \end{cases}$$

löst (*), $\forall\, T \geq 0$.

Thm. 8.4) (Eindeutigkeit) Wenn b und σ lokal Lipschitz-stetig sind in x, dann gilt starke Eindeutigkeit für (EQ1).

: b und σ lokal Lipschitz-stetig in x bedeutet:
$\forall n \geq 1, \exists K_n < \infty$ s.d. $\forall t \geq 0$, $\|x\| \leq n$ und $\|y\| < n$, gilt

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K_n \cdot \|x-y\|.$$

Zum Beweis brauchen wir noch die folgende Ungleichung.

Lem. 8.5) (Gronwall Ungleichung)

- Seien $g: [0,T] \to \mathbb{R}$ stetig,
  $h: [0,T] \to \mathbb{R}$ integrierbar, und $\beta \geq 0$.
- Wenn $0 \leq g(t) \leq h(t) + \beta \int_0^t g(s)\,ds \quad, \forall t \in [0,T]$,

  dann $g(t) \leq h(t) + \beta \cdot \int_0^t h(s) e^{\beta(t-s)}\,ds, \ \forall t \in [0,T]$.
- Insbesondere, falls h monoton steigend ist,
  dann $g(t) \leq h(t) \cdot e^{\beta t}$.

Beweis:
$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\beta t} \int_0^t g(s)\,ds\right) = -\beta e^{-\beta t} \int_0^t g(s)\,ds + e^{-\beta t} \cdot g(t)$$
$$= e^{-\beta t}\left(g(t) - \beta \int_0^t g(s)\,ds\right) \underset{hyp.}{\leq} h(t) e^{-\beta t}$$
$$\Rightarrow e^{-\beta t} \int_0^t g(s)\,ds \leq \int_0^t h(s) e^{-\beta s}\,ds$$
$$\Rightarrow g(t) \overset{hyp}{\leq} h(t) + \beta \int_0^t g(s)\,ds \leq h(t) + \beta \cdot \int_0^t h(s) e^{\beta(t-s)}\,ds.$$

#

(Bem.: Falls $h=0$, d.h. $\alpha g(t) \le \beta \int_0^t g(s)\,ds \Rightarrow g \equiv 0$.)

Beweis von Thm. 8.4). Nehmen wir an, dass X und $\tilde{X}$ starke Lösungen von (EQ1) sind.

Zu zeigen, $\mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t,\ t \ge 0) = 1$.

. Wir definieren die Stoppzeiten: $\forall m \ge 1$,

$$\tau_m = \inf\{t \ge 0 \text{ s.d. } \|X_t\| \ge m\}$$
$$\tilde{\tau}_m = \inf\{t \ge 0 \text{ s.d. } \|\tilde{X}_t\| \ge m\}$$

und $S_m = \tau_m \wedge \tilde{\tau}_m$.

. $\lim_{m\to\infty} S_m = \infty$ f.s. ... (klar).

. $$X_{t\wedge S_m} - \tilde{X}_{t\wedge S_m} = \int_0^{t\wedge S_m} \left(b(u,X_u) - b(u,\tilde{X}_u)\right) du + \int_0^{t\wedge S_m} \left(\sigma(u,X_u) - \sigma(u,\tilde{X}_u)\right) dW_u.$$

. Sei dann

$$g(t) = \mathbb{E}\left(\|X_{t\wedge S_m} - \tilde{X}_{t\wedge S_m}\|^2\right)$$
$$= \sum_{i=1}^d \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge S_m} \left(b_i(u,X_u) - b_i(u,\tilde{X}_u)\right) du + \sum_{j=1}^n \int_0^{t\wedge S_m} \left(\sigma_{ij}(u,X_u) - \sigma_{ij}(u,\tilde{X}_u)\right) dW_u^j\right]^2$$
$$\underset{(\alpha+\beta)^2 \le 2(\alpha^2+\beta^2)}{\le} 2\cdot\sum_{i=1}^d \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge S_m} \left(b_i(u,X_u) - b_i(u,\tilde{X}_u)\right) du\right)^2 + 2\sum_{i=1}^d \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n \int_0^{t\wedge S_m} \left(\sigma_{ij}(u,X_u) - \sigma_{ij}(u,\tilde{X}_u)\right) dW_u^j\right)^2$$
$$\overset{\text{C.S.}}{\le} 2\cdot\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge S_m} \left(\sum_{i=1}^d \left(b_i(u,X_u) - b_i(u,\tilde{X}_u)\right)^2 du\right)\right]\cdot\left(\int_0^t 1^2\,du\right)$$
$$\xrightarrow[d\langle W^i, W^j\rangle_u = \delta_{ij}\,du]{\text{Itô-Isometrie}} 2\cdot\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^n \int_0^{t\wedge S_m} \left(\sigma_{ij}(u,X_u) - \sigma_{ij}(u,\tilde{X}_u)\right)^2 du\right)$$

$$= 2 \cdot t \cdot \mathbb{E}\left(\int_0^{t \wedge S_m} \underbrace{\|b(u,X_u) - b(u,\tilde{X}_u)\|^2}_{\leq K_m^2 \|X_u - \tilde{X}_u\|^2} du \right)$$

$$+ 2 \cdot \mathbb{E}\left(\int_0^{t \wedge S_m} \underbrace{\|\sigma(u,X_u) - \sigma(u,\tilde{X}_u)\|^2}_{\leq K_m^2 \|X_u - \tilde{X}_u\|^2} du \right)$$

$\Rightarrow$ Für $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathbb{E}\left(\|X_{t \wedge S_m} - \tilde{X}_{t \wedge S_m}\|^2 \right) \\ &\leq 2 \cdot (T+1) \cdot K_m^2 \int_0^t \mathbb{E}\left(\|X_{u \wedge S_m} - \tilde{X}_{u \wedge S_m}\|^2 \right) du \\ &= \underbrace{2(T+1) K_m^2}_{\doteq \beta \text{ in Gronwall-Lemma}} \cdot \int_0^t g(u)\, du. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall m \geq 1,\ t \in [0,T]$,

$$0 = g(t) = \mathbb{E}\left(\|X_{t \wedge S_m} - \tilde{X}_{t \wedge S_m}\|^2 \right)$$

$\Rightarrow$ X^{S_m} und $\tilde{X}^{S_m}$ sind ununterscheidbar, $\forall m \geq 1$,

und da $S_m \nearrow \infty$ f.s. (als $m \to \infty$),

X und $\tilde{X}$ sind ununterscheidbar. #.

__Bem.__: Für globale Existenz ist __lokal__ Lipschitz-Stetigkeit nicht genug.

__Zum Beispiel__: $\sigma \equiv 0$, $b(t,x) = |x|^2$, $X_0 = 1$, $d = 1$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dX}{dt} = |x|^2 \\ x_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow X_t = \frac{1}{1-t}, \text{ der } \underline{\text{explodiert}} \text{ für } t \nearrow 1.$$

. Wir haben gesehen, dass Eindeutigkeit folgt aus der lokalen Lipschitz-stetigkeit für σ und b.
. Wir wissen auch, dass diese Bedingung ist nicht ausreichend für die Existenz von globalen Lösungen (d.h., $\forall t \geq 0$).

Thm. 8.6) (Existenz) Sei $\mathbb{E}(\|\xi\|^2) < \infty$. Dazu, $\exists K > 0$ s.d.

. globale Lipschitz: $\forall t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K \cdot \|x-y\|$$

. lineare Wachstumsbedingung: $\forall t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$\|b(t,x)\| + \|\sigma(t,x)\| \leq K(1 + \|x\|).$$

Dann: (a) Existiert (und wegen Thm 8.4 ist Eindeutig) eine starke Lösung von (EQ1)

(b) Für alle $T \geq 0$, $\exists C > 0$ s.d.

$$\mathbb{E}(\|X_t\|^2) \leq C \cdot (1 + \mathbb{E}(\|\xi\|^2)), \ \forall 0 \leq t \leq T.$$

. Idee: "Fix-point Iteration":

. Fangen wir mit $X_t^{(0)} \equiv \xi$.
Sei $\varphi(X_t^{(k)}) \equiv \xi + \int_0^t b(s, X_s^{(k)})\,ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(k)})\,dW_s$
und definiere $X_t^{(k+1)} := \varphi(X_t^{(k)})$, $k \geq 0$.

. Diese Prozesse sind stetig und an $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ adaptiert.
. Die Hoffnung ist, dass die Folge $\{X_t^{(k)}\}_{k \geq 0}$ gegen einer Lösung von (EQ1) konvergiert.

Zuerst ein Lemma: **Lemma 8.7)** Für alle $T>0$, $\exists\, C>0$ (von K und T abhängig) s.d. für alle $k\geq 0$,

$$\mathbb{E}(\|X_t^{(k)}\|^2) \leq C \cdot (1+\mathbb{E}(\|\xi\|^2)), \circledast$$

$\forall\, 0\leq t\leq T$.

Beweis: Für $k=0$ gilt. In der Tat:

$$\mathbb{E}(\|X_t^{(0)}\|^2) = \mathbb{E}(\|\xi\|^2) \leq 1+\mathbb{E}(\|\xi\|^2).$$

$$\mathbb{E}(\|X_t^{(m+1)}\|^2) = \sum_{i=1}^d \mathbb{E}((X_t^{(m+1),i})^2) \quad \text{mit}$$

$$X_t^{(m+1),i} = \xi^i + \int_0^t b_i(s,X_s^{(m)})ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t \sigma_{ij}(s,X_s^{(m)})dW_s$$

$$\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k\right)^2 \leq n\cdot \sum_{k=1}^n \alpha_k^2$$

$$\leq 3\sum_{i=1}^d \mathbb{E}\left[(\xi^i)^2 + \left(\int_0^t b_i(s,X_s^{(m)})ds\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n \int_0^t \sigma_{ij}(s,X_s^{(m)})dW_s\right)^2\right]$$

Cauchy-Schwarz an b, Itô-Isometrie an σ

$$= 3\cdot\mathbb{E}(\|\xi\|^2) + 3\cdot t\cdot \mathbb{E}\left(\int_0^t \underbrace{\|b(s,X_s^{(m)})\|^2}_{\leq 2K^2(1+\|X_s^{(m)}\|^2)}ds\right) + 3\cdot\mathbb{E}\left(\int_0^t \underbrace{\|\sigma(s,X_s^{(m)})\|^2}_{\leq 2K^2(1+\|X_s^{(m)}\|^2)}ds\right)$$

Lineare Wachstumsb., $t\leq T$

$$\leq 3\cdot\mathbb{E}(\|\xi\|^2) + 6K^2(T+1)\cdot\left(T+\int_0^t \|X_s^{(m)}\|^2 ds\right)$$

$\Rightarrow$ Wir haben die Iterationsformel:

$$\mathbb{E}(\|X_t^{(m+1)}\|^2) \leq C_0(1+\mathbb{E}(\|\xi\|^2)) + C_0\cdot\int_0^t \mathbb{E}(\|X_s^{(m)}\|^2)ds$$

mit $C_0 = \max\{3, 6K^2(T+1)^2\}$,

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\|X_t^{(m+1)}\|^2) \leq C_0\cdot(1+\mathbb{E}(\|\xi\|^2))\cdot\left\{1+C_0t+\frac{(C_0t)^2}{2!}+\dots+\frac{(C_0t)^{m+1}}{(m+1)!}\right\}$$

Wobei benutzt man: $\int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_{m-1}} ds_m 1 = \frac{t^m}{m!}$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\|Y_t^{(m+1)}\|^2) \leq \underbrace{C_0' \cdot e^{C_0 \cdot T}}_{\equiv C'} \cdot (1 + \mathbb{E}(\|\xi\|^2)).$$

für $0 \leq t \leq T$.

#

- Wenn $X_t^{(k)}$ konvergiert gegen X_t, Lösung von (EQ1), dann Thm. 8.6 (b) wird eine Folge von Lemma 8.7.
- Jetzt beweisen wir Thm. 8.6.

Beweis von Thm. 8.6)

(1) Wenn $X^{(k)}$ stetig, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptiert und wohldefiniert (es ist für $k=0$), dann so ist $X^{(k+1)}$.

Wir brauchen nur zu überprüfen ob Bedingung (c) von Def 8.2 gilt:

$$\int_0^t (\|b(s, X_s^{(k)})\| + \|\sigma(s, X_s^{(k)})\|^2)\, ds$$

$$\leq t \cdot \int_0^t \|b(s, X_s^{(k)})\|^2 ds + \int_0^t \|\sigma(s, X_s^{(k)})\|^2 ds$$

$$\underset{0\leq t\leq T}{\leq} 2K^2(T+1) \cdot \int_0^t (1 + \|X_s^{(k)}\|^2) ds < \infty \text{ f.s.},$$

wegen $X_t^{(k)}$ wohldefiniert und stetig.

(2) Abschätzung von $X^{(k+1)} - X^{(k)}$:

- Für festes k: $X^{(k+1)} - X^{(k)} = B + M$, wobei

$$B_t = \int_0^t (b(s, X_s^{(k)}) - b(s, X_s^{(k-1)}))\, ds \quad \text{und}$$

$$M_t = \int_0^t (\sigma(s, X_s^{(k)}) - \sigma(s, X_s^{(k-1)}))\, dW_s.$$

$$\cdot\ \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\|M_s\|^2\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\sum_{i=1}^d (M_s^i)^2\right]$$

$$\le \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^d \sup_{0\le s\le t}(M_s^i)^2\right)$$

$$\overset{\text{Doob}}{\le} 4\cdot\sum_{i=1}^d \mathbb{E}\left((M_t^i)^2\right)$$

$$= 4\cdot\sum_{i=1}^d \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n\int_0^t \left(\sigma_{ij}(s,X_s^{(k)}) - \sigma_{ij}(s,X_s^{(k-1)})\right)dW_s^j\right)^2$$

Itô-Isometrie: $dW_s^i dW_s^j = \delta_{ij}\,ds$

$$= 4\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left(\int_0^t \left(\sigma_{ij}(s,X_s^{(k)}) - \sigma_{ij}(s,X_s^{(k-1)})\right)^2 ds\right)$$

$$= 4\cdot\mathbb{E}\left(\int_0^t \underbrace{\|\sigma(s,X_s^{(k)}) - \sigma(s,X_s^{(k-1)})\|^2}_{\le K^2\|X_s^{(k)}-X_s^{(k-1)}\|^2} ds\right)$$

$$\le 4K^2\cdot\mathbb{E}\left(\int_0^t \|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\|^2 ds\right).$$

. Anderseits, es gilt:

$$\cdot\ \|B_t\|^2 = \sum_{i=1}^d (B_t^i)^2 = \sum_{i=1}^d\left(\int_0^t\left(b(s,X_s^{(k)}) - b(s,X_s^{(k-1)})\right)ds\right)^2$$

$$\underset{C.S.}{\overset{0\le t\le T}{\le}} T\cdot\sum_{i=1}^d\int_0^t\left(b(s,X_s^{(k)}) - b(s,X_s^{(k-1)})\right)^2 ds$$

$$= T\cdot\int_0^t \underbrace{\|b(s,X_s^{(k)}) - b(s,X_s^{(k-1)})\|^2}_{\le K^2\|X_s^{(k)}-X_s^{(k-1)}\|^2} ds$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\|B_s\|^2\right] \le K^2 T\cdot\mathbb{E}\left(\int_0^t \|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\|^2 ds\right).$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\|X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\|^2\right] \le 2\cdot\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t}\|M_s\|^2\right) + 2\cdot\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t}\|B_s\|^2\right)$$

$$\le 2K^2(4+T)\int_0^t \mathbb{E}\left(\|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\|^2\right)ds.$$

. Sei $C_1 = 2k^2(4+T)$. Dann Iterationen

$\left(\mathbb{E}\left(\|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\|^2\right) \leq \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq u\leq s} \|X_u^{(k)} - X_u^{(k-1)}\|^2\right)\right)$.

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t} \|X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\|^2\right) \leq \frac{(C_1 t)^k}{k!} \cdot \mathbb{E}\left(\int_0^t \|X_s^{(1)} - \xi\|^2 ds\right)}$$

$$\boxed{\leq \frac{(C_1 t)^k}{k!} \cdot C_2 < \infty}, \quad (*)$$

wobei $C_2 = T \cdot \sup_{0\leq s\leq T} \mathbb{E}\left(\|X_s^{(1)} - \xi\|^2\right) < \infty$.

Lemma 8.7 und $\mathbb{E}(\|X_s^{(1)} - \xi\|^2) \leq$
$\leq 2 \cdot \left[\mathbb{E}(\|X_s^{(1)}\|^2) + \mathbb{E}(\|\xi\|^2)\right]$

③ Uniform Konvergenz auf $[0,T]$:

. Tschebishev + $(*)$ $\Rightarrow \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq T} \|X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\| \geq \frac{1}{2^{k+1}}\right) \leq$

$$\leq 4\, C_2 \cdot \frac{(4 C_1 T)^k}{k!}.$$

. Die Summe über $k\geq 0$ von ist konvergent, deshalb aus Borel-Cantelli I, folgt

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq T} \|X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\| \geq \frac{1}{2^{k+1}} \text{ für unendlich viele } k\in\mathbb{N}\right) = 0,$$

i.e., $\exists\, \Omega^*$ mit $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$ und ein $N(\omega)$ s.d.

$$\forall\, \omega\in\Omega^*, \quad \sup_{0\leq s\leq T} \|X_{s(\omega)}^{(k+1)} - X_{s(\omega)}^{(k)}\| \leq 2^{-(k+1)} \;\forall\, k\geq N(\omega).$$

$\Rightarrow \forall\, m\geq 1,\ k\geq N(\omega)$,

$$\sup_{0\leq s\leq T} \|X_{s}^{(k+m)}(\omega) - X_s^{(k)}(\omega)\| \leq 2^{-k}.$$

. So, die Folge $\{X_t^{(k)}(\omega),\ 0\leq t\leq T\}_{k\geq 1}$ konvergiert in sup-norm gegen ein stetiger Prozess $\{X_t(\omega),\ 0\leq t\leq T\}$, $\forall\, \omega\in\Omega^*$.

- Da T ist beliebig, wir haben ein stetiger Prozess $X = \{X_t, 0 \le t < \infty\}$ s.d., fast sicher,

$$X^{(k)} \longrightarrow X \quad \text{uniform auf kompakten Mengen}$$

von $[0,\infty)$.

④ Eigenschaft ⓑ:

$$\mathbb{E}(\|X_t\|^2) = \mathbb{E}\Big(\lim_{k\to\infty} \|X_t^{(k)}\|^2\Big) \quad \Big(= \mathbb{E}\big(\liminf_{k\to\infty} \|X_t^{(k)}\|^2\big)$$

weil limes existiert

$$\overset{\text{Fatou}}{\le} \liminf_{k\to\infty} \underbrace{\mathbb{E}(\|X_t^{(k)}\|^2)}_{\underset{\text{Lemma 8.7}}{\le} d\cdot(1+\mathbb{E}(\|\xi\|^2))} \le d\cdot(1+\mathbb{E}(\|\xi\|^2)).$$

⑤ Wir müssen nur noch sehen, dass $X_t := \lim_{k\to\infty} X_t^{(k)}$

löst die SDE (EQ1)!

$$\begin{array}{ccccccc} X_t^{(k+1)} & = & \xi & + & \int_0^t b(s,X_s^{(k)})\,ds & + & \int_0^t \sigma(s,X_s^{(k)})\,dW_s \\ \big\downarrow \text{ok} & & & & \big\downarrow ?\,ⓐ & & \big\downarrow ?\,ⓑ \\ X_t & & & & \int_0^t b(s,X_s)\,ds & & \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dW_s \end{array}$$

- Aus oben $\Rightarrow \forall \omega \in \Omega^*, k \ge N(\omega)$,

$$\sup_{0\le s\le T} \|X_s(\omega) - X_s^{(k)}(\omega)\| \le 2^{-k}. \quad (\ast\ast)$$

ⓐ. Aus Globale Lipschitz (wie oben im $\|B_t\| \le \dots$):

$\Rightarrow \forall 0\le t\le T$: $$\Big\|\int_0^t b(s,X_s)\,ds - \int_0^t b(s,X_s^{(k)})\,ds\Big\|^2 \le K^2 T \cdot \int_0^T \|X_s - X_s^{(k)}\|^2\,ds \xrightarrow[k\to\infty]{(\ast\ast)} 0 \text{ f.s.}$$

ⓑ ~~$X_t^{(k)} \xrightarrow{f.s.} X_t \Rightarrow X_t^{(k)} \xrightarrow{L^2} X_t$, so ist $(X_t^{(k)})_{k\ge 0}$ eine Cauchy-Folge in L^2 und (siehe ④) $\mathbb{E}(\|X_t\|^2)$ ist uniform beschränkt auf kompakten Mengen von $[0,\infty)$.~~ Wake unpräzise.

(b) Aus (✱), d.h.,

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}\|X_s^{(k+1)}-X_s^{(k)}\|^2\Big)\le \frac{(C_1 t)^k}{k!}\cdot C_2,$$

folgt: $\forall t\in[0,T]$, $(X_t^{(k)})_{k\ge1}$ ist eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.

- In der Tat: $\forall m\ge1$,

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}\|X_s^{(k+m)}-X_s^{(k)}\|^2\Big)\le$$

$$\le \mathbb{E}\Big[\sup_{0\le s\le t}\Big(2\|X_s^{(k+m)}-X_s^{(k+1)}\|^2+2\cdot\|X_s^{(k+1)}-X_s^{(k)}\|^2\Big)\Big]$$

$$\underset{\text{Iterationen}}{\le}\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}\sum_{e=0}^{m-1}\|X_s^{(k+e+1)}-X_s^{(k+e)}\|^2\cdot 2^{e+1}\Big)$$

$$\le\sum_{e=0}^{m-1}2^{e+1}\,\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}\|X_s^{(k+e+1)}-X_s^{(k+e)}\|^2\Big)$$

$$\le\sum_{e=0}^{m-1}2^{e+1}\cdot\frac{(C_1\cdot t)^{k+e}}{(k+e)!}\cdot C_2\underset{(k+e)!\ge k!e!}{\le}2C_2\frac{(C_1t)^k}{k!}\underbrace{\sum_{e=0}^{m-1}\frac{(2C_1t)^e}{e!}}_{\le e^{2C_1t}}.$$

$$\le\underbrace{e^{2C_1T}\,2C_2\cdot}_{\text{unab. von } m}\frac{(C_1T)^k}{k!}\xrightarrow[k\to\infty]{}0.\quad (✱✱✱)$$

- Die Cauchy-Folge $(X_t^{(k)})_{k\ge1}$ konvergiert f.s. gegen X_t
$\Rightarrow X_t^{(k)}\to X_t$ in L^2.

(- Zusätzlich haben wir schon aus (a): $\sup_{k\ge1}\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}(\|X_t^{(k)}\|^2)<\infty$
und $\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}(\|X_t\|^2)<\infty$.)

- Dann, $\mathbb{E}\Big(\|\int_0^t\sigma(s,X_s)\,dW_s-\int_0^t\sigma(s,X_s^{(k)})\,dW_s\|^2\Big)=$

$$\underset{\text{(Itô-Isometrie)}}{=}\mathbb{E}\Big(\int_0^t\|\sigma(s,X_s)-\sigma(s,X_s^{(k)})\|^2ds\Big)$$

$$\le K^2\cdot\mathbb{E}\Big(\int_0^t\|X_s-X_s^{(k)}\|^2ds\Big)\xrightarrow{k\to\infty}0$$

weil $X_t^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}X_t$ in L^2.

So, $\mathbb{P}\left(\left\| \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dW_s - \int_0^t \sigma(s,X_s^{(k)})\,dW_s\right\| \geq \frac{1}{2^k}\right) \leq$

$$\overset{\text{Tcheb.}}{\leq} 2^k \cdot K^2 \cdot \mathbb{E}\left(\int_0^t \|X_s - X_s^{(k)}\|^2 ds\right)$$

$$\leq K^2 \cdot T \cdot 2^k \cdot \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq T} \|X_s - X_s^{(k)}\|^2\right)$$

$$\overset{(***)}{\leq} K^2 \cdot T \cdot \text{"} \tilde{C} \frac{(2C_1 T)^k}{k!} \Rightarrow \text{Borel-Cantelli} \Rightarrow$$

(und (b) + dom. Kvg.),

$$\Rightarrow \forall t \in [0,T]: \left\| \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dW_s - \int_0^t \sigma(s,X_s^{(k)})\,dW_s \right\| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \text{ f.s.}$$

#

Prop. 8.8) Wie im Thm 8.6 aber ohne Einschränkungen an ξ
$\Rightarrow$ $\exists$ eindeutige starke Lösung.

Beweis: (Idee) (Sketch) $\forall n \geq 1$ definiere $\xi_n := \xi \cdot \mathbb{1}_{\{|\xi|\leq n\}}$ und X^n die eindeutige starke Lösung zur Anfangsbedingung ξ_n.
$\Rightarrow \forall T$ und für alle $m > n$,

$$\sup_{0\leq s\leq T} \|X_s^n - X_s^m\| = 0 \text{ f.s. auf } \{\omega \text{ s.d. } |\xi(\omega)| \leq n\}.$$

. Dazu, $\mathbb{P}(|\xi(\omega)| \leq n) \xrightarrow{n\to\infty} 1$ (sonst ξ ist keine wohldefinierte Z.V.).

und $\exists$ Prozess X mit $X = \lim_{n\to\infty} X^n$. #

8.2) Beispiele

8.2.1) Brownsche Bewegung mit drift

. Sei $v \in \mathbb{R}^d$, $0 < \sigma \in \mathbb{R}$ eine Konstante.

Dann, die SDE

$$dX_t = v\,dt + \sigma\,dW_t$$

hat eine eindeutige starke Lösung

$$X_t = X_0 + vt + \sigma W_t$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0) + v \cdot t$ $\qquad$ v ist der Drift

. Wenn $X_0 =$ Konstant, $Cov(X_t^i, X_t^j) = \sigma^2 Cov(W_t^i, W_t^j) = \sigma^2 t \cdot \delta_{ij}$.

8.2.2) Ornstein-Uhlenbeck

. Sei $\lambda > 0$ eine Konstante und die SDE

$$dX_t = -\lambda X_t dt + dW_t \qquad (\text{in } \mathbb{R}).$$

Dann, $\exists!$ starke Lösung:

$$X_t = X_0 e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dW_s$$

. Um diese Formel zu kriegen, sei $Y_t = e^{\lambda t} X_t$. $(\Rightarrow Y_0 = X_0)$

Dann $dY_t = e^{\lambda t} dX_t + \lambda Y_t dt$

$$= e^{\lambda t} dW_t$$

$$\Rightarrow Y_t = Y_0 + \int_0^t e^{\lambda s} dW_s$$

$$\Rightarrow X_t = e^{-\lambda t} \cdot X_0 + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dW_s.$$

. Im stationäre Fall, d.h., $X_0 \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2\lambda})$,

dann $X_t \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2\lambda})$ und

$$\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda|t-s|}.$$

. Wie sieht man, dass $X_t \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2\lambda})$?

<u>Lemma 8.9)</u> Sei $M_t = \int_0^t h(s)\, dW_s$ mit $h \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

Dann, $M_t \sim \mathcal{N}(0, \langle M \rangle_t)$.

. <u>Beweis:</u> Wir berechnen die Fourier-Transformierte.

$$\mathbb{E}(e^{i\xi M_t}) = ? \qquad (\xi \in \mathbb{R})$$

. Da $\langle M \rangle_t = \int_0^t h(s)^2 ds < \infty$,

wissen wir, dass $e^{i\xi M_t + \frac{\xi^2}{2}\langle M \rangle_t}$

ist ein Martingal (siehe Thm 7.12(b)).

$$\Rightarrow \mathbb{E}(e^{i\xi M_t}) = e^{-\frac{\xi^2}{2}\langle M \rangle_t} = \exp\left(-\frac{\xi^2}{2} \int_0^t h(s)^2 ds\right).$$

#

. Deshalb, $\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\, dW_s \sim \mathcal{N}(0, \langle M \rangle_t)$ mit

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t e^{-2\lambda(t-s)} ds = \frac{1}{2\lambda}\left(1 - e^{-2\lambda t}\right)$$

. Dazu, unter die Annahme X_0 unabhängig von $\{W_s, 0 \le s \le t\}$,

$$e^{-\lambda t} X_0 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{e^{-2\lambda t}}{2\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow X_t \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2\lambda}\right).$$

- Letztlich, berechnen wir $\mathrm{Cov}(X_s, X_t)$ direkt aus der Formula $X_t = e^{-\lambda t} X_0 + \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} dW_u$.

Da X_0 und $\{W_s, 0 \le s \le t\}$ unabhängig sind, für $0 \le s < t$,

$$\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = e^{-\lambda(s+t)} \mathrm{Var}(X_0) + e^{-\lambda(s+t)} \cdot \underbrace{\mathrm{Cov}\Big(\int_0^t e^{\lambda u} dW_u, \overbrace{\int_0^s e^{\lambda v} dW_v}^{\doteq \tilde{M}_s} \Big)}$$

$$= \mathrm{Cov}(\tilde{M}_t, \tilde{M}_s)$$

$$= \underbrace{\mathrm{Cov}(\tilde{M}_t - \tilde{M}_s, \tilde{M}_s)}_{=0} + \mathrm{Var}(\tilde{M}_s)$$

$$= e^{-\lambda(s+t)} \Big\{ \frac{1}{2\lambda} + \underbrace{\mathbb{E}\Big(\Big(\int_0^s e^{\lambda v} dW_v \Big)^2 \Big)}_{\underset{\text{Itô-Isometrie}}{=} \mathbb{E}\left(\int_0^s e^{2\lambda v} dv\right) = \frac{1}{2\lambda}\left(e^{2\lambda s} - 1\right)} \Big\}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t-s)}}{2\lambda}.$$

8.2.3) Geometrische Brownsche Bewegung.

- Es sei $\sigma \neq 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$, dann

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t \, dt + \sigma X_t \, dW_t \\ X_0 = \underline{x > 0} \end{cases}$$

ist die SDE einer <u>Geometrischen B.B.</u> startend in x.

- Es existiert eine eindeutige starke Lösung:

$$X_t = x \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t \right), \quad t \ge 0.$$

- Wie erhält man diese Lösung?
  - Sei $Y_t = \ln X_t$.

  Aus Itô-Formel: $dY_t = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2} \frac{(dX_t)^2}{(X_t)^2}$; $(dX_t)^2 = \sigma^2 X_t^2 \, dt$

$$\Rightarrow dY_t = \mu\, dt + \sigma\, dW_t - \frac{\sigma^2}{2} dt$$

$$\Rightarrow Y_t = Y_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t$$

$$\Rightarrow X_t = \underbrace{X_0}_{=x} \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right).$$

. Bemerkung: Man kann zeigen, dass Null wird (f.s.) nie erreicht, weil die Dispersion geht nach 0 wenn $x \to 0$ schnell genug.

8.2.4) Ein Beispiel

. Zu Lösen: $dX_t = \left(\sqrt{1+X_t^2} + \frac{1}{2} X_t\right) dt + \sqrt{1+X_t^2}\, dW_t$

. Sei $Y_t = f(X_t)$ (f zu bestimmen)

$$\Rightarrow dY_t = f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\, (dX_t)^2$$

$$= dt \cdot \left\{ f'(X_t)\left(\sqrt{1+X_t^2} + \frac{X_t}{2}\right) + \frac{1}{2} f''(X_t)(1+X_t^2) \right\}$$

$$+ f'(X_t)\sqrt{1+X_t^2}\, dW_t .$$

. Versuch: $f(x)$ s.d. $f'(x)(1+x^2)^{1/2} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \operatorname{asinh}(x) \\ f'(x) = (1+x^2)^{-1/2} \\ f''(x) = -x(1+x^2)^{-3/2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow dY_t = dt \cdot \left\{ 1 + \cancel{(1+x^2)^{-1/2} \cdot \frac{x}{2}} + \cancel{\frac{1}{2} \cdot (-x)(1+x^2)^{-3/2+1}} \right\} + dW_t$$

$$= dt + dW_t$$

$$\Rightarrow Y_t = Y_0 + t + W_t$$

$$\Rightarrow \operatorname{asinh}(X_t) = \operatorname{asinh}(X_0) + t + W_t$$

$$\Rightarrow \boxed{X_t = \sinh\left(\operatorname{asinh}(X_0) + t + W_t\right).}$$

8.2.5) Lineare Gleichung ($d=1$)

. Sei das Drift: $a(t,x) = a_1(t)x + a_2(t)$

und die Dispersion: $\sigma(t,x) = \sigma_1(t)x + \sigma_2(t)$,

mit a_i, σ_i messbar und beschränkt in t.

. Dann, betrachten wir die SDE ($\in \mathbb{R}$)

$$dX_t = a(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t$$

$$\equiv X_t dY_t + dZ_t$$

wobei $Y_t = \int_0^t a_1(s)\,ds + \int_0^t \sigma_1(s)\,dW_s$

und $Z_t = \int_0^t a_2(s)\,ds + \int_0^t \sigma_2(s)\,dW_s$.

Die Lösung existiert und ist eindeutig. Es ist die folgende:

Sei $\mathcal{E}_t^Y := \exp\left(Y_t - \frac{1}{2}\langle Y\rangle_t\right) \equiv \exp\left(\int_0^t \sigma_1(s)\,dW_s + \int_0^t \left(a_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)ds\right)$

$$\Rightarrow X_t = \mathcal{E}_t^Y \cdot \left[\xi + \int_0^t (\mathcal{E}_s^Y)^{-1} \cdot \left(dZ_s - \sigma_1(s)\sigma_2(s)\,ds\right)\right]$$

. Um diese Lösung zu testen: Definiere

$$Q_t = \frac{X_t}{\mathcal{E}_t^Y}$$

Partielle Integration $\Rightarrow$ $dQ_t = \frac{dX_t}{\mathcal{E}_t^Y} + X_t\, d(\mathcal{E}_t^Y)^{-1} + dX_t \cdot d(\mathcal{E}_t^Y)^{-1}$

$$. \; d(\mathcal{E}_t^Y)^{-1} = (\mathcal{E}_t^Y)^{-1} \cdot \left(-dY_t + \tfrac{1}{2}d\langle Y\rangle_t + \tfrac{1}{2}d\langle Y\rangle_t\right)$$

$$= (\mathcal{E}_t^Y)^{-1} \cdot \left(-dY_t + d\langle Y\rangle_t\right).$$

$$\Rightarrow dQ_t = \frac{X_t}{\cancel{\mathcal{E}_t^Y}} \cancel{dY_t} + \frac{dZ_t}{\mathcal{E}_t^Y} + \frac{X_t}{\cancel{\mathcal{E}_t^Y}}\cancel{(-dY_t)}$$

$$+ \frac{X_t}{\cancel{\mathcal{E}_t^Y}} \underbrace{\cancel{d\langle Y\rangle_t}}_{=\sigma_1^2 dt} + \frac{(\cancel{\sigma_1 X_t} + \sigma_2)\, dW_t \cdot (-\sigma_1\, dW_t)}{\mathcal{E}_t^Y}$$

$$= (\mathcal{E}_t^Y)^{-1} \cdot (dZ_t - \sigma_1(t)\sigma_2(t)dt)$$

$$\Rightarrow \frac{X_t}{\mathcal{E}_t^Y} = \frac{\overbrace{X_0}^{\equiv \xi}}{\underbrace{\mathcal{E}_0^Y}_{\equiv 1}} + \int_0^t (\mathcal{E}_s^Y)^{-1}(dZ_s - \sigma_1(s)\sigma_2(s)ds)$$

$$\Rightarrow X_t = \mathcal{E}_t^Y \cdot \left(\xi + \int_0^t (\mathcal{E}_s^Y)^{-1}(dZ_s - \sigma_1(s)\sigma_2(s)ds)\right).$$

8.26) Brownsche Brücke.

- Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $T > 0$ gegeben. Die Brownsche Brücke von a nach b in der Zeit T ist ein Prozess X_t s.d.

$$\begin{cases} dX_t = \frac{b - X_t}{T-t} dt + dW_t, & 0 \le t < T, \\ X_0 = a. \end{cases}$$

- Lösung der SDE: $X_t = a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + b \cdot \frac{t}{T} + (T-t)\int_0^t \frac{dW_s}{T-s}$.

- Man kann zeigen:

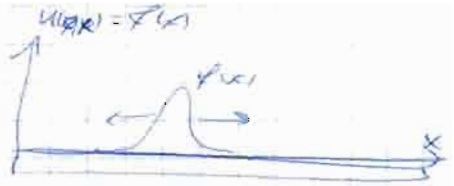
$$Y_t = \begin{cases} (T-t)\int_0^t \frac{dW_s}{T-s}, & 0 \le t < T, \\ 0, & t = T, \end{cases}$$

ist stetig, Gaussche, hat Mittelwert Null und Kovarianz

$$\mathrm{Cov}(Y_s, Y_t) = \min(s,t) - \frac{s \cdot t}{T}, \quad 0 \le s, t \le T.$$

9) Verbindung mit PDE: die Feynman-Kac Formula.

9.1) Die 1-d Wärmeleitungsgleichung.



- Sei $u(t,x)$ die Temperatur einen Stab zur Zeit t und Position $x \in \mathbb{R}$.

- Unter die Annahme: "es gibt kein Energieverlust ausserhalb den Stab", dann gilt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{D}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad : \text{Wärmegleichung.}$$

- Man kann Zeit oder Raum-Skala normalisieren s.d. $D = 1$.

$$\Rightarrow \text{(EQ1)} \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{zu lösen mit Anfangsbedingung} \\ u(0,x) = f(x). \end{cases}$$

- Wir wissen schon, dass die ÜbergangsW-keit der B.B.,

$$P_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right), \quad t > 0, \quad x,y \in \mathbb{R}$$

löst die Gleichung $\dfrac{\partial P}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}$.

- Für eine B.B $(W_t)_{t \geq 0}$:

$$\mathbb{P}(W_t \in dy \mid W_0 = x) \equiv \mathbb{P}^x(W_t \in dy) = p_t(x,y)\,dy.$$

- Nehmen wir an, dass $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar ist und

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a x^2} |f(x)|\,dx < \infty \quad \text{für einen } a > 0.$$

Dann, man kann zeigen, dass

$$\circledast \quad u(t,x) := \mathbb{E}^x\left(f(W_t)\right) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, P_t(x,y)\, dy$$

ist wohldefiniert für $0 < t < \frac{1}{2a}$, $x \in \mathbb{R}$, ist C^∞ und

löst die Wärmegleichung (EQ1).

. Dazu, wenn f ist beschränkt und stetig, dann

kann man ⊛ umschreiben als

$$u(t,x) = \mathbb{E}^0\left(f(x+W_t)\right)$$

und (beschränkter Konvergenz) $f(x) = \lim_{\substack{t \searrow 0 \\ y \to x}} u(t,y)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

9.2) Feynman-Kac Formula -

• Für ein "realistischer" System mit externe Abkühlung

die Wärmegleichung wird die folgende:

$$\text{(EQ2)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u - k(x)u \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}, x \in \mathbb{R}^d.$$

Wobei k ist die "Abkühlungsrate" an der Stelle x.

• In 1949 Kac zeigte, dass (unter einige Bedingungen)

die Gleichung (EQ2) hat die Lösung:

$$\text{(EQ3)} \quad \boxed{u(t,x) = \mathbb{E}^x\left(f(W_t)\, e^{-\int_0^t k(W_s)\,ds}\right)}$$

wobei $\mathbb{E}^x$ ist den Erwartungswert bzgl. der BB startend

in x, $W_t + x$.

. EQ3 heisst die Feynman-Kac Formula.

. Wieso Feynman? $\boxed{\text{Eine Parenthesis}}$

. Quantum Mechanik: ein Teilchen mit Mass m der in ein (Konservativ) Potentialfeld $V(x)$ bewegt, ist durch eine Wellenfunktion $\psi(t,x) \in \mathbb{C}$.

. Die ~~Evolution~~ ist via die Schrödinger Gleichung

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial\psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi \\ \psi(0,x) = \psi_0(x) \end{cases}$$

gegeben.

($\hbar$ = Planck Konstante ; $\psi_0(x)$ = Anfangszustand).

. In 1948 Feynman: (Man kann) $\psi(t,x)$ beschreiben als "Mittelwert" über alle möglichen Pfade $\gamma(t)$ startend in x von der Funktion $\exp\left(i\frac{S(\gamma)}{\hbar}\right)$, wobei

$S(\gamma)$ ist die "Wirkung" vom Pfad γ:

$$S(\gamma) = \int_0^t \left(\frac{m}{2}\dot{\gamma}^2(s) - V(\gamma(s))\right) ds$$

. In Formula, Feynman schreibt

$$\psi(t,x) = \text{const}\cdot \int_{\substack{\text{stetige}\\ \text{funktionen}\\ \gamma \text{ mit } \gamma(0)=x}} e^{\frac{iS}{\hbar}}\, \psi_0(\gamma(t))\cdot \underbrace{\mathcal{D}\gamma}_{\substack{\text{"unendlich}\\ \text{dimensionale}\\ \text{Lebesgue Mass"}}}$$

. Mathematisch ist Problematik.

. Aber: Feynman und Kac waren beide in Cornell Universität ... Kac hat gesehen, dass der Analog "in complexe Zeit" von Schrödinger Gleichung war EQ2 und, dass in dieser Fall konnte man die Idee von Feynmann mathematisch rigoros benutzen.

Schauen wir, wie kann man (EQ3) zeigen.
Das wird ein Korollar der folgende Cauchy Problem.

Def. 9.1) Seien $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $k:\mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ stetige Funktionen. Nehmen wir an, dass v ist eine stetige, reelle Funktion auf $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ und $C^{1,2}$ auf $[0,T)\times\mathbb{R}^d$ (C^1 in Zeit, C^2 in Raum) s.d.

$$\text{(EQ4)} \quad \begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial t} + k\cdot v = \frac{1}{2}\Delta v & \text{auf } [0,T)\times\mathbb{R}^d \\ v(T,x) = f(x) & , x\in\mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Dann, die Funktion v heisst Lösung der Cauchy Problem für die "backwards" Wärmegleichung (EQ4) mit Potential k und "Endbedingung" $v(T,x) = f(x)$.

Thm. 9.2) Sei v wie in Def. 9.1. Nehmen wir an, dass

$$\max_{0\le t\le T} |v(t,x)| \le K\cdot e^{a\|x\|^2}, \quad \forall x\in\mathbb{R}^d,$$

für eine Konstante $K>0$ und $0<a<\frac{1}{2T\cdot d}$.

Dann, v hat die Stochastische Darstellung

$$\text{(EQ5)} \quad v(t,x) = \mathbb{E}^x\left(f(W_{T-t})\, e^{-\int_0^{T-t} k(W_s)\,ds}\right), \quad 0\le t\le T,\ x\in\mathbb{R}^d.$$

Ausserdem, v ist eindeutig.

Bem: Um die Feynman-Kac Formula zu kriegen, wir werden $t\mapsto T-t$ abbilden.

<u>Beweis:</u> . Sei $g(\theta) := v(t+\theta, W_\theta)\, e^{-\int_0^\theta k(W_s)ds}$.

$$\cdot\, d\left[\exp\left(-\int_0^\theta k(W_s)ds\right)\right] = -k(W_\theta)\, e^{-\int_0^\theta k(W_s)ds}\, d\theta$$

und Itô-Formel $\Rightarrow$

$$\Rightarrow d\, v(t+\theta, W_\theta) = \dot{v}(t+\theta, W_\theta)\, d\theta + \nabla v(t+\theta, W_\theta)\, dW_\theta + \frac{1}{2}\Delta v(t+\theta, W_\theta)\, d\theta.$$

$$\Rightarrow d g(\theta) = \exp\left(-\int_0^\theta k(W_s)\, ds\right) \cdot \Big\{ -k(W_\theta)\, v(t+\theta, W_\theta)\, d\theta + \dot{v}(t+\theta, W_\theta)\, d\theta + \frac{1}{2}\Delta v(t+\theta, W_\theta)\, d\theta + \nabla v(t+\theta, W_\theta)\, dW_\theta \Big\}.$$

. Aber v löst (E.4), deshalb,

$$dg(\theta) = e^{-\int_0^\theta k(W_s)ds} \cdot \nabla v(t+\theta, W_\theta)\, dW_\theta,$$

(<u>"da ist ein Martingal bis zur Zeit T"</u>).

. Sei nun $S_n = \inf\{t \geq 0 \text{ s.d. } \|W_t\| \geq n\sqrt{d}\}$, $n \geq 1$ und nehme $r \in (0, T-t)$. Dann integrieren wir $dg(\theta)$ auf $[0, r \wedge S_n]$. Das stoch. Integral hat (Mart. Eigenschaft) Null Erwartungswert.

$$\cancel{\mathbb{E}^x\left(v(t, W_0)\right) \equiv v(t,x) \overset{\text{Martingal}}{=}}$$

$$\cancel{= \mathbb{E}^x\left(e^{-\int_0^\theta k(W_s)ds} \cdot \nabla v(t+\theta, W_\theta)\, dW_\theta\right)}$$

$$\cancel{= \mathbb{E}^x\Big(}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}^y(v(t,W_0)) = v(t,x) = \mathbb{E}^x\left(\int_0^{r\wedge S_n'} dg(\theta)\right),$$

$$= \mathbb{E}^x\left(v(t+S_n', W_{S_n'})\, e^{-\int_0^{S_n'} k(W_s)ds} \mathbb{1}_{[S_n' \le r]}\right)$$

$$+ \mathbb{E}^x\left(v(t+r, W_r)\, e^{-\int_0^r k(W_s)ds} \mathbb{1}_{[S_n' > r]}\right).$$

. Das erste Term ist dominiert durch: $(k \geq 0)$

$$\mathbb{E}^x\left(|v(t+S_n, W_{S_n})| \mathbb{1}_{[S_n \le T-t]}\right) \le$$

$$\le K \cdot e^{a \cdot d \cdot n^2} \cdot \mathbb{P}^x(S_n' \le T)$$

$$\le K \cdot e^{a \cdot d \cdot n^2} \sum_{k=1}^d \mathbb{P}^x\left(\max_{0\le t\le T} |W_t^{(k)}| \geq n\right)$$

$$\le 2K \cdot e^{a \cdot d \cdot n^2} \sum_{k=1}^d \left\{\mathbb{P}^x(W_T^{(k)} \geq n) + \mathbb{P}^x(-W_T^{(k)} \geq +n)\right\}.$$

(*)

$\mathbb{P}^x\left(\max_{0\le t\le T}|W_t^{(k)}| \geq n\right) \le$

$\le \mathbb{P}^x\left(\max_{0\le t\le T} W_t^{(k)} \geq n\right)$

$+ \mathbb{P}^x\left(\max_{0\le t\le T} -W_t^{(k)} \geq n\right)$

und

$\mathbb{P}^x\left(\max_{0\le t\le T} W_t^{(k)} \geq n\right)$

$= 2 \cdot \mathbb{P}^x(W_T^{(k)} \geq n)$

(x.4) (Reflexion Principle)

Siehe letzte Beispiel Kapitel 3.

Aber: $$e^{adn^2} \cdot \mathbb{P}^x(\pm W_T^{(k)} \geq n) \le e^{adn^2} \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(n \mp x^{(k)})^2}{2T}}}{n \mp x^{(k)}}.$$

(Gauss'sche Schranke:)

Für $x>0$: $$\frac{x}{1+x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} \le \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \le \frac{1}{x} e^{-x^2/2}$$

$\Rightarrow$ Im $n \to \infty$ Limes, $\mathbb{E}^x\left(|v(t+S_n, W_{S_n})| \mathbb{1}_{[S_n \le T-t]}\right) \to 0$,

weil $0 < a < \frac{1}{2Td}$.

. Dann, für den 2. Term: Aus Dominierte Konvergenz folgt, dass im $n \to \infty$ Limes und $r \uparrow T-t$, der 2. Term konvergiert gegen $\mathbb{E}^x\left(v(T, W_{T-t})\, e^{-\int_0^{T-t} k(W_s)ds}\right)$. #

. Thm 9.2 + Zeitwechsel $\Rightarrow$ Feynman-Kac Formula

EQ3.

Korollar 9.3) Seien $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $k: \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ stetige Funktionen. Nehmen wir an, dass $u: [0,\infty)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \in C^{1,2}$ auf $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ und löst die PDE

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u - ku, \\ u(0,x) = f(x). \end{cases}$$

. Wenn für alle endlichen $T>0$, $\exists K>0$ und $a \in (0, \frac{1}{2Td})$ s.d.

$$\max_{0\le t\le T} |u(t,x)| \le K \cdot e^{a\|x\|^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

dann $\underline{u}$ hat die folgende Stochastische Darstellung

$$u(t,x) = \mathbb{E}^x\left(f(W_t)\, e^{-\int_0^t k(W_s)\,ds}\right), \quad 0\le t<\infty, \; x\in\mathbb{R}^d.$$

Beweis . $t \mapsto T-t$ $\oplus$ Thm. 9.2. #.

10) Brownsche Martingale

10.1) Zeitwechsel.

- Das nächste Ziel ist zu sehen, gegeben X, ob $\exists$ eine Stoppzeit τ_t s.d. X_{τ_t} eine BB. ist.

- Wir werden zeigen: für $X \in \mathcal{M}^0_{loc}$ und $\langle X \rangle_\infty = \infty$ f.s., definieren wir $\tau_t := \inf\{s \geq 0 \text{ s.d. } \langle X \rangle_s > t\}$.

Dann $X_{\tau_t} = B_t$ ist eine 1-d. BB. bzgl. $\mathcal{F}_{\tau_t}$ und $X_t = B_{\langle X \rangle_t}$.

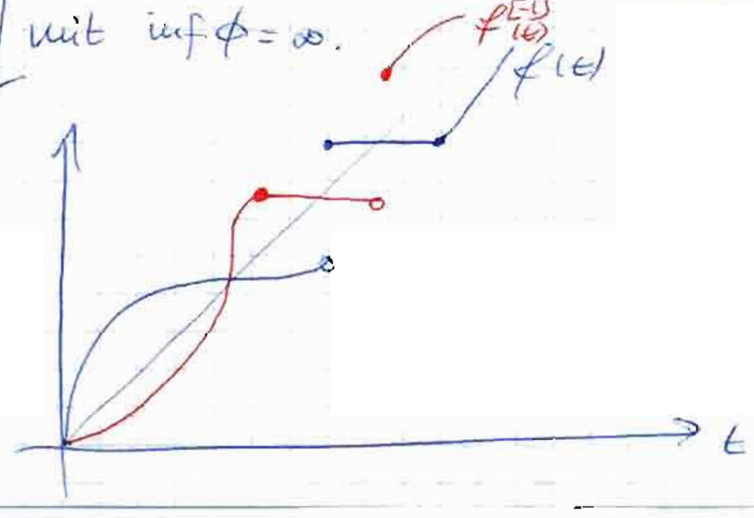
- Dazu, brauchen wir eine "Rechtsinverse" von $\langle X \rangle_t$ definieren, weil $\langle X \rangle_t$ kann konstant sein.

<u>Def. 10.1)</u> Sei $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ monoton wachsend, rechtsstetig mit $f_\infty := \lim_{t\to\infty} f_t \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Die <u>Rechtsinverse</u> $f^{[-1]}$ von f ist definiert durch

$$
\begin{aligned}
f^{[-1]}(t) &= \inf\{s \geq 0 \text{ s.d. } f(s) > t\} \\
&= \sup\{s \geq 0 \text{ s.d. } f(s) \leq t\} \\
&= \operatorname{Leb}(\mathbb{1}_{[f \leq t]}),
\end{aligned}
$$

mit $\inf \emptyset = \infty$.

<u>Beispiel:</u>



Lemma 10.2) ⓐ $f^{[-1]}: \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ist monoton wachsend und rechtsstetig.

ⓑ $(f^{[-1]})^{[-1]} = f$

ⓒ $f(f^{[-1]}(s)) \geq s \wedge f_\infty$. Falls f ist stetig, und $f_\infty = \infty$, dann $f(f^{[-1]}(s)) = s$.

ⓓ $f^{[-1]}$ ist konstant auf $[f(t-), f(t))$, $t \geq 0$.

Beweis: ⓐ Monoton wachsend: klar

. Rechtsstetigkeit zu zeigen: $\lim_{\theta \downarrow t} f^{[-1]}(\theta) \leq f^{[-1]}(t)$.

Sei $s = f^{[-1]}(t)$. Dann, aus der Def 10.1, $\forall \varepsilon > 0$, $f(s+\varepsilon) > t$ und für $t < \theta < f(s+\varepsilon)$

$f^{[-1]}(\theta) \leq s + \varepsilon$.

$\Rightarrow \lim_{\theta \downarrow t} f^{[-1]}(\theta) \leq s \equiv f^{[-1]}(t)$.

ⓑ Folgt aus Rechtsstetigkeit von f und $(f^{[-1]})^{[-1]}$.

ⓒ $f(f^{[-1]}(t)) = f(\inf\{s \geq 0 \text{ s.d. } f(s) \geq t\}) \overset{(*)}{\geq} t$ (falls $f_\infty = \infty$).

. Falls $f_\infty < \infty$, für $t > f_\infty$, $f^{[-1]}(t) = \infty$ und $f(\infty) = f_\infty < t$.

. Gleichheit in $(*)$ falls f stetig und nicht.

ⓓ Klar: $f^{[-1]}$ konstant wenn f hat einen Sprung: $\forall \theta \in [f(t-), f(t))$, Leb$(\mathbb{1}_{[f \leq \theta]})$ = Konst.

#

. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ ein filtrierter standard W-raum. (Vollständig, rechtsstetig).

Def. 10.3) Ein Zeitwechsel $(T_t)_{t\geq 0}$ ist ein wachsender rechtsstetiger Prozess
$$T: \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$$
mit T_t eine Stoppzeit, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Beispiele: ⓐ $T_t = t \wedge \tau$ mit τ eine Stoppzeit

ⓑ $T_t = t + \sigma$ mit σ eine Stoppzeit

ⓒ $T_t = \inf\{s \geq 0 \text{ s.d. } A_s > t\}$, wobei $(A_t)_{t\geq 0}$ ist ein adaptierter, rechtsstetiger und wachsender Prozess ($\inf \emptyset = \infty$).

$\Rightarrow T_t = A_t^{[-1]} \Rightarrow$ rechtsstetig, wachsend

. Aus Prop 3.10 ⓓ: "T_t Stoppzeit $\Leftrightarrow A_s = \mathbb{1}_{[0, T_t)}(s)$ ist adaptiert".

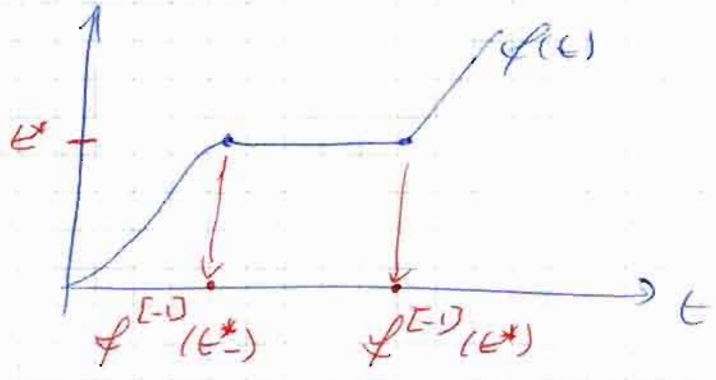
$\Rightarrow$ Jeder Zeitwechsel ist der Form ⓒ, mit
$$A_t := \inf\{s \geq 0 \text{ s.d. } T_s > t\}.$$

. Def. 10.4) Sei $g: \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ wachsend, rechtsstetig. Dann, eine Funktion $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ heisst g-stetig, falls $f|_{[g(t-), g(t)]}$ ist konstant für alle t mit $g(t) < \infty$.

Beispiel: Sei $\varphi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ wachsend, stetig.
Dann ist $\varphi^{[-1]}$ stetig.

In der Tat, $\forall s \in [\varphi^{[-1]}(t-), \varphi^{[-1]}(t)] < \infty$,

$$\varphi(s) = \varphi(\varphi^{[-1]}(t)).$$



Def. 10.5 Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein adaptierter Prozess mit $X_t \in \overline{\mathbb{R}}$.
Falls: entweder: - $(T_t)_{t\geq 0}$ ist ein endlichen Zeitwechsel, d.h. $T_t < \infty$ f.s.
oder: - $X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t \in \overline{\mathbb{R}}$ existiert f.s.,
dann definiert man

$$\hat{X}: \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}$$
$$t \longmapsto \hat{X}_t = X_{T_t}$$

und ist an $\hat{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}_{T_t} = \{A \in \mathcal{F}_\infty \text{ s.d. } A \cap \{T_t \leq r\} \in \mathcal{F}_r \ \forall r \geq 0\}$ adaptiert.

Bemerkung: • $(\hat{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ ist vollständig, rechtsstetig.

• Sei $X \in \mathcal{M} \Rightarrow \hat{X}$ ist nicht unbedingt $\in \mathcal{M}$.

Z.B.: Sei $X = B \cdot B$ und

$$T_t = \inf\{s \geq 0 \text{ s.d. } \max_{u \in [0,s]} X_u > t\}$$
$$\Rightarrow \hat{X}_t \overset{\text{Stetigkeit}}{=} t \notin \text{Martingal}.$$

Def. 10.6) Sei $(T_t)_{t\geq 0}$ ein Zeitwechsel.
Ein Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ heisst $(T_t)_{t\geq 0}$-stetig
falls ω-f.s., $X(\omega)$ ist $T(\omega)$-stetig.

(d.h., $t \mapsto X_t(\omega)$ konstant auf allen Sprungintervalle
$[T_{t-}(\omega), T_t(\omega)]$ mit $T_t(\omega) < \infty$).

Lemma 10.7) Sei $X \in \mathcal{M}_{loc}$ und
$T_t := \inf\{s \geq 0 \text{ s.d. } \langle X\rangle_s > t\} \equiv \langle X\rangle_t^{[-1]}$.
Dann X ist $(T_t)_{t\geq 0}$-stetig.

Beweis: Für festes ω (ausserhalb geeigneter Nullmenge)
und $s \in \mathbb{R}_+$ s.d.
$(T_t)_{t\geq 0}$ hat einen Sprung in s:
$[T_{s-}(\omega), T_s(\omega)] \equiv [a,b]$.
$\Leftrightarrow$ $\langle X\rangle_s(\omega)$ ist konstant auf $[a,b]$.

$\Leftrightarrow$ $X_s(\omega)$ ist konstant auf $[a,b]$. #

Thm 10.8). Sei $(T_t)_{t\geq 0}$ ein beliebiger Zeitwechsel,
$X \in H^2$ ($=L^2$-beschränkte stetige Martingale),
mit X $(T_t)_{t\geq 0}$-stetig.
Dann ist $\hat{X} \in \hat{H}^2 := \{$stetigen, L^2-beschränkten
Martingale bzgl. $(\hat{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}\}$
und $\langle \hat{X}\rangle_t = \langle X_{T_t}\rangle = \widehat{\langle X\rangle}_t - \widehat{\langle X\rangle}_0 \equiv \langle X\rangle_{T_t} - \langle X\rangle_{T_0}$.

Beweis: (Aussage) X T_t-stetig $\Rightarrow$ $\langle X\rangle$ T_t-stetig (zu zeigen)

$\Rightarrow$ $\hat{X}_t := X_{T_t}$ und $\widehat{\langle X\rangle}_t := \langle X\rangle_{T_t}$ sind stetige Prozesse (das einzige Problem, die Sprungsstellen von T_t, sind aufgehoben, weil X ist dort konstant).

- Da $X \in H^2$ ist $\Rightarrow$ $\hat{X}_t = \mathbb{E}(X_\infty \mid \hat{\mathcal{F}}_t)$ ($\approx$ opt. sampling)

d.h., $(\hat{X}_t)_{t\geq 0}$ ist $(\hat{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ - Martingal und L^2-beschränkt

$\left(\mathbb{E}(\hat{X}_t \mid \hat{\mathcal{F}}_s) \overset{s\leq t}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\infty \mid \hat{\mathcal{F}}_t) \mid \hat{\mathcal{F}}_s) = \mathbb{E}(X_\infty \mid \hat{\mathcal{F}}_s) = \hat{X}_s \right.$

und $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}|X_{T_t}|^2 < \infty$ wegen $\left. \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}|X_t|^2 < \infty \right)$.

- (Formula) Sei $X_t^* := \max_{0\leq s\leq t} |X_s|$.

Dann, $|X_t^2 - \langle X\rangle_t|$ ist majorisiert durch

$(X_\infty^*)^2 + \langle X\rangle_\infty \in L^1$ weil:

- $X^* \in L^2$ (da $X \in H^2$)
- $X_\infty^2 - \langle X\rangle_\infty \in M_{loc}$ und $X_\infty^2 \in L^1$

$\Rightarrow$ $\langle X\rangle_\infty \in L^1$.

$\Rightarrow$ Uniform integrierbar.

$\Rightarrow$ Durch Stoppen:

$$X_{T_t}^2 - \langle X\rangle_{T_t} = \mathbb{E}(X_\infty^2 - \langle X\rangle_\infty \mid \mathcal{F}_{T_t}),$$

d.h., $\hat{X}^2 - \widehat{\langle X\rangle} \in \hat{\mathcal{F}}$-Martingal und

$$\hat{X}^2 - \underbrace{(\widehat{\langle X\rangle} - \langle X\rangle_0)}_{\in A_+} \in \hat{\mathcal{F}}\text{-Martingal}$$

$\Rightarrow$ $\langle \hat{X}\rangle_t = \widehat{\langle X\rangle}_t - \widehat{\langle X\rangle}_0$. #

Korollar 10.9) Sei $X \in \mathcal{M}_{loc}$, $(T_t)_{t\geq 0}$ ein endlicher Zeitwechsel und X $(T_t)_{t\geq 0}$-stetig.

Dann, $\hat{X} \in \hat{\mathcal{M}}_{loc} := \{$stetige lokale $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-Mart.$\}$ und $\langle \hat{X} \rangle = \widehat{\langle X \rangle} - \langle X \rangle_0$.

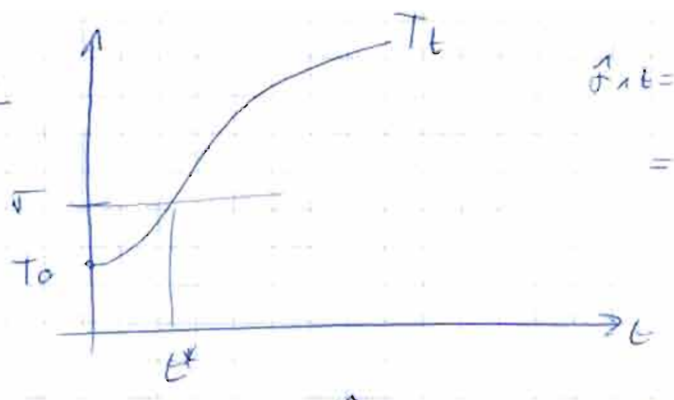
Beweis: O.b.d.A., $X_0 = 0$ und σ eine Stoppzeit mit $X^\sigma \in H^2$.

- Setze $\hat{\sigma} := \inf\{t \geq 0 \text{ s.d. } T_t \geq \sigma\}$. $\hat{\sigma}$ ist eine Stoppzeit bzgl. $\hat{\mathcal{F}}_t$:
  - $\{\hat{\sigma} \leq t\} = \{\sigma \leq T_t\} \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_{T_t} \subseteq \mathcal{F}_{T_t}, \forall t \geq 0$.

- Dann,

$$\hat{X}^{\hat{\sigma}}_t \equiv \hat{X}_{\hat{\sigma} \wedge t} = X_{T_{\hat{\sigma} \wedge t}} = \begin{cases} X_{\sigma \wedge T_t} & \text{auf } \{\sigma \geq T_0\}, \\ X_{T_0} & \text{auf } \{\sigma < T_0\}. \end{cases}$$

weil:



$$\hat{\sigma} \wedge t = \min\{\inf\{t \geq 0 \mid T_t \geq \sigma\}, t\} = \begin{cases} t \wedge t^*, & \sigma \geq T_0, \\ 0, & \sigma < T_0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow (*) \quad \hat{X}^{\hat{\sigma}} - X_{T_0} = \widehat{X^\sigma} - X^\sigma_{T_0} \quad (\text{falls } \sigma < T_0: \ 0 = 0).$$

- Ähnlich für $\langle X \rangle$, die wie X ist $(T_t)_{t \geq 0}$-stetig.

$$\Rightarrow \widehat{\langle X \rangle}^{\hat{\sigma}} - \langle X \rangle_{T_0} = \widehat{\langle X^\sigma \rangle} - \langle X^\sigma \rangle_{T_0}. \quad (**)$$

- Jetzt wählen wir eine Folge $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ mit $\sigma_n \nearrow \infty$ und $X^{\sigma_n} \in H^2$. (e.g., $\sigma_n = \inf\{t : |X_t| > n\}$).

Dann auch $\hat{\sigma}_n \nearrow \infty$ f.s. (weil $\{\hat{\sigma}_n \leq t\} = \{\sigma_n \leq T_t\}$ und da T_t endlich f.s. $\Rightarrow \{\sigma_n \leq T_t\} \to \emptyset$)

$\Rightarrow X^{\sigma_n} \in H^2$ aus Thm 10.8 folgt $\widehat{X^{\sigma_n}} \in \hat{H}^2 \overset{*}{\Rightarrow} \hat{X}^{\hat{\sigma}} \in \hat{H}^2$.

Dazu, aus Thm 10.8, folgt auch

$$\langle \widehat{X^{\sigma_n}} \rangle = \widehat{\langle X^{\sigma_n} \rangle} - \langle X^{\sigma_n} \rangle_0$$

$$\left(\langle \hat{X}^{\hat{\sigma}_n} \rangle \underset{\text{Lemma 5.11}}{=} \langle \hat{X} \rangle^{\hat{\sigma}_n} \right) \overset{(*)}{=} \langle \widehat{X^{\sigma_n}} \rangle \overset{**}{=} \widehat{\langle X \rangle}^{\hat{\sigma}_n} - \langle X \rangle_{T_0}$$

$$\Rightarrow \hat{X} \in \hat{M}_{loc} \text{ und } \langle \hat{X} \rangle = \widehat{\langle X \rangle} - \langle X \rangle_{T_0}.$$

#

Def. 10.10) Sei $X \in S'$ und F linksstetig, adaptiert, lokal beschränkt.
Dann $F \cdot X \in S'$ ist definiert durch
$$(F \cdot X)_t := \int_0^t F \, dX.$$

Thm. 10.11) Sei $(T_t)_{t\geq 0}$ ein endlicher Zeitwechsel und X, F wie in Def. 10.10. Dann,
$$\hat{F} \cdot \hat{X} = \widehat{F \cdot X} - (F \cdot X)_0.$$

Beweis: Wir teilen in $X \in A$ und $X \in M_{loc}$ auf.

(a) $X \in A$. $\Rightarrow (\hat{F} \cdot \hat{X})_t = \int_0^t \hat{F}_s(\omega) \, d\hat{X}_s(\omega)$
$$= \int_0^t F_{T_s(\omega)}(\omega) \, dX_{T_s(\omega)}(\omega).$$

Definiere $u(t) := F_t(\omega)$, $g(t) := T_t(\omega)$, $f(t) := X_t(\omega)$.

Dann, $(\hat{F}\cdot\hat{X})_t = \int_0^t u(g(s))\, d f(g(s))$

$$\overset{\text{Change of Variables}}{=} \int_{g(0)}^{g(t)} u(s)\, d f(s)$$

$$= \int_{T_0(\omega)}^{T_t(\omega)} F_s(\omega)\, dX_s(\omega)$$

$$= (F\cdot X)_{T_t} - (F\cdot X)_{T_0}$$

$$= (\widehat{F\cdot X})_t - (\widehat{F\cdot X})_0 \ \checkmark.$$

(b) $X \in \mathcal{M}_{loc}$: Betrachten wir

$$\Delta_t = (\hat{F}\cdot\hat{X})_t - \left((\widehat{F\cdot X})_t - (\widehat{F\cdot X})_0\right)$$

Wir wissen: $\Delta_t \in \mathcal{M}_{loc}$ und $\Delta_0 = 0$.

Zu zeigen: $\langle \Delta\rangle_t = 0$, dann folgt $\Delta_t = 0$ auch und die Behauptung.

$$\langle \Delta\rangle_t = \langle \hat{F}\cdot\hat{X}\rangle_t + \langle \widehat{F\cdot X}\rangle_t - 2\cdot\langle \hat{F}\cdot\hat{X}, \widehat{F\cdot X}\rangle_t$$

$$\overset{\text{Kor 6.19}}{=} (\hat{F}^2\cdot\langle\hat{X}\rangle)_t + \langle \widehat{F\cdot X}\rangle_t - 2\cdot\hat{F}\cdot\underbrace{\langle \hat{X}, \widehat{F\cdot X}\rangle_t}_{=\widehat{\langle X, F\cdot X\rangle}_t - \underbrace{\widehat{\langle X, F\cdot X\rangle}_0}_{=0}}$$

Fall (a)

(Kunita-Watanabe; Itô-Isometrie)

$$= (\widehat{F^2\cdot\langle X\rangle})_t - (\widehat{F^2\cdot\langle X\rangle})_0 + \langle\widehat{F\cdot X}\rangle_t$$

Fall (a)

$$-2\cdot\left((\widehat{F\cdot\langle X, F\cdot X\rangle})_t - (\widehat{F\cdot\langle X, F\cdot X\rangle})_0\right)$$

$$\overset{\substack{\text{Kor 6.19} \\ \text{(andere Richtung)}}}{=} \widehat{\langle F\cdot X\rangle}_t - \widehat{\langle F\cdot X\rangle}_0 + \underbrace{\widehat{\langle F\cdot X\rangle}_t - \widehat{\langle F\cdot X\rangle}_0}_{\text{(Kor 10.9)}}$$

$$-2\cdot\underbrace{\widehat{\langle F\cdot X, F\cdot X\rangle}_t}_{\overset{\text{def.}}{\equiv}\widehat{\langle F\cdot X\rangle}_t} + 2\cdot\widehat{\langle F\cdot X, F\cdot X\rangle}_0 = 0. \ \#$$

10.2) Anwendungen.

• Thm 10.8 zusammen mit Lévy Charactensierung (Thm 7.13) gibt das folgende Ergebnis:

Thm 10.12) Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine d-dim. B.B. bzgl $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und τ eine endliche Stoppzeit.
Dann ist $B_t := X_{\tau+t} - X_\tau$ eine d-dim. B.B. bzgl. $(\mathcal{F}_{\tau+t})_{t\geq 0}$.

Beweis: Sei $T_t := \tau + t$. Das ist ein endlicher Zeitwechsel $\Rightarrow$ $(B_t)_{t\geq 0}$ ist ein stetiges lokale Mart. bzgl. $(\mathcal{F}_{\tau+t})_{t\geq 0}$ in $\mathbb{R}^d$.

$$\langle B^i, B^j\rangle_t \overset{\text{Thm 10.8}}{=} \langle X^i, X^j\rangle_{\tau+t} - \langle X^i, X^j\rangle_\tau$$

$$= (\tau+t)\delta_{ij} - \tau\cdot\delta_{ij} = t\,\delta_{ij}.$$

Lévy $\Rightarrow$ #.

• Thm 10.13 (Dubins-Schwarz) Sei $X \in \mathcal{M}^0_{loc}$ mit $\langle X\rangle_\infty = \infty$ f.s.
Dann ist $B_t := X_{T_t}$ mit $T_t = \inf\{s\geq 0 \text{ s.d. } \langle X\rangle_s > t\}$ eine standard 1-d. B.B. bzgl. $(\mathcal{F}_{T_t})_{t\geq 0}$
und $X_t = B_{\langle X\rangle_t}$.

Beweis: • $(T_t)_{t\geq 0}$ ist einer endlichen Zeitwechsel, weil $\langle X\rangle_\infty = \infty$ f-s. und X ist $(T_t)_{t\geq 0}$-stetig. (Lemma 10.7).

$\Rightarrow$ aus Korollar 10.9, $(B_t)_{t\geq 0}$ $(\equiv \hat{Y}_t)$ $\in \mathcal{M}^0_{loc}$ (weil $T_0 = 0$ und $X_0 = 0$).

• Ausserdem, $\langle B\rangle_t \underset{\text{Thm 10.8}}{=} \langle X\rangle_{T_t} - \underbrace{\langle X\rangle_{T_0}}_{=0}$

$= \langle X\rangle_{T_t} = \langle X\rangle\left(\langle X\rangle^{[-1]}(t)\right)$

$\underset{\text{Lemma 10.2 ©}}{=} t$, weil $\langle X\rangle_\infty = \infty$.

$\overset{\text{Lévy Char.}}{\Rightarrow}$ B ist eine 1-d. B.B.

• letzlich, $B_{\langle X\rangle_t} = X_{T_{\langle X\rangle_t}} = X_t$.

$\left(T_{\langle X\rangle_t} = \inf\{s\geq 0 \text{ s.d. } \langle X\rangle_s > \langle X\rangle_t\} = t\right)$. #

Def 10.14) Sei τ eine Stoppzeit. Ein Prozess $(B_t)_{t\geq 0}$ heisst <u>bei τ gestoppte std. BB.</u> falls: • $B \in \mathcal{M}^0_{loc}$
und • $\langle B\rangle_t = t\wedge \tau$.

~~**Thm 10.15)**~~ ~~Sei $X\in \mathcal{M}^0_{loc}$ und~~

~~$B_t := \begin{cases} X_{T_t}, & \text{falls } t< \langle X\rangle_\infty, \\ X_\infty, & \text{sonst}. \end{cases}$~~

~~Dann ist $(B_t)_{t\geq 0}$ eine bei $\tau = \langle X\rangle_\infty$-gestoppte standard B.B.~~

Thm. (10.15) Sei $X \in \mathcal{M}^{\circ}_{loc}$ mit $X_\infty(\omega) := \lim_{t\to\infty} X_t(\omega)$ existiert f.s. mit $\langle X\rangle_\infty(\omega) < \infty$.

Definiere $B_t := \begin{cases} X_{T_t}, & \text{falls } t < \langle X\rangle_\infty, \\ X_\infty, & \text{sonst} \end{cases}$

für $T_t := \inf\{s \geq 0 : \langle X\rangle_s > t\}$.

Dann ist $(B_t)_{t\geq 0}$ eine bei $\tau = \langle X\rangle_\infty$-gestoppte Standard BB, d.h., $B \in \mathcal{M}^{\circ}_{loc}$ und $\langle B\rangle_t = t \wedge \tau$.

Beweis:

Für $n \in \mathbb{N}$, definiere $T_t^{(n)} := T_t \wedge n$ und

$$B_t^{(n)} := X_{T_t^{(n)}}.$$

$$\Rightarrow \langle B^{(n)}\rangle_t \underset{\text{Thm 10.8}}{=\!=} \langle X\rangle_{T_t^{(n)}} = \langle X\rangle_{T_t \wedge n}$$

$$\underset{\langle X\rangle_{T_t} = t}{=} t \wedge \langle X\rangle_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t \wedge \langle X\rangle_\infty. \quad \#$$

11) Der Satz von Girsanov.

11.1). Motivation: Ein diskretes Beispiel

. Seien $Z_1, \dots, Z_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ unabhängige Z.V. auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

. Sei gegeben ein Vektor $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ und betrachten wir eine neue W-mass $\tilde{\mathbb{P}}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ definiert durch

$$\tilde{\mathbb{P}}(d\omega) = e^{\sum_{k=1}^{n} \mu_k Z_k(\omega) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mu_k^2} \cdot \mathbb{P}(d\omega).$$

. Dann, $\tilde{\mathbb{P}}(Z_1 \in dz_1, \dots, Z_n \in dz_n)$ ist gegeben durch

$$e^{\sum_{k=1}^{n} \mu_k Z_k(\omega) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mu_k^2} \cdot \mathbb{P}(Z_1 \in dz_1, \dots, Z_n \in dz_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (z_k - \mu_k)^2} dz_1 \dots dz_n.$$

. Deshalb, bzgl. $\tilde{\mathbb{P}}$ sind die ZV $Z_1, \dots, Z_n$ unabhängig, normalverteilt mit $\tilde{\mathbb{E}}(Z_k) = \mu_k$, $\tilde{\mathrm{Var}}(Z_k) = 1$.

D.h., $\{\tilde{Z}_k = Z_k - \mu_k, 1 \le k \le n\}$ sind iid $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Z.V. auf $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}})$.

. Der Satz von Girsanov ausbreitet (im stetigen Fall) dieser Idee von "Invariante der Gausschen endlich-dimensionellen Verteilungen" bzgl. angemessene Verschiebungen und Massänderungen.

. Statt ein n-dim. Vektor $(Z_1, \dots, Z_n)$, wird man eine d-dim. B.B. haben.

11.2) Masswechsel

- Wir betrachten einen standard filtrierten W-Raum, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ und $(W_t)_{t\geq 0}$ eine d-dim standard B.B bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ (und $W_0 = 0$).

- Sei $T \in \mathbb{R}_+$. Für $t \in [0,T]$ sei eine W-Mass $\mathbb{Q}_t$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ gegeben mit $\mathbb{Q}_t \ll \mathbb{P}$ (d.h., $\mathbb{Q}_t$ absolut stetig bzgl. $\mathbb{P}_t$ $\Leftrightarrow (\mathbb{P}(A)=0 \Rightarrow \mathbb{Q}_t(A)=0)$).

  Dann existiert eine $\mathcal{F}_t$-messbare Funktion $Z_t \geq 0$ auf Ω mit $\mathbb{E}(Z_t) = 1$ und $\mathbb{Q}_t = Z_t \cdot \mathbb{P}$,

  d.h., $$\int_A d\mathbb{Q}_t = \int_A Z_t \, d\mathbb{P} \quad , \forall A \in \mathcal{F}_t$$

  $\Rightarrow$ Z_t ist die Radon-Nikodym Ableitung $\frac{d\mathbb{Q}_t}{d\mathbb{P}}$.

- Def. (11.1) $(\mathbb{Q}_t)_{t\in[0,T]}$ ist konsistent wenn
  $\mathbb{Q}_s = \mathbb{Q}_t$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_s)$, $\forall\, 0 \leq s < t$.

- Wenn $\mathbb{Q}$ ist konsistent, dann $\forall A \subset \mathcal{F}_s$,

$$\int_A d\mathbb{Q}_s = \int_A d\mathbb{Q}_t$$

$$\overset{\text{def.}}{=} \int_A Z_s \, d\mathbb{P} \qquad \overset{\text{def.}}{=} \int_A Z_t \, d\mathbb{P} \quad , \text{d.h., } Z_s = \mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_s).$$

Deshalb, $(Z_t)_{0\leq t\leq T}$ ist ein Martingal.

- Umgekehrt: $\forall (Z_t)_{0\leq t\leq T}$ Martingal, $Z_t \geq 0$ mit $\mathbb{E}(Z_t) = 1$,
  $\mathbb{Q}_t := Z_t \mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_t)$, $t \in [0,T]$, ist eine konsistente Familie von W-Massen.

<u>Lemma 11.2)</u> Für alle $Z > 0$, $Z \in \mathcal{M}_{loc}$, $\exists!\ L \in \mathcal{M}_{loc}$ s.d.

$$Z = \mathcal{E}^L = \exp\left(L - \tfrac{1}{2}\langle L \rangle\right),$$

nämlich,
$$L_t = \ln Z_0 + \int_0^t \frac{1}{Z_s}\, dZ_s.$$

<u>Beweis:</u> Itô-Formel auf $\ln Z_t$: (ok, weil $Z > 0$)

$$\ln Z_t = \ln Z_0 + \int_0^t \frac{1}{Z_s}\, dZ_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{Z_s^2}\, d\langle Z\rangle_s$$

Dazu, $dL_t = \frac{1}{Z_t} dZ_t \Rightarrow \langle L\rangle_t = \int_0^t \frac{1}{Z_s^2}\, d\langle Z\rangle_s$

$$\Rightarrow \ln Z_t = L_t - \tfrac{1}{2}\langle L\rangle_t .$$

$$\Rightarrow Z_t = \exp\left(L_t - \tfrac{1}{2}\langle L\rangle_t\right).$$

<u>Eindeutigkeit:</u> Seien $L, \tilde{L}$ zwei Lösungen

$$\Rightarrow \underbrace{L_t - \tilde{L}_t}_{\in \mathcal{M}_{loc}} = \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(\langle L\rangle_t - \langle \tilde{L}\rangle_t\right)}_{\in \mathcal{A}_0} \underset{\text{Thm 5.5}}{\Rightarrow} L_t = \tilde{L}_t. \quad \#$$

<u>Fragen:</u> Sei $Z > 0$ und $\mathbb{Q} = Z \cdot \mathbb{P}$.

① M Martingal bzgl. $\mathbb{P} \Longleftrightarrow M$ Martingal bzgl. $\mathbb{Q}$? <u>Nein.</u>

② S Semimartingal bzgl. $\mathbb{P} \Longleftrightarrow S$ Semimartingal bzgl. $\mathbb{Q}$?

Ja, aber die Doob-Meyer Zerlegung ändert sich.

$$S = M + A \quad \text{in } (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}) \quad \text{und}$$
$$= N + B \quad \text{in } (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{Q}).$$

Wie berechnet man N aus M und Z?

. Für das folgende, sei $Z \in \mathcal{M}$ (ein Martingal); $T \in \mathbb{R}_+$ fest und $\mathbb{Q}_T := Z_T \cdot \mathbb{P}$.

Lemma 11.3) Sei Y eine $\mathcal{F}_t$-messbare Z.V. mit $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}(|Y|) < \infty$. Seien $0 \le s \le t \le T$, dann,

$$(*) \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}(Y \mid \mathcal{F}_s) = \frac{1}{Z_s} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y \cdot Z_t \mid \mathcal{F}_s) \text{ f.s.}$$

bzgl. $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}_T$.

. Beweis: $\forall A \in \mathcal{F}_s$, haben wir:

$$\int_A \underbrace{\frac{1}{Z_s} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y \cdot Z_t \mid \mathcal{F}_s)}_{\mathcal{F}_s\text{-messbar}} \underbrace{d\mathbb{Q}_T}_{= d\mathbb{Q}_s = Z_s d\mathbb{P}} \overset{\text{Konsistent}}{=}$$

$$= \int_A \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y \cdot Z_t \mid \mathcal{F}_s)\, d\mathbb{P} = \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_A \mathbb{E}(Y Z_t \mid \mathcal{F}_s)\big) \quad A \in \mathcal{F}_s$$

$$= \int_A Y \cdot \underbrace{Z_t\, d\mathbb{P}}_{= d\mathbb{Q}_t} \overset{\text{Konsistent}}{=} \int_A Y \cdot d\mathbb{Q}_T .$$

$\mathcal{F}_t$-messbar

$\Rightarrow (*)$ gilt $\mathbb{Q}_T$-f.s., aber $Z_T > 0 \Rightarrow$ auch f.s. bzgl. $\mathbb{P}$.

. Bem.: $\mathbb{Q}_T(A) = 0 \Rightarrow \int_A Z_T d\mathbb{P} = 0 \overset{Z_T > 0}{\Longrightarrow} \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow (\mathbb{Q}_T \ll \mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}_T \gg \mathbb{P})$ #

Bemerkung zu Lemma 11.2: $Z = \mathcal{E}^L = \exp(L - \frac{1}{2}\langle L \rangle)$.

. Wenn $Z_0 = 1$, dann $L_0 = 0$ und aus thm. 7.12 haben wir, dass Z ist ein Martingal $\Leftrightarrow \mathbb{E}(Z_t) = 1, \forall t \ge 0$.

. Notationen: $\mathcal{M}^0_{loc,T} := \{$stetige lokale Martingale $(M_t)_{0 \le t \le T}$ bzgl. $(\Omega, \mathcal{F}_T, (\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}, \mathbb{P})$ mit $M_0 = 0\}$,

und $\tilde{\mathcal{M}}^0_{loc,T} := \{$stetige lokale Martingale $(M_t)_{0 \le t \le T}$ bzgl. $(\Omega, \mathcal{F}_T, (\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}, \mathbb{Q}_T)$ mit $M_0 = 0\}$.

Thm 11.4) Sei $M \in \mathcal{M}^0_{loc,T}$, dann ist

$$\tilde{M}_t := M_t - \langle M, L\rangle_t \in \tilde{\mathcal{M}}^0_{loc,T}$$

und $\langle \tilde{M}\rangle_t = \langle M\rangle_t$ auf $[0,T]\times\Omega$ f.s. bzgl. $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}_T$.

("L" aus Lemma 11.2).

Beweis: O.B.d.A. nehmen wir $M, \langle M\rangle, \ldots, \langle L\rangle$ beschränkt in (t,ω).

Dann ist auch $\tilde{M}$ beschränkt, weil

$$\langle M, L\rangle_t \leq \langle M\rangle_t^{1/2} \langle L\rangle_t^{1/2}.$$

Da $L_t = \ln Z_0 + \int_0^t \frac{1}{Z_s}\, dZ_s$,

$\forall M$: $$\langle M, L\rangle_t = \langle M, \tfrac{1}{Z}\bullet Z\rangle_t \underset{\text{Kor 6.19}}{\overset{\text{K.W.}}{=}} \tfrac{1}{Z}\bullet\langle M, Z\rangle.$$

Dazu, aus Partielle Integrationsformel (Thm. 6.30) haben wir:

$$\boxed{Z_t\cdot\tilde{M}_t} = \underbrace{Z_0\cdot\tilde{M}_0}_{=0} + \int_0^t Z_s\, d\tilde{M}_s + \int_0^t \tilde{M}_s\, dZ_s + \langle Z, \tilde{M}\rangle_t$$

$$= \int_0^t Z_s\, dM_s - \int_0^t Z_s\, d\langle M, L\rangle_s + \int_0^t \tilde{M}_s\, dZ_s + \langle Z, M\rangle_t$$

$$= \int_0^t Z_s\, dM_s - \int_0^t \cancel{Z_s}\frac{1}{\cancel{Z_s}}\, d\langle M, Z\rangle_s + \int_0^t \tilde{M}_s\, dZ_s + \langle Z, M\rangle_t$$

$$\boxed{= \int_0^t Z_s\, dM_s + \int_0^t \tilde{M}_s\, dZ_s.}$$

$\Rightarrow$ $Z_t\cdot\tilde{M}_t \in \mathcal{M}^0_{loc,T}$ (bzgl. $\mathbb{P}$) und wegen Beschränktheit auch ein Martingal.

Mit Lemma 11.3 folgt dann: $\forall\ 0\leq s\leq t\leq T$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}(\tilde{M}_t \mid \mathcal{F}_s) = \frac{1}{Z_s}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\tilde{M}_t\cdot Z_t \mid \mathcal{F}_s) = \frac{1}{\cancel{Z_s}}\tilde{M}_s\cancel{Z_s} = \tilde{M}_s \text{ f.s.}$$

$\Rightarrow$ $(\tilde{M}_t)_{0\leq t\leq T}$ ist auch ein Mart. unter $\mathbb{Q}_T$, d.h. $\in \tilde{\mathcal{M}}^0_{loc,T}$. #

Kor. 11.5) Seien $M, N \in \mathcal{M}^{c}_{loc,T}$ und $\tilde{M}, \tilde{N}$ wie in Thm. 11.4.
Dann, $\langle \tilde{M}, \tilde{N} \rangle = \langle M, N \rangle$.

Beweis: Folgt aus Polarisierung Identität ⊕ Linearität #

11.3) Der Satz von Girsanov.

• Betrachten wir nun eine d-dim. B.B. $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)$, $0 \le t < \infty$ und einen adaptierten messbaren Prozess

$X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$, $0 \le t < \infty$ mit

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T (X_t^k)^2 dt < \infty \right) = 1, \quad 1 \le k \le d, \quad 0 \le T < \infty,$$

(d.h. $(X_t^k)_{t \ge 0} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \Omega, Leb \otimes \mathbb{P})$).

Dann setzen wir $L_t := (X \bullet W)_t = \sum_{k=1}^d \int_0^t X_s^k \, dW_s^k$

und (*) $$Z_t \equiv \mathcal{E}^{L_t} = \exp\left(\sum_{k=1}^d \int_0^t X_s^k \, dW_s^k - \frac{1}{2} \int_0^t \|X_s\|^2 ds \right).$$

Dann, $(Z_t)_{t \ge 0}$ ist ein stetiges lokales Martingal mit $Z_0 = 1$.

Thm 11.6) (Satz von Girsanov)

. Nehmen wir an, dass Z_t in (*) definiert ist ein Martingal und definiere

$$\tilde{W}_t^k := W_t^k - \int_0^t X_s^k ds, \quad 1 \le k \le d, \quad 0 \le t < \infty.$$

Dann, $\forall T \in [0, \infty)$, der Prozess $\tilde{W} = (\tilde{W}_t)_{0 \le t \le T}$ ist eine d-dim. B.B. auf

$$(\Omega, \mathcal{F}_T, (\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}, \mathbb{Q}_T)$$

(wobei $\mathbb{Q}_T \equiv Z_T \cdot \mathbb{P}$).

Beweis: Nach Thm 11.4, $W^k_t - \langle W^k, L\rangle_t \in \tilde{\mathcal{M}}^\circ_{loc,T}$.

$$\cdot\ W^k_t - \langle W^k, L\rangle_t = W^k_t - \langle W^k, \sum_{e=1}^d X^e \cdot W^e\rangle_t$$

$$= W^k_t - \sum_{e=1}^d \langle W^k, X^e \cdot W^e\rangle_t$$

$$\underset{\text{Kor. 6.19}}{\overset{\text{K.W.}}{=}} W^k_t - \sum_{e=1}^d X^e \cdot \underbrace{\langle W^k, W^e\rangle_t}_{= \delta_{k,e} dt}$$

$$= W^k_t - \int_0^t X^k_s \, ds \equiv \tilde{W}^k_t.$$

So ist $\tilde{W}^k_t \in \tilde{\mathcal{M}}^\circ_{loc,T}$.

Ausserdem, $\langle \tilde{W}^k\rangle_t \underset{\text{Thm 11.4}}{=} \langle W^k\rangle_t = t$

und $\langle \tilde{W}^k, W^e\rangle_t = \langle W^k, W^e\rangle_t = \delta_{k,e} \cdot t$.

Deshalb ist (Lévy) $\tilde{W}$ eine d-dim. B.B. unter Q_T. #

Wann ist Z_t ein Martingal?

· Aus Thm 7.12: · $Z \in \mathcal{M}$ wenn $\mathbb{E}(Z_t) = 1$, $\forall t \geq 0$.

Hier ist ein weiteres Kriterium:

Thm. 11.7) (Novikov Bedingung) $Z = \mathcal{E}^L$ ist ein Martingal falls
$$\mathbb{E}\left(e^{\frac{1}{2}\langle L\rangle_t}\right) < \infty, \quad \forall t \geq 0.$$

Ohne Beweis (siehe Skript oder evtl. Übungen).

11.4) Anwendung auf B.B. mit Drift.

. Ziel: Sei $W_t + \mu t$ eine 1d B.B. mit Drift μ.
Berechnen die Trefferverteilung eines gegebenen Niveau $b \neq 0$.

. Sei $W = (W_t)_{t \geq 0}$ eine 1-d. Brownsche Bewegung bzgl. $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$. Sei $b \neq 0$ ein gegebenes Niveau.

. In Thm. 10.12 haben wir bewiesen:
$\forall$ endliche Stoppzeit τ, ist $(W_{t+\tau} - W_\tau)_{t \geq 0}$ eine 1-d. B.B. bzgl. $(\mathcal{F}_{t+\tau}^W)_{t \geq 0}$.

. Diese Eigenschaft haben wir schon benutzt im letzten Beispiel von Kapitel 3 um das folgende zu beweisen.

$\hookrightarrow$ Sei $T_b := \inf\{s \geq 0 \text{ s.d. } W_s = b\}$.

Picture

Prop. 11.8) $\mathbb{P}(T_b \in dt) = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{b^2}{2t}\right) dt \quad , t > 0$

und $\mathbb{E}(e^{-\alpha T_b}) = \exp\left(-|b|\sqrt{2\alpha}\right) , \quad \alpha > 0.$

Beweis: . $\mathbb{P}(T_b \in dt)$: schon gemacht (Seite 32(b)).

$$\cdot\ \mathbb{E}(e^{-\alpha T_b}) = \int_0^\infty e^{-\alpha \cdot t} \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} \cdot e^{-\frac{b^2}{2t}} dt$$

$$u := \frac{|b|}{\sqrt{2t}} \Rightarrow du = -\frac{|b|}{2(2t^3)^{1/2}} dt \ ; \ t = \frac{|b|^2}{2u^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty du\, e^{-u^2} \cdot e^{-\frac{\alpha |b|^2}{2u^2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\sqrt{2\alpha}|b|} \cdot \int_0^\infty du\, e^{-(u - \frac{c}{u})^2} \quad \text{mit } c = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}|b|.$$

Zu zeigen: $F(c) := \int_0^\infty du\, e^{-(u-\frac{c}{u})^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- Für $c=0$: ok.
- $$\frac{dF(c)}{dc} = \int_0^\infty du\, e^{-(u-\frac{c}{u})^2}\left(-2\left(u-\frac{c}{u}\right)\left(-\frac{1}{u}\right)\right)$$
$$= \int_0^\infty du\, e^{-(u-\frac{c}{u})^2}\, 2\left(1-\frac{c}{u^2}\right)$$
$$= 2\cdot F(c) - 2c\cdot \int_0^\infty \frac{du}{u^2}\, e^{-(u-\frac{c}{u})^2}$$

$\left.\begin{matrix} u = \frac{c}{x} \\ \frac{du}{dx} = -\frac{c}{x^2}\end{matrix}\right\}$ $$= 2\cdot F(c) - 2\underbrace{\int_0^\infty dx\, e^{-(\frac{c}{x}-x)^2}}_{=F(c)} = 0. \quad \#$$

- Jetzt betrachten wir den Prozess $\tilde{W} = (\tilde{W}_t := W_t - \mu t)_{t\geq 0}$ (an $\mathcal{F}_t^W$-adaptiert), mit $\mu \neq 0$ gegeben.
- Aus Thm 11.6 (Girsanov) $\tilde{W}$ ist eine Brownsche Bewegung bzgl. der Mass

$$\mathbb{P}_t^{(\mu)} := Z_t \cdot \mathbb{P} \quad , Z_t = \exp\left(\mu W_t - \frac{1}{2}\mu^2 t\right)$$

und $\mathbb{P}$ die Mass der B.B. W.

- Man sagt, dass $W_t = \mu t + \tilde{W}_t$ ist eine B.B. mit Drift μ bzgl. $\mathbb{P}^{(\mu)}$ (und, viceversa, $\tilde{W}_t$ ist eine B.B. mit Drift $-\mu$ bzgl. $\mathbb{P}$).

Bemerkung seite 166

Wie ändert sich Prop. 11.8 wenn statt $\mathbb{P}$ betrachten wir $\mathbb{P}^{(\mu)}$?

Prop. 11.9) $\mathbb{P}^{(\mu)}(T_b \in dt) = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(b-\mu t)^2}{2t}\right) dt \quad , t>0$

und $\mathbb{E}^{(\mu)}(e^{-\alpha T_b}) = \exp\left(\mu b - |b|\sqrt{\mu^2+2\alpha}\right) \quad , \alpha > 0.$

Beweis: ① Auf $\{T_b \le t\} \in \mathcal{F}^W_t \cap \mathcal{F}^W_{T_b} = \mathcal{F}^W_{t \wedge T_b}$ ⊛

es gilt $Z_{t\wedge T_b} = Z_{T_b}$.

Dann,

$$\boxed{\mathbb{P}^{(\mu)}(T_b \le t)} = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[T_b \le t]} \cdot Z_t\right)$$

$$\overset{\text{Bed. Erw}}{=} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[T_b \le t]} \cdot Z_t \mid \mathcal{F}^W_{t\wedge T_b}\right)\right)$$

$$\overset{⊛}{=} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[T_b \le t]} \cdot \mathbb{E}\left(Z_t \mid \mathcal{F}^W_{t\wedge T_b}\right)\right)$$

$$\underset{\substack{Z_t \text{ Mart. bzgl. } \mathcal{F}^W \\ (\text{Opt. Sampling})}}{=} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[T_b \le t]} \cdot Z_{t\wedge T_b}\right)$$

Novikov Bedingung

$$= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[T_b \le t]} \cdot Z_{T_b}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[T_b \le t]} \cdot e^{\mu \cdot b - \frac{\mu^2}{2} T_b}\right)$$

$$= \int_0^t \exp\left(\mu b - \frac{\mu^2}{2} s\right) \mathbb{P}(T_b \in ds) \quad (**)$$

$$= \int_0^t \exp\left(\mu b - \frac{\mu^2}{2} \cdot s\right) \cdot \frac{|b|}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{b^2}{2s}} \, ds$$

$$= \int_0^t \frac{|b|}{\sqrt{2\pi s^3}} \cdot e^{-\frac{(b-\mu s)^2}{2s}} \, ds. \quad (*)$$

Ableitung $\Rightarrow$ $\mathbb{P}^{(\mu)}(T_b \in dt) = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(b-\mu t)^2}{2t}} \, dt$ ✓.

② $$\mathbb{E}^{(\mu)}\left(e^{-\alpha T_b}\right) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cdot \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} \cdot e^{-\frac{(b-\mu t)^2}{2t}} \, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-\frac{\mu^2}{2} t} \frac{e^{-\frac{b^2}{2t}} e^{\mu b} |b|}{\sqrt{2\pi t^3}} \, dt$$

$$\overset{\tilde{\alpha} = \alpha + \frac{\mu^2}{2}}{=} e^{\mu b} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-\tilde{\alpha} t} e^{-\frac{b^2}{2t}} |b|}{\sqrt{2\pi t^3}} \, dt = e^{\mu b} \mathbb{E}\left(e^{-\tilde{\alpha} T_b}\right)$$

$$= \exp\left(\mu b - |b| \cdot \sqrt{\mu^2 + 2\alpha}\right). \#$$

Bemerkung: . Wie kann man verstehen dieses Drift / Masswechsel?

⇒ In diesem Fall, den Masswechsel ist nicht anderes als eine Verschiebung vom Bezugssystem mit Geschwindigkeit $+\mu$.

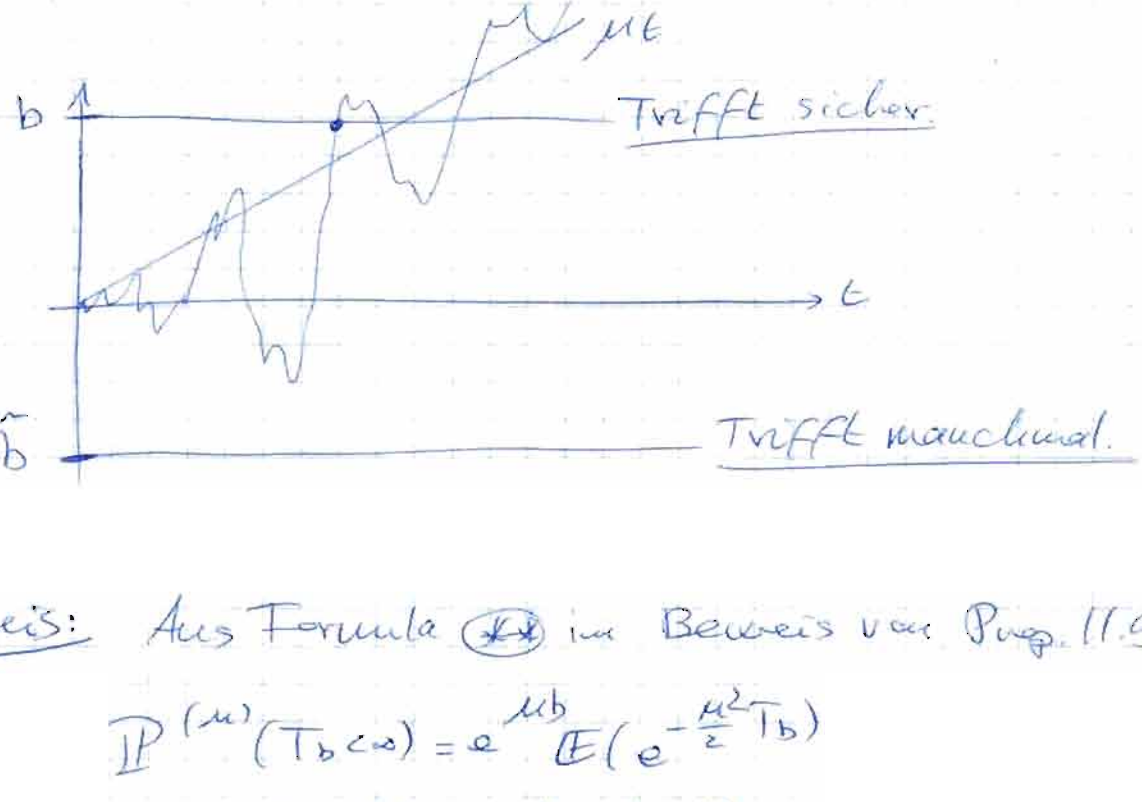
Auch: ⇒ Wegen $\mathbb{P} \ll \mathbb{P}^{(\mu)}$ und $\mathbb{P}^{(\mu)} \ll \mathbb{P}$, es gibt kein Test auf $[0,T]$, der mit 100% Sicherheit zwischen BB mit und ohne Drift unterscheiden kann !

Kor. 11.10) $\boxed{\mathbb{P}^{(\mu)}(T_b < \infty) = \exp(\mu b - |\mu \cdot b|).}$

. Das bedeutet, dass eine B.B. mit Drift $\mu \neq 0$ wird durch das Niveau $b \neq 0$ mit W-keit 1

$\Longleftrightarrow \quad \operatorname{sgn}(\mu) = \operatorname{sgn}(b)$.

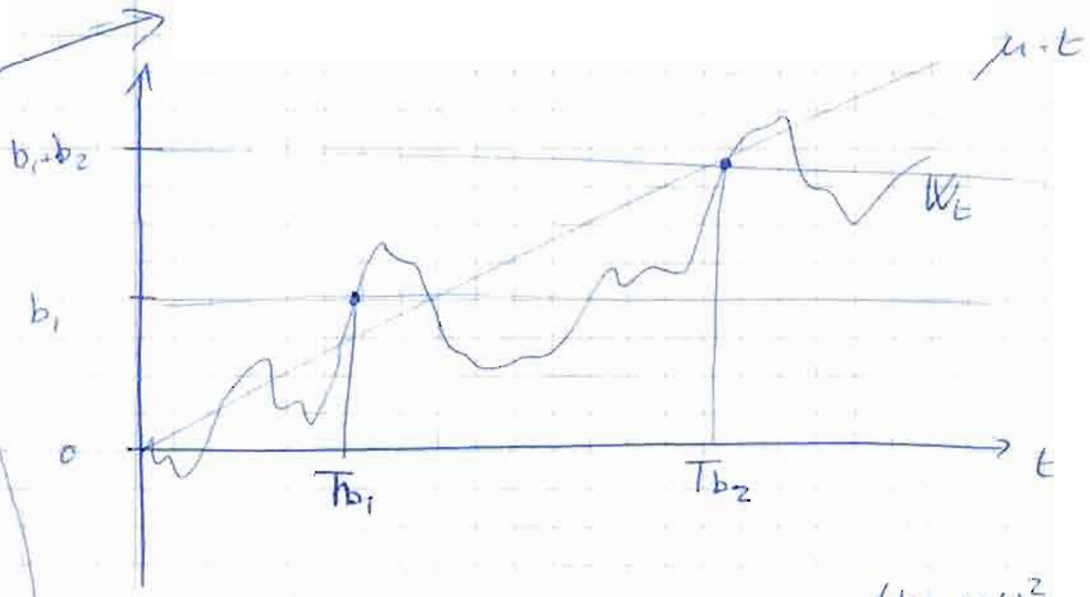
(eine BB mit Drift ist nicht rekurrent !)



. **Beweis:** Aus Formula (**) im Beweis von Prop. 11.9,

$$\mathbb{P}^{(\mu)}(T_b < \infty) = e^{\mu b}\, \mathbb{E}\left(e^{-\frac{\mu^2}{2} T_b}\right)$$

$$\underset{\text{mit } \alpha = \frac{\mu^2}{2}}{\overset{\text{Prop. 11.8}}{=}} e^{\mu b}\, e^{-|\mu \cdot b|} \,. \quad \#$$



- Sei $h_{\mu,b}(t) := \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(b-\mu t)^2}{2t}}$, $t>0$, $b\neq 0$, $\mu\in\mathbb{R}$.

Dann, ist es klar, dass

$$h_{\mu,b_1+b_2}(t) = (h_{\mu,b_1} * h_{\mu,b_2})(t) \quad \text{wenn } b_1 \cdot b_2 > 0,$$

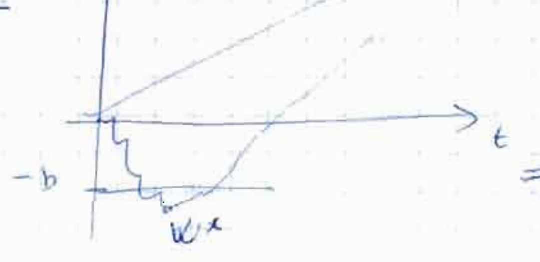
wobei $*$ ist die Konvolution.

- Um das zu sehen, benutzt man (zusammen mit Thm 10.12): $(W_{t+T_{b_1}} - W_t)_{t\geq 0}$ ist eine B.B. mit Drift μ (bzgl. $\mathbb{P}^{(\mu)}$).

Kor. 11.11) Sei $\mu>0$ und $W_* := \inf_{t\geq 0} W_t$.

Dann, $\mathbb{P}^{(\mu)}(-W_* \in db) = 2\mu e^{-2\mu b}\, db$, $b>0$.

Beweis:



$\mathbb{P}^{(\mu)}(W^* \leq -b) = \mathbb{P}^{(\mu)}(T_{-b} < \infty)$

$\underset{\text{Kor 11.10}}{=} \exp(-2\mu b)$

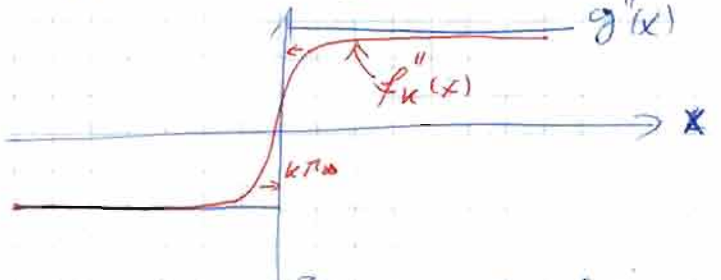
$\Rightarrow \frac{d}{db}(1) \Rightarrow$ #.

11.A) Lokal Zeit für Brownsche Bewegung.

. Eine kleine Erweiterung von Itô-Formula:

Lem. 11.A.1) Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine std. 1-d. Brownsche Bewegung. Dann, Itô-Formula gilt für $Y_t = g(B_t)$ wenn: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $C^1(\mathbb{R})$ und C^2 bis auf eine endliche Menge $\{z_1, .., z_N\}$, wenn g'' ist lokal beschränkt auf $\mathbb{R} \setminus \{z_1, .., z_N\}$.

Beweis: Durch Approximierung wie in diesem Beispiel:



. Wählen wir $f_k \in C^2(\mathbb{R})$ s.d. $f_k \to g$, $f_k' \to g'$ gleichmässig als $k \to \infty$,

und s.d. für $x \notin \{z_1, .., z_N\}$,

$$\begin{cases} f_k''(x) \to g''(x) \\ |f_k''(x)| \leq M \text{ in einer Umgebung von } \{z_1, .., z_N\}. \end{cases}$$

. Für f_k gilt Itô-Formula:

$$f_k(B_t) = f_k(B_0) + \int_0^t f_k'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_k''(B_s)\,ds.$$

Dann, im $k\to\infty$ Limes, diese Gleichung konvergiert in $L^2(\Omega,\mathbb{P})$ gegen

$$g(B_t) = g(B_0) + \int_0^t g'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t g''(B_s)\,ds.$$

#

- Eine Anwendung von Lemma 11.A.1 ist eine Formula (Tanaka-Formula) für "lokale Zeit".

Thm. 11.A.2) Sei $t\mapsto B_t$ eine 1-d. BB. und λ das Lebesguemass auf $\mathbb{R}$. Dann, das Limes

$$L_t = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon}\lambda\left(\{s\in[0,t] \text{ s.d. } B_s\in(-\varepsilon,\varepsilon)\}\right)$$

existiert in $L^2(\Omega,\mathbb{P})$ und ist gegeben durch

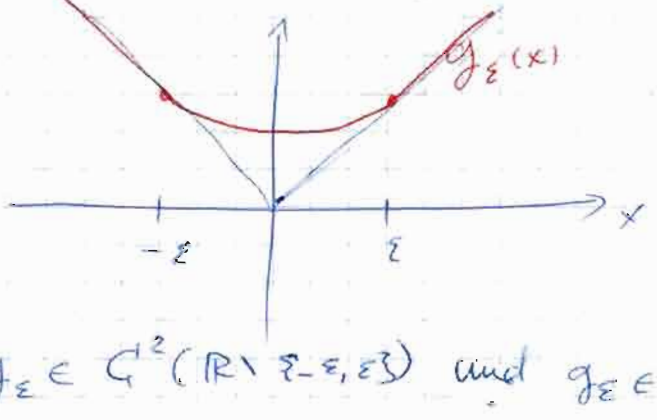
$$L_t = |B_t| - |B_0| - \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\,dB_s.$$

Bedeutung: "L_t ist die Zeit, die $(B_s)_{0\le s\le t}$ in Null während $[0,t]$ verbracht hat".

Bemerkung: Manchmal statt L_t ist $2L_t$ in die Literatur.

Beweis: Sei, für $\varepsilon>0$, die Funktion

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} |x|, & \text{für } |x|\geq\varepsilon, \\ \frac{1}{2}\left(\varepsilon+\frac{x^2}{\varepsilon}\right), & \text{für } |x|<\varepsilon. \end{cases}$$



- $g_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R}\setminus\{-\varepsilon,\varepsilon\})$ und $g_\varepsilon\in C^1(\mathbb{R})$.

Deshalb kann man Lem. II.A.1 anwenden und erhalten wir:

$$\frac{1}{2}\int_0^t g''_\varepsilon(B_s)\,ds = g_\varepsilon(B_t) - g_\varepsilon(B_0) - \int_0^t g'_\varepsilon(B_s)\,dB_s,$$

wobei
$$g'_\varepsilon(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x), & \text{für } |x| \geq \varepsilon, \\ \frac{x}{\varepsilon}, & \text{für } |x| < \varepsilon, \end{cases}$$

und
$$g''_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\cdot \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(x) \quad \text{falls } x \notin \{-\varepsilon, \varepsilon\}.$$

. Im $\varepsilon \to 0$ Limes, $\frac{1}{2}\int_0^t g''_\varepsilon(B_s)\,ds = L_t$.

Ausserdem, $g_\varepsilon(B_t) \to |B_t|$, $g_\varepsilon(B_0) \to |B_0|$ als $\varepsilon \to 0$.

. Es bleibt das Integral zu kontrollieren:

Zeigen wir nun, $\int_0^t (g'_\varepsilon(B_s) - \operatorname{sgn}(B_s))\,dB_s \to 0$ in $L^2(\Omega, \mathbb{P})$.

$$\left\| \int_0^t (g'_\varepsilon(B_s) - \operatorname{sgn}(B_s))\,dB_s \right\|^2 =$$
$$= \left\| \int_0^t \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(B_s)\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}B_s - \operatorname{sgn}(B_s)\right) dB_s \right\|^2$$
$$\overset{\text{Isom.}}{=} \mathbb{E}\left(\int_0^t \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(B_s) \underbrace{\left(\frac{1}{\varepsilon}B_s - \operatorname{sgn}(B_s)\right)^2}_{\leq 1} ds \right)$$
$$\leq \int_0^t \mathbb{P}(B_s \in (-\varepsilon,\varepsilon))\,ds \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 .$$

weil B_s $(s>0)$ hat eine absolut-stetige Verteilung bzgl. Lebesgue-mass.

<u>Bemerkung:</u> Für $f \in C^2(\mathbb{R})$,

$$|f(t)| - |f(0)| - \int_0^t \operatorname{sgn}(f(s)) f'(s)\,ds = 0,$$

weil $\frac{d}{dt}|f(t)| = \operatorname{sgn}(f(t))f'(t)$ (für $f(t) \neq 0$).

$\Rightarrow$ Die <u>lokale Zeit</u> ist eine Itô-Korrektur dieser Formel, weil $d|B_t| \neq \operatorname{sgn}(B_t)\cdot dB_t$: wenn B_t schneidet Null während $[t, t+\Delta t]$, dann ist

$|B_{t+\Delta t} - B_t|$ <u>nicht gleich</u> $\operatorname{sgn}(B_t)\cdot(B_{t+\Delta t} - B_t)$.

Bemerkung über "Martingal vs. Lokales Martingal".

- Wir haben Itô-Integral für Elementar Prozesse und deren L^2-limes definiert.

  ↳ Sind Martingale.

- Dann haben wir das Itô-Integral für lokale Martingale, durch Lokalisierung (mit Stoppzeiten) erweitert.

  ↳ Sind i.A. nur lokale Martingale.

- Haben wir die Partielle Integration Formula gekriegt und dann die Itô-Formel für Semimartingale ($\Rightarrow$ lokale Mart.).

- Insbesondere, für $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$, $(B_t)_{t \geq 0}$ eine d-dim. B.B,

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t \nabla f(B_s) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(B_s)\, ds$$

$\Rightarrow$ Wenn f ist harmonisch, dann $\Delta f = 0$, so (mit $B_0 = 0$)

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t \nabla f(B_s)\, dB_s \in M^0_{loc}.$$

<u>Frage</u>: Ist $f(B_t)$ ein Martingal?

- Wir haben einige Kriterien gesehen, insbesonderes,
  - $X \in M_{loc}$ und X beschränkt $\Rightarrow$ X Martingal
  - $\mathcal{E}(X)$ exp. lok. Martingal : Novikov Bedingung : $\mathbb{E}(e^{\frac{1}{2}\langle X \rangle_t}) < \infty, \forall t \geq 0$

    $\Rightarrow$ $\mathcal{E}(X)$ Martingal.
  - $X \in M^0_{loc}$ und $\langle X^k, X^e \rangle_t = \delta_{k,e} \cdot t \overset{\text{Lévy}}{\Rightarrow} X$ ist B.B. ($\Rightarrow$ Mart.)

- $X_0 = 0$ und $\mathbb{E}(\mathcal{E}_\lambda(M)_t) = 1$, $\forall t \geq 0$ und $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{E}_\lambda(X)$ Martingal.

- Reicht ein dieser Kriterien zu sagen, dass $\int_0^t \nabla f(B_s)\, dB_s \in M^0$?

- Ist $\nabla f(B) \in L^2(B)$? (oder mindestens auf $[0,T]$?)

$$\|\nabla f\|^2_{B^T} = \mathbb{E}\left(\int_0^T (\nabla f(B_s))^2 ds\right) = \sum_{k=1}^d \int_0^T \mathbb{E}\left((\nabla_k f(B_s))^2\right) ds < \infty. \quad (*)$$

- Antwort: A priori nein!

- Gegenbeispiel: $d = 2$, $f(x,y) = \exp(x^2 - y^2) \cdot \cos(2xy)$.

$$\Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{x^2-y^2} \cdot \left[2x \cdot \cos(2xy) - 2y \cdot \sin(2xy)\right]$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^{x^2-y^2} \cdot \left[-2y \cdot \cos(2xy) - 2x \cdot \sin(2xy)\right].$$

und $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$ (so harmonic).

Aber: $(*)$ bleibt nicht beschränkt $\forall t \geq 0$.

z.B., für $T = 1$, die Verteilungsdichte von B_1 ist $\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \Rightarrow (*) = \infty$.

- Zu sehen, dass es gibt einen Problem, es reicht schon eigentlich zu sehen, dass

$$\mathbb{E}(f(B_1))$$

ist nicht voll-definiert, weil $f(B_1)$ ist nicht integrierbar.

$\Rightarrow$ Für dieses f, ist $f(B_t)$ nur ein lokales Martingal

(z.B, Martingal bzgl der Stoppzeiten $T_n = \inf\{t \geq 0 \text{ s.d. } |B_t| > n\}$.

12) Darstellung von lokale Martingale als stochastische Integrale

- Itô-Integral $\Rightarrow$ für $f \in L^2$,

$$X_t = Y_0 + \int_0^t f \, dB_s \quad , t \geq 0$$

ist ein Martingal bzgl. der von BB erzeugte Filtration, $\mathcal{F}_t^B$.

Ziel: In diesem Kapitel werden wir die Umkehrung zeigen, d.h., jedes lokale Martingal hat eine stochastische Integrale Darstellung.

- Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ ein stetiger Prozess, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Def. 12.1) ⓐ $(B_t)_{t\geq 0}$ ist eine BB an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptiert, wenn $(B_t)_{t\geq 0}$ ist eine BB und B_t ist $\mathcal{F}_t$-messbar, $\forall t \geq 0$.

ⓑ $(B_t)_{t\geq 0}$ ist eine $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-BB, falls

- $(B_t)_{t\geq 0}$ ist eine BB,
- B_t ist $\mathcal{F}_t$-messbar, $\forall t \geq 0$,
- $(B_{s+t} - B_t)_{s\geq 0}$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_t$, $\forall t \geq 0$.

Beispiel: $\mathcal{F}_t := \sigma(B_s, s \in \mathbb{R}_+) = \mathcal{F}_\infty$, $t \in \mathbb{R}_+$. (da, $B_{s+t} - B_t$ ist $\mathcal{F}_\infty$-messbar)
Dann, sind die Zuwächse nicht unab. bzgl. $\mathcal{F}_t$, d.h, $(B_t)_{t\geq 0}$ ist keine $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-BB, aber $(B_t)_{t\geq 0}$ adaptierte B.B..

Bemerkung: • Falls $(B_t)_{t\geq 0}$ eine $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-BB ist, dann ist auch ein Martingal bzgl. $\mathcal{F}_t$.

• Das ist nicht notwendig richtig für adaptierte BB, z.B. (wie oben) $\Rightarrow \mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) = B_t + B_s$.

Beispiel: Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine BB, $(C_t)_{t\geq 0}$ ein davon unab. Prozess, $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, C_r, 0 \leq r, s \leq t)$. Dann $(B_t)_{t\geq 0}$ ist $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-BB. (Insbesondere auf für $C \equiv 0$).

Def. 12.2) • $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ heisst Brownsche Filtration, falls es die kleinste Filtration ist, die standard ist und an die $(B_t)_{t\geq 0}$ adaptiert ist. Also, $\mathcal{F}_t = \overline{\mathcal{F}^0_{t+}}$, wobei $\mathcal{F}^0_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$.

• Sei $\mathcal{J}$ die Menge der elementaren, deterministischen Prozesse $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ der Form:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \mathbb{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(t), \quad \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Dann, sei $F_t = (f \cdot B)_t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot (B_{t_k \wedge t} - B_{t_{k-1} \wedge t})$ und das exponentielles lokales Martingal von F ist.

$$\mathcal{E}_t^F = \exp\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (B_{t_k\wedge t} - B_{t_{k-1}\wedge t}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \cdot (t \wedge t_k - t \wedge t_{k-1}) \Big).$$

Insbesonderes, $\mathcal{E}_\infty^F = \text{const.} \exp(F_\infty)$.

. $\mathcal{E}_\infty^F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$, weil

$$\|F_t\|_{L^2} \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \cdot \|B_{t\wedge t_k} - B_{t\wedge t_{k-1}}\|_{L^2}$$

$$= \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \cdot (t\wedge t_k - t\wedge t_{k-1})^{1/2} < \infty.$$

Lemma 12.3) Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine 1-d. BB und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Filtration.

Dann, die Menge $\{\mathcal{E}_\infty^{f\circ B} \text{ s.d. } f \in \mathcal{I}\}$ ist total in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$, d.h.,

$$\overline{\mathrm{vect}\{\mathcal{E}_\infty^{f\circ B} \text{ s.d. } f\in\mathcal{I}\}} = L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$$

Beweis: . Idee: Sei $0 \neq Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ der orthogonal zu jedem $\mathcal{E}_\infty^{f\circ B}$ und zeigen, dass Y ist f.s. Null.

. Wir zeigen, dass $Y\cdot\mathbb{P}$ ist Null-Mass auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$.

Dann, $0 = \int_{\{Y\geq 0\}} Y\, d\mathbb{P} \geq 0 \Rightarrow Y = 0$ $\mathbb{P}$-f.s.

. Dazu, es reicht zu zeigen, dass $Y\cdot\mathbb{P}$ ist Null-Mass auf $(\Omega, \sigma(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}))$ $\forall$ endliche Folge $(t_1, \ldots, t_n)$ und setzen $t_0 \equiv 0$.

. Für Y und $(t_1, \ldots, t_n)$ fest gewählt, betrachte $\varphi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$:

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) \equiv \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{k=1}^n z_k (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\right)\cdot Y\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{k=1}^n z_k (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\right)\cdot \mathbb{E}(Y \mid B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\sum_{k=1}^n z_k \cdot (x_k - x_{k-1})\right)\cdot g(x_1, \ldots, x_n)\, \mu(dx_1 \ldots dx_n)$$

wobei $\mu(dx_1 \ldots dx_n)$ = Verteilung von $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ unter $\mathbb{P}$

und $g(x_1 - x_n) = \mathbb{E}(Y | B_{t_1} = x_1, --, B_{t_n} = x_n)$.

$\Rightarrow \varphi$ ist holomorph.

• Nach Voraussetzung ist Y orthogonal zu jedem $\mathcal{E}_\infty^{f \cdot B}$ für $f \in \mathfrak{J}$. Insbesondere, $\varphi(\lambda_1, -, \lambda_n) = 0$, $\forall \lambda_1, -, \lambda_n \in \mathbb{R}$, weil $\varphi(\lambda_1, -, \lambda_n) = \frac{1}{\mathrm{Const}(f)} \underbrace{\langle \mathcal{E}_\infty^{f \cdot B}, Y \rangle}_{=0}$.

Daher folgt aber, dass $\varphi \equiv 0$ auf $\mathbb{C}^n$ (holomorph).

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[\exp\left(i \sum_{k=1}^{n} z_k (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\right) \cdot Y\right] \overset{(*)}{=} 0$$

$\|$

Fourier-Transformierte der Verteilungen von $(B_{t_1} - B_{t_0}, -, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ unter der Mass $Y \cdot \mathbb{P}$

$\Rightarrow$ das Mass $Y \cdot \mathbb{P}$ ist Null auf $\sigma(B_{t_1} - B_{t_0}, -, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) =$

$= \sigma(B_{t_1}, -, B_{t_n})$.

$B_{t_0} = 0$

#.

$\left((*) \Rightarrow \int e^{i \langle z, x \rangle} d(Y \cdot \mathbb{P})_{[B_{t_k} - B_{t_{k-1}}]_k}(x) \Rightarrow Y \cdot \mathbb{P} = 0 \text{ auf } \sigma(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}). \right)$

. Thm 12.4) Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Filtration.

Dann, $\forall F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$, $\exists!\ H \in L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+, \mathbb{P}\otimes \text{leb.})$, vorhersagbar

s.d.

$$F = \mathbb{E}(F) + \int_0^\infty H_s\, dB_s, \qquad (*)$$

wobei $\mathbb{P}$ ist das Wiener-Mass auf Ω, d.h., $(B_t)_{t\geq 0}$ ist BB auf Ω bzgl. $\mathbb{P}$.

Beweis: . Sei $\mathcal{H} = \{F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ mit Darstellung $(*)\}$.

Ziel: $\mathcal{H}$ ist abgeschlossen: Für $F \in \mathcal{H}$ es gilt:

$$(F - \mathbb{E}(F))^2 = \left(\int_0^\infty H_s\, dB_s\right)^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[(F - \mathbb{E}(F))^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty H_s\, dB_s\right)^2\right] \underset{\text{Isom.}}{=} \mathbb{E}\left(\int_0^\infty H_s^2\, ds\right)$$

$$\mathbb{E}(F^2) - [\mathbb{E}(F)]^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(F^2) = [\mathbb{E}(F)]^2 + \mathbb{E}\left(\int_0^\infty H_s^2\, ds\right).$$

. Deshalb, wenn $(F^{(n)})_{n\geq 1}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}$, dann ist die zugehörige Folge $(H^{(n)})_{n\geq 1}$ Cauchy in $L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+, \mathbb{P}\otimes\text{leb})$. (vorhersagbar)

$\Rightarrow H^{(n)} \to H \in L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+, \ldots)$ und $F^{(n)} \to F \in L^2(\Omega, \ldots)$,

so H und F erfüllen die Gleichung $(*)$, d.h., $\mathcal{H}$ ist abgeschlossen.

Details: $\|H^{(n)} - H^{(m)}\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+ \ldots)} = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty (H_s^{(n)} - H_s^{(m)})^2\, ds\right)$

$$= \mathbb{E}(F^{(n)} - F^{(m)})^2 - (\mathbb{E}(F^{(n)} - F^{(m)}))^2$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \|F^{(n)} - F^{(m)}\|_{L^2}^2 + \left(\int_\Omega |F^{(n)} - F^{(m)}|^2 dP\right)^{\frac{1}{2}\cdot 2}$$

$$= 2\cdot \|F^{(n)} - F^{(m)}\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0 \text{ als } m,n\to\infty.$$

. Ziel: $\mathcal{H} \supset \{ \mathcal{E}^{f\cdot B}_\infty, f \in \mathcal{J} \}$

. In der Tat, aus Itô-Formel,

$$d\mathcal{E}^{f\cdot B}_t = \mathcal{E}^{f\cdot B}_t \, d(f\cdot B)_t$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}^{f\cdot B}_\infty = \underbrace{\mathcal{E}^{f\cdot B}_0}_{\equiv 1} + \int_0^\infty \mathcal{E}^{f\cdot B}_t \, d\left(\int_0^t f(s)\, dB_s\right)$$

$$= 1 + \int_0^\infty \mathcal{E}^{f\cdot B}_t f_t \, dB_t$$

$= \mathbb{E}(\mathcal{E}^{f\cdot B}_0)$

$$\overset{\text{Mart. für } f\in\mathcal{J}}{=} \mathbb{E}(f^{f\cdot B}_\infty) + \int_0^\infty H_s \, dB_s, \text{ mit } \underbrace{H_s = \mathcal{E}^{f\cdot B}_s f(s)}_{\in L^2.}$$

. Ausserdem ist $\mathcal{H}$ linear. Deshalb, aus Lemma 12.3,

$$L^2 \overset{!}{=} \overline{\text{vect}\{ \mathcal{E}^{f\cdot B}_\infty, f\in\mathcal{J}\}} \subset \mathcal{H} \subset L^2(\ldots) \Rightarrow \mathcal{H} = L^2.$$

. Die Eindeutigkeit der Darstellung in (*) folgt aus Itô-Isometrie: $\;\; . \|H_s - \tilde{H}_s\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+,\ldots)} = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty |H_s - \tilde{H}_s|^2 ds\right)$

$$= \mathbb{E}\left[\Big(\underbrace{\int_0^\infty (H_s - \tilde{H}_s)\, dB_s}_{=0}\Big)^2\right] = 0 \Rightarrow H = \tilde{H}. \quad \#$$

Lokale Martingal Analog

Thm. 12.5) (Itô)

Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Filtration.

Dann, jedes lokale $(\mathcal{F}_t)_{t\geq0}$-Martingal M besitzt eine stetige Version mit der Darstellung:

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s \, dB_s$$

wobei die Konstante M_0 und $H \in L^2_{loc}(\Omega\times\mathbb{R}_+, \text{vorhers}, \mathbb{P}\otimes\text{Leb})$ sind eindeutig bestimmt.

...

Skip the proof

Beweis: ⓐ Sei zunächst M L^2-beschränktes Martingal.

O.B.d.A., M rechtsstetig und $M_0 = 0$.

Dann, $\exists M_\infty \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ s.d. $M_t = \mathbb{E}(M_\infty | \mathcal{F}_t)$

und aus Thm 12.4, $\exists! H \in L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \dots)$ s.d.

$$M_\infty = \int_0^\infty H_s \, dB_s$$

$$\Rightarrow M_t = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s \, dB_s | \mathcal{F}_s\right) + \underbrace{\mathbb{E}\left(\int_t^\infty H_s \, dB_s | \mathcal{F}_t\right)}_{\overset{\text{unab.}}{=} \mathbb{E}\left(\int_t^\infty H_s \, dB_s\right) = 0 \text{ (lok. Mart.)}}$$

$$\overset{\text{Messbarkeit}}{=} \int_0^t H_s \, dB_s \quad f.s.$$

$\Rightarrow$ Behauptung ok, insbesondere M stetig.

ⓑ Sei M ein uniform integrierbares Martingal (rechtsstetig, $M_0 = 0$).

$\Rightarrow \exists M_\infty \in L^1$ und wegen L^2 dicht in L^1, es gilt:

- $\exists$ Folge $M_\infty^{(n)} \in L^2$ s.d. $\mathbb{E}(|M_\infty^{(n)} - M_\infty|) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

$\Rightarrow \exists$ Folge von L^2-beschr. Martingale, $(M_t^{(n)})_{t \geq 0}$ mit

$$M_t^{(n)} := \mathbb{E}(M_\infty^{(n)} | \mathcal{F}_t).$$

(Da $(M_t^{(n)})_{t \geq 0}$ Martingal ist klar. $\mathbb{E}[(M_t^{(n)})^2] \overset{\text{Hölder}}{\leq} \mathbb{E}(\mathbb{E}(|M_\infty^{(n)}|^2 / \mathcal{F}_t))$
$= \mathbb{E}(|M_\infty^{(n)}|^2) < \infty$.)

- Doob-Ungleichung

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\sup_{t \geq 0} |M_t^{(n)} - M_t| > \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(|M_\infty^{(n)} - M_\infty|) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

- Wegen Borel-Cantelli $\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(M^{(n_k)})_{k \geq 1}$ die uniform gegen M konvergiert $\overset{ⓐ}{\Rightarrow}$ M stetig f.s.

(c) Sei schliesslich M rechtsstetiges lokales Martingal.

$\Rightarrow \exists$ Stoppzeiten $T_n \nearrow \infty$ s.d. M^{T_n} rechtsstetiges Martingal

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $(M_t^{n \wedge T_n})_{t \geq 0}$ ist uniform integrierbar, rechtsstetiges Martingal.

$\overset{(b)}{\Rightarrow} M^{n \wedge T_n}$ ist stetig f.s.

$\overset{n \to \infty}{\Rightarrow} (M_t)_{t \geq 0}$ stetig f.s.

. Wähle $\tau_n := \inf\{t \geq 0 \text{ s.d. } |M_t| > n\}$

$\Rightarrow (M_t^{\tau_n})_{t \geq 0}$ ist beschränkt, also auch L^2-beschr.
(vorher, ohne Stetigkeit ist nicht wichtig!)

$\overset{(a)}{\Longrightarrow} \exists H^{(n)}$ s.d. $M^{\tau_n} = H^{(n)} \cdot B$.

$\$$, $\forall m \geq n$, $(M^{\tau_m})^{\tau_n} = M^{\tau_n} \Rightarrow (M^{\tau_m})^{\tau_n} = (H^{(m)} \cdot B)^{\tau_n}$
$= H^{(m)\tau_n} \cdot B$.

$\overset{\text{Eindeutigkeit}}{\Longrightarrow} (H^{(m)})^{\tau_n} \underset{\uparrow}{=} H^{(n)}$, d.h. $\exists H$ s.d. $H^{(n)} = H^{\tau_n} \Rightarrow M = H \cdot B$.

d.h. $H^{(m)}$ und $H^{(n)}$ stimmen auf $[0,\tau_n)$ überein.

$\Rightarrow$ Konsistenz: $\forall T > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall t \leq T$.
$M_t = (H^{(n)} \cdot B)_t \Rightarrow \exists H$ s.d. $M = H \cdot B$
wegen $\tau_n \nearrow \infty$; $H^{(n)} \in L^2$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow H \in L^2_{loc}$. □

. Bemerkung: . Für stetiges M, es gilt

$$M_t = \frac{d}{dt}\langle M, B\rangle_t \quad \text{(die Radon-Nikodym-Ableitung)}.$$

weil $\langle M, B\rangle_t = \int_0^t H_s\,ds$.

. Bemerkung: In die "andere Richtung" gilt nicht:

. Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine BB und $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ die Brownsche Filtration.

Dann, existieren $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$-Martingal M

B_t nicht als

$$\underbrace{B_0}_{=0} + \int_0^t A_s\,dM_s$$

darstellen kann.

. Beispiel: Sei $\beta_t := \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\,dB_s$.

$\Rightarrow$ β_t ist eine $\mathcal{F}_t^B$-B.B.

In der Tat, β_t ist $\mathcal{F}_t^B$-adaptiert (klar),

$(\beta_{t+s} - \beta_t)_{s\geq 0}$ ist von $\mathcal{F}_t^B$ unabhängig (klar)

und $\langle \beta\rangle_t = \int_0^t (\operatorname{sgn}(B_s))^2\,ds = \int_t^t 1\,ds = t$,

so aus Lévy Charakterisierung, ist β_t eine B.B..

. Nehmen wir an, dass $\exists\, A_t$, $\mathcal{F}_t^B$-messbar,

s.d. $B_t = \int_0^t A_s\,d\beta_s$

$\Rightarrow$ B_t ist $\mathcal{F}_t^\beta$-messbar $\Rightarrow$ $\mathcal{F}_t^B \subseteq \mathcal{F}_t^\beta$.

Aber: $\beta_t = |B_t| - L_t$, mit L_t die Lokale Zeit.

· Man kann zeigen, dass L_t ist eine bzgl. der von $(|B_s|)_{0\le s\le t}$ erzeugten Filtration messbare Zufallsvariable.

$$\Rightarrow \beta_t \in \mathcal{F}_t^{|B|}.$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_t^{B} \subseteq \mathcal{F}_t^{\beta} \subseteq \mathcal{F}_t^{|B|} \Rightarrow \mathcal{F}_t^{B} \subseteq \mathcal{F}_t^{|B|}$$, das ist aber falsch, d.h., die Annahme stimmt nicht.

Falsch, weil: $\mathcal{F}_t^{|B|}$ enthält alle Informationen über $|B|$, die strikt weniger als die Informationen über B sind ($\Rightarrow \mathcal{F}_t^{|B|} \subsetneq \mathcal{F}_t^{B}$).

· Beispiele: (a) Sei $T \in \mathbb{R}_+$ fest und $M_t = B_{T\wedge t}$.

$$\Rightarrow \quad M_t = \int_0^t \mathbb{1}_{(s\le T)}\, dB_s$$

(b) Sei $F_t = B_t^2 \Rightarrow M_t = F_t - t \in \mathcal{M}^0_{(loc)}$

$$\Rightarrow M_t = 2\int_0^t B_s\, dB_s \Rightarrow B_t^2 = t + 2\int_0^t B_s\, dB_s$$

(c) Sei $F_t = e^{B_t} \Rightarrow M_t = e^{B_t - \frac{t}{2}} \in \mathcal{M}^0_{(loc)}$

$$\Rightarrow M_t = 1 + \int_0^t e^{B_s - \frac{s}{2}}\, dB_s$$

$$\Rightarrow e^{B_t} = e^{\frac{t}{2}}\left(1 + \int_0^t e^{B_s - \frac{s}{2}}\, dB_s\right).$$

(d) In ÜB 8, HA 1, hat man gezeigt, dass

$$X_t := \sin(B_t) + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(B_s)\, ds$$

ein Martingal ist.

· $X_0 = 0$ und $d\langle X, B\rangle_t = \cos(B_t)\, dt$

$$\Rightarrow \quad X_t = \int_0^t \cos(B_s)\, dB_s.$$

Check mit Itô-Formel auf $\sin(B_t)$. ✓

A) Stoch. Prozesse, Filtrationen und Stoppzeiten.

A.1) Brownsche Bewegung

· (Def. 1.3): Eine 1-d Brownsche Bewegung ist ein reellwertigen Prozess $(B_t)_{t\geq 0}$ mit:

ⓐ Für $0=t_0\leq t_1\leq\dots\leq t_n$, sind die Zufallsvariablen

$$B_{t_{j+1}}-B_{t_j},\ j=0,\dots,n-1,$$ unabhängige.

ⓑ Für $s,t\geq 0$, dann

$$\mathbb{P}(B_{s+t}-B_s\in A)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_A e^{-\frac{x^2}{2t}}\,dx,\ \forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

ⓒ $t\mapsto B_t$ ist stetig.

. Eigenschaften:
- (Thm. 2.5) $t\mapsto B_t$ sind f.s. nirgendwo Ableitbar, und haben f.s. unbeschränkte Variation.
- (Kor. 2.15) $\exists$ Modifikation von BB, die γ-Hölder stetig für $\gamma\in(0,1/2)$ ist.

. (Def. 2.11): Zwei stoch. Prozesse X, Y sind:
- Modifikationen voreinander, falls: $\mathbb{P}(X_t=Y_t)=1,\ \forall t\geq 0$,
- Ununterscheidbar, falls: $\mathbb{P}(X_t=Y_t,\ \forall t\geq 0)=1$.

$\Rightarrow$ Deshalb kann man in ⓒ eine stetige Version nehmen.

A.2) Filtrationen

· (Def. 3.1). Filtration: eine nichtfallende Familie $\{\mathcal{F}_t, t\geq 0\}$ von σ-Algebren von $\mathcal{F}$ (d.h., $\mathcal{F}_s\subseteq\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}$, $0\leq s<t<\infty$).

. (Def. 3.2) . Filtrierter W-raum: $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,\mathbb{P})$ mit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration.

. (Def. 3.5) Standard (filtrierter) W-Raum: $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,\mathbb{P})$, falls die Filtrierung vollständig (alle $(\mathcal{F},\mathbb{P})$-Nullmenge sind in $\mathcal{F}_0$) und rechtsstetig ($\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}$).

- (Def. 3.6) Sei $\mathcal{F}_t^X$ die von X erzeugte Filtration ($\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s, 0 \le s \le t)$)
  $\Rightarrow$ X ist an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptiert, wenn
  $$\mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{F}_t, \ \forall t \geq 0, \text{ d.h.,}$$
  X_t ist $\mathcal{F}_t$-messbar, $\forall t \geq 0$.

- (Def. 3.7): X_t progressiv messbar bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls $\forall t \geq 0$
  $$X : (s,\omega) \longmapsto X_s(\omega) \text{ ist messbar bzgl. } \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t.$$

A.3) Stoppzeiten:

- (Def. 3.9) $T : \Omega \to [0, \infty]$ Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls $\forall t \geq 0$,
  $$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

- Eigenschaften: (Prop. 3.10 (a)) Jede Konstante ist eine Stoppzeit.
  (Prop. 3.10 (d)) T Stoppzeit $\Leftrightarrow$ $X_t = \mathbb{1}_{[0,T)}(t)$ ist adaptiert.
  (Prop. 3.11. (b)) S, T Stoppzeiten $\Rightarrow$ $S \wedge T$, $S \vee T$, $S + T$ Stoppzeiten.

- Beispiel: $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, X_t adaptiert, rechtsstetig.
  $$T_A(\omega) = \inf\{t \geq 0 \mid X_t(\omega) \in A\}, \quad \inf\{\emptyset\} = \infty \text{ (Eintrittzeit)}$$
  $\Rightarrow$ A geschlossen ~~und~~ X stetig $\Rightarrow$ T_A Stoppzeit.
  $\Rightarrow$ Jede Stoppzeit ist eine Eintrittzeit.

- Def. X progr. messbar bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, T Stoppzeit.
  $\Rightarrow$ Gestoppte Prozess: $X^T : (t,\omega) \longmapsto X_{T(\omega)\wedge t}(\omega)$.

B) Martingale, Semimartingale.

B.1) Martingale

Def. 4.3/4/5) • X submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ falls:

• X adaptiert, $X_t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(X_t^+) < \infty$, und

$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$ f.s. für $0 \leq s < t$.

• X supermartingal, falls $-X$ submartingal.

• X Martingal, falls $X, -X$ submartingal, d.h.,

$\mathbb{R} \ni X$ adaptiert, $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$, $\forall\, 0 \leq s \leq t$:

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s \text{ f.s.}$$

• Eigenschaften: (Prop 4.7(a)) X, Y Martingale, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow X+Y, X-Y, \alpha X$ Martingale.

(Prop. 4.7(b)) X Martingal, φ konvex s.d. $\varphi(X_t) \in L^1$

$\Rightarrow (\varphi(X_t))_{t\geq 0}$ submartingal.

• Doob's Maximal Inequality: $\forall\, p > 1$, mit $(X_t)_{t\geq 0}$ submartingal mit ~~jede~~ Trajektorie rechtsstetig, $[\sigma, \tau] \subset [0, \infty)$, dann

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t\right)^p\right] \leq \left(\frac{p}{1-p}\right)^p \cdot \mathbb{E}(X_\tau^p).$$

• Konvergenzsatz: (~~Th~~ 4.11) $(X_t)_{t\geq 0}$ rechtsstetiges Submartingal, mit $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}(X_t^+) < \infty$, dann $\exists$ f.s. eindeutig

$$X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t \text{ f.s.}$$

(Kor 4.12) $(X_t)_{t\geq 0}$ rechtsstetiges, ≥ 0 Supermart.

$\Rightarrow X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$ f.s. (existiert ein X_∞)

• Optional sampling: ~~Idee: Erweitert auf S, T stoppzeiten z.B.~~

~~$\mathbb{E}(X_T | \mathcal{F}_S) = X_S$ f.s. für Martingal~~, wenn

~~$S \leq T$ f.s.~~

. (Thm. 4.13(d)): Für Martingale, $\exists X_\infty \in L^1$ s.d.
$X_t = \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_t)$, $\forall t \geq 0$, f.s.

. Optional Sampling (Erweitert "die Def." auf Stoppzeiten):
. $S \leq T$ Stoppzeiten, X Martingal
$\Rightarrow X_S = \mathbb{E}(X_T | \mathcal{F}_S)$ f.s.,
insbesondere: $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.

B.2) Semimartingale:

. (Def. 5.1) . $X \in \mathcal{A}$: Stetig, endlicher Variation, adaptiert.
. $X \in \mathcal{M}$: Stetiges Martingal.
. $X \in \mathcal{M}_{loc}$: stetiges, lokales Martingal: adaptiert und
$\exists$ Stoppzeiten $T_n, n \geq 1$ s.d. $T_n \nearrow \infty$ f.s.,
X^{T_n} Martingal.

. Eigenschaften:
Lem 5.3(a): $X \in \mathcal{M}_{loc}$ und beschränkt $\Rightarrow X \in \mathcal{M}$
Lem 5.3(b). $X \in \mathcal{M}_{loc}$, $X \geq 0 \Rightarrow X$ Supermart.

(Def. 5.4) . $X \in \mathcal{S}$: Semimartingal, falls $\exists M \in \mathcal{M}_{loc}$, $A \in \mathcal{A}$ s.d.
$X = M + A$.

. Eigenschaften (Thm 5.5): $\mathcal{M}^0_{loc} = \mathcal{M}_{loc} \cap \{X_0 = 0\}$
$\Rightarrow \boxed{\mathcal{M}^0_{loc} \cap \mathcal{A} = \{0\}} \Rightarrow \mathcal{S} = \mathcal{M}^0_{loc} \oplus \mathcal{A}$.

. Doob-Meyer Zerlegung (Thm. 5.6):
. X stetiges Supermartingal
$\Rightarrow \exists!\, M \in \mathcal{M}^0_{loc}$, $A \in \mathcal{A}^+$ s.d.
$\boxed{X_t = M_t - A_t}$

B.3) Quadratische Variation.

- Thm 5.10 (a)(b): • $\forall M \in \mathcal{M}_{loc}, \exists! \langle M \rangle \in \mathcal{A}_0$ s.d. $M^2 - M_0^2 - \langle M \rangle \in \mathcal{M}_{loc}^0$

  • $\forall M, N \in \mathcal{M}_{loc}, \exists! \langle M, N \rangle \in \mathcal{A}_0$ s.d. $M \cdot N - M_0 N_0 - \langle M, N \rangle \in \mathcal{M}^0_{loc}$.

- (Def 5.9 bis) $\begin{cases} \cdot \langle M \rangle \hat{=} \text{quadratische Variation von } M \\ \cdot \langle M, N \rangle \hat{=} \text{" Kovariation von } M \text{ und } N. \end{cases}$

- Eigenschaften: (Lem. 5.11): $\begin{cases} \langle M, N \rangle^T = \langle M^T, N^T \rangle, \ \forall \text{ Stoppz. } T. \\ \cdot \langle M \rangle = 0 \iff M \text{ Konstant} \end{cases}$

  (Lem 5.15): $\begin{cases} \forall\, a < b,\ \langle M \rangle_a(\omega) = \langle M \rangle_b(\omega) \ \ \omega\text{-f.s.} \\ (\Rightarrow) \ M_t(\omega) = M_a(\omega) \ \ \forall\, t \in [a,b]. \end{cases}$

B.4) L^2-beschränke Martingale

(Def. 5.19) • $H^2 := \{ M \in \mathcal{M} \mid \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}(M_t^2) < \infty \}$

Eigenschaften (Prop 5.20) $\begin{cases} \cdot\ H^2 \text{ Hilbert Raum bzgl. Norm} \\ \quad \|M\|_{H^2} := \sqrt{\mathbb{E}(M_\infty^2)} \\ \cdot \text{ Für } M \in H_0^2 = H^2 \cap \{M_0 = 0\}, \\ \quad \|M\|_{H^2} = \sqrt{\mathbb{E}(\langle M \rangle_\infty)} \end{cases}$

(e.g., Itô-Integral).

ⓒ Stochastische Integral und Itô-Formel.

C.1) Für $A \in \mathcal{A}$: (Prop 6.3) g rechtsstetig, wachsend,
f linksstetig, lokal beschränkt.

$$\Rightarrow \int_0^t f\,dg = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\left(g(t_{k+1}) - g(t_k)\right).$$

wobei Δ = partition $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = t$.

. $X \in \mathcal{B}$: adaptiert, linksstetig, pfadweise lokal beschränkt.

(Def. 6.4) $A \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{B}$ $\Rightarrow$ Pfadweise definiert man:

$$(X \cdot A)_t(\omega) = \int_0^t X_s(\omega)\,dA_s(\omega)$$

Eigenschaften: (Thm 6.5): . $A \in \mathcal{A}$, $X, Y \in \mathcal{B}$, T stoppzeit:

$$\begin{cases} \bullet\ X \cdot A \in \mathcal{A}_0 \\ \bullet\ X \cdot A \text{ bilinear} \\ \bullet\ (X \cdot A)^T = X \cdot A^T \\ \bullet\ Y \cdot (X \cdot A) = (Y \cdot X) \cdot A \end{cases}$$

C.2) Itô-Integral: Probleme: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(B_{t_k})(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$
existiert pfadweise nicht
. $f(B_{t_k})$ oder $f(B_{t_{k+1}})$? $\to$ Anders

ⓐ Auf Elementar Prozesse $\mathcal{E}$: $X_t(\omega) = \xi_0(\omega) 1\!\!1_{\{0\}}(t) + \sum_{k\geq 0} \xi_k(\omega) 1\!\!1_{(t_k, t_{k+1}]}(t)$,

(Def. 6.8): $\begin{cases} M \in H^2, X \in \mathcal{E} \\ \Rightarrow \int_0^t X_s\,dM_s \doteq \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \left(M_{t_{k+1}\wedge t} - M_{t_k \wedge t}\right). \\ \text{(Pfadweise definiert)} \end{cases}$

Eigenschaften: $\begin{cases} .\ X \cdot M \in H_0^2 \quad (\Rightarrow \text{Martingal}) \\ .\ \langle X \cdot M \rangle_t = (X^2 \cdot \langle M \rangle)_t \\ .\ \text{Isometrie: } \|X \cdot M\|_{H^2}^2 = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty X_s\,dM_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty X_s^2\,d\langle M\rangle_s\right). \end{cases}$

Eigenschaften: (Prop 6.11). $M, N \in H^2$, $X, Y \in \mathcal{E}$

(KW) $\Rightarrow \langle X \cdot M, Y \cdot N \rangle_t = ((XY) \cdot \langle M, N \rangle)_t$

(b) Erweiterung zu $X \in L^2(M)$:

(Def. 6.15) $L^2(M) =$ Äquivalenzklassen von $\mathcal{L}^2(M)$ bzgl. $\|\cdot\|_M$, wobei $\mathcal{L}^2(M) = \{X$ vorhersagbar, d.h. $X \in \sigma(\mathcal{E})$, mit $\|X\|_M \equiv \sqrt{\mathbb{E}\left(\int_0^\infty X_t^2 \, d\langle M \rangle_t\right)} < \infty\}$.

. (Thm 6.17) Für $X \in L^2(M)$, $\exists! \, (X \cdot M) \in H_0^2$ s.d. für alle Folge $(X^n)_{n \geq 1}$, $X^n \in \mathcal{E}$ s.d. $\|X - X^n\|_M \to 0$, $\|X \cdot M - X^n \cdot M\|_{H^2} \to 0$.

(Def. 6.18). Für $X \in L^2(M)$, $X \cdot M$ ist der einzige Prozess von Thm 6.17

. Schritte:

ⓐ Approximiere $X \in L^2(M)$ mit $X^n \in L^2(M) \cap \mathcal{E}$ s.d. $\|X - X^n\|_M = \sqrt{\mathbb{E}\left(\int_0^\infty |X_t - X_t^n|^2 d\langle M \rangle_t\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ⓑ Itô-Isometrie auf ~~Vorhandenen Folge X^n, m~~ Cauchy-Folge in $\mathcal{E}$:

$\|X^n - X^m\|_M = \|X^n \cdot M - X^m \cdot M\|_{H^2} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow (X^n \cdot M)_{n \geq 1}$ Cauchy-Folge in H^2.

. Eigenschaften: Wie bei Elementarprozesse, insbesondere die KW-Identität, Isometrie, Assoziativität, $X \cdot M \in H_0^2 \Rightarrow$ Martingal.

C.3) Durch Lokalisierung $\Rightarrow$ Erweiterung auf lokale Martingale (und Semimartingale).

· (Prop. 6.22): $\left\{ \cdot\ X \in L^2(M),\ T \text{ Stoppzeit} \Rightarrow (X \cdot M)^T = X \cdot M^T = (X \mathbb{1}_{[0,T]}) \cdot M \right.$

$\Downarrow$

(Def. 6.26(a)) · Für $M \in \mathcal{M}_{loc}$, $X \in L^2_{loc}(M)$, $X \cdot M := \lim_{n\to\infty} X \cdot M^{T_n}$.

($L^2_{loc}(M)$ = Äquiv. Klassen von $\mathcal{L}^2_{loc}(M) = \{X \text{ vorhersagbar}, \mathbb{P}(\int_0^t X_s^2\, d\langle M\rangle_s(\omega) < \infty) = 1\ \forall t \in [0,\infty)\}$.)

C.4) Itô-Formel:

· (Thm 6.30) Partielle Integration:

$$\forall X, Y \in \mathcal{S}, \quad X_t \cdot Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s\, dY_s + \int_0^t Y_s\, dX_s + \langle X, Y\rangle_t$$

· Beispiel: $B_t^2 = 2\int_0^t B_s\, dB_s + t$.

· (Thm 7.1) Itô-Formel: $F \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, $X = (X^1, \ldots, X^d)$, $X^k \in \mathcal{S}$.

$$\Rightarrow F(X) \in \mathcal{S} \text{ mit}$$

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{k=1}^d \int_0^t \partial_k F(X_s)\, dX_s^k + \sum_{k,l=1}^d \frac{1}{2} \int_0^t \partial_k \partial_l F(X_s)\, d\langle X^k, X^l\rangle_s$$

$\rightarrow$ Particularize for X eine d-dim. B.B. oder $X_t = (t, B_t^1, \ldots, B_t^d)$.

· Beweisidee: · Partielle Integration $\Rightarrow$ Für Polynome, dann Weierstrass Approx $\Rightarrow C_0^2$, letztlich Stoppzeiten.

(Kor 7.4) $\cdot \langle F(B)\rangle_t = \int_0^t (\nabla F)^2(B_s)\,ds.$

~~(5) Exp Ma~~

(Prop 7.6) (a) B eine d-dim. B.B., $f \in C^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, ~~und~~

$$Af = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta f.$$

$$\Rightarrow f(t,B_t) - f(0,B_0) - \int_0^t Af(s,B_s)\,ds \in M^0_{loc}.$$

C.5) Exponentielles Lokales Martingal

(Lem 7.9) . $F \in C^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$, $M \in M_{loc}$

$\Rightarrow \tilde{M}_t := F(\langle M\rangle_t, M_t) \in M_{loc}$.

.(Def 7.10) . $\lambda \in \mathbb{C}$, $M \in M_{loc} \Rightarrow \mathcal{E}_\lambda(M)_t = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M\rangle_t\right)$:

exponentielles lokales Martingal.

. Eigenschaften: (Thm 7.12) $\mathcal{E}_\lambda(M)$ Martingal, [redacted] in die folgenden Fälle.

(a) M beschränkt und $\lambda \in \mathbb{R}$

(b) $\langle M\rangle$ " , $\lambda \in i\mathbb{R}$

(c) $M_0 = 0$, $\mathbb{E}(\mathcal{E}_\lambda(M)_t) = 1$, $\forall t \geq 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

C.6) Lévy Charactensierung

.(Thm 7.13) . $X_t \in \mathbb{R}^d$, $\boxed{\text{stetig}}$, $\mathcal{F}_t$-adaptiert, $X_0 = 0$.

. X eine d-dim. B.B. bzgl. $\mathcal{F}_t$

$\Leftrightarrow X \in M^0_{loc}$ und $\langle X^k, X^l\rangle_t = \delta_{k,l}\cdot t$, $1 \leq k,l \leq d$.

. Korollar 7.14/15) . $X \in M^0_{loc}$ mit $\langle X\rangle_t = t \Rightarrow X$ BB (1-d)

. $X \in M^0_{loc}$ und $X_t^2 - t \in M_{loc} \Rightarrow X$ BB.

. Ist "stetig" nötig? Ja!

10 Beispiele: (a) Brownsche Brücke: $\cdot\ X_t = \begin{cases} (1-t)\, B_{\frac{t}{1-t}}, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t = 1 \end{cases}$

$$X_t = (1-t)\int_0^t \frac{dW_s}{1-s} \leftarrow \begin{cases} \cdot\ \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = (1-t)\cdot s \text{ für } 0 \le s < t \le 1. \\ \cdot\ \langle X \rangle_t = t \quad ; W_t := X_t + \int_0^t \frac{X_s}{1-s}\, ds \in M_{loc}, \\ \langle W \rangle_t = t. \\ \cdot\ dX_t = -\frac{X_t}{1-t}\, dt + dW_t \end{cases}$$

(b) Ornstein-Uhlenbeck: $\cdot\ X_t = \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{2\lambda}} \cdot B_{e^{2\lambda t}}.$

$$X_t = X_0 e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\, dW_s \leftarrow \begin{cases} \cdot\ \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \frac{1}{2\lambda} \exp(-\lambda|t-s|) \\ \cdot\ \langle X \rangle_t = t. \\ \cdot\ W_t := X_t - X_0 - \lambda \int_0^t X_s\, ds \in M_{loc}, \\ \langle W \rangle_t = t. \\ \cdot\ dX_t = -\lambda X_t\, dt + dW_t \end{cases}$$

(c) Bessel Prozesse: $\cdot\ R_t = \|B_t\|_2$ (B_t: d-dim BB).

$$\cdot\ dR_t = \frac{d-1}{2R_t}\, dt + dW_t$$

wobei $\cdot\ W_t = \sum_{k=1}^d \int_0^t \frac{B_s^k}{R_s}\, dB_s^k$: 1-d BB.

(D) BB mit Drift:
$$\begin{cases} \boxed{X_t = v t + \sigma W_t} \\ \cdot\ \mathrm{Cov}(X_t^i, X_t^j) = \sigma^2 t\, \delta_{ij} \\ \begin{cases} dX_t = v\, dt + \sigma\, dW_t \\ X_0 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

(E) Geom. BB: $\begin{cases} dX_t = \mu X_t\, dt + \sigma X_t\, dW_t \\ X_0 = x > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow X_t = x \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t - \sigma W_t\right).$$

(D) SDE und Feynman-Kac

D.1) SDE: starke Lösungen: $X_t \in \mathbb{R}^d$ mit

$$(*) \begin{cases} dX_t = \underbrace{b(t, X_t)}_{\text{Drift}}\,dt + \underbrace{\sigma(t, X_t)}_{\text{Dispersion}}\,dW_t \\ X_0 = \underbrace{\xi}_{\text{Anfangsbedingung}} \end{cases},$$

Def. 8.2) Starke Lösung von $(*)$:
- $X_0 = \xi$ f.s.
- X adaptiert an $\mathcal{F}_t$ = Augm. von $\sigma(\xi, W_s, 0 \le s \le t)$.
- X stetiges Semimart. mit $\int_0^t (\|b(s,X_s)\| + \|\sigma(s,X_s)\|^2)\,ds < \infty$ f.s.
- $X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dW_s$, $0 \le t < \infty$ f.s.

Thm 8.4) Wenn b und σ lokal Lipschitz-stetig in x, dann gilt starke Eindeutigkeit (i.e., up to ununterscheidbarkeit).

Thm 8.6) Sei $\mathbb{E}(\|\xi\|^2) < \infty$. Wenn $\exists\, K > 0$ s.d.:
(global Lipschitz) $\forall t \ge 0, x, y \in \mathbb{R}^d$, $\|b(t,x) - b(t,y)\| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \le K\|x-y\|$
(lin. Wachst.) $\|b(t,x)\| + \|\sigma(t,x)\| \le K(1 + \|x\|)$.
$\Rightarrow \exists!$ starke Lösung von $(*)$ (und $\forall T > 0, \exists\, C_T > 0$ s.d. $\mathbb{E}(\|X_t\|^2) \le C_T(1 + \mathbb{E}(\|\xi\|^2))$, $0 \le t \le T$).

Beweisidee: Fix-punkt Iteration

$$\begin{cases} X_t^{(0)} = \xi \\ \Psi(X_t) = \xi + \int_0^t b(s,X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dW_s \\ X_t^{(k+1)} := \Psi(X_t^{(k)}). \end{cases}$$

D.2) Feynman-Kac:

$$(*)\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u - k(x)u & , x \in \mathbb{R}^d. \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

(Kor 9.3) $\begin{cases} \cdot\ f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ k: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+ \text{ stetig}. \\ \cdot\ u \in C^{1,2} \text{ auf } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \text{ löst } (*). \end{cases}$

$\Rightarrow$ Wenn $\forall T \in (0,\infty), \exists K_T > 0,\ a \in (0, \frac{1}{2T \cdot d})$ s.d.

$$\max_{0 \le t \le T} |u(t,x)| \le K \cdot e^{a\|x\|^2},\ x \in \mathbb{R}^d$$

$$\Rightarrow u(t,x) = \mathbb{E}^x\left(f(W_t)\, e^{-\int_0^t k(W_s)\,ds}\right)$$

E) Brownsche Martingal.

(Def 10.3) • Zeitwechsel $(T_t)_{t\geq 0}$ ist ein wachsender, rechtsstetiger Prozess $T: \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mit T_t Stoppzeit, $\forall t\geq 0$.

(Def. 10.5). $(X_t)_{t\geq 0}$ adaptiert, $X_t \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\hat{X}_t := X_{T_t}$$

(ist def. wenn T_t endlicher Zeiten. oder $X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t \in \overline{\mathbb{R}}$ existiert f.s.)

(Def 10.6) $(X_t)_{t\geq 0}$ ist $(T_t)_{t\geq 0}$-stetig, falls (w-f.s.) $X_t(\omega)$ ist Konstant auf Sprungen von T_t.

. Eigenschaft: (Thm 10.8): $(T_t)_{t\geq 0}$ Zeitwechsel, $X \in H^2$, X $(T_t)_{t\geq 0}$-stetig.

$$\Rightarrow \hat{X} \in \hat{H}^2 \text{ und}$$

$$\langle \hat{X} \rangle_t = \langle X \rangle_{T_t} - \langle X \rangle_{T_0}.$$

Beispiel: $T_t = \inf\{s\geq 0 \text{ s.d. } \langle X\rangle_s > t\} \Rightarrow X$ ist $(T_t)_{t\geq 0}$-stetig.

. Anwendungen: (Thm 10.12): τ endliche Stoppzeit, X_t: d-dim BB bzge $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$

$$\Rightarrow X_{\tau+t} - X_\tau \text{ : d-dim BB bzge } (\mathcal{F}_{t+\tau})_{t\geq 0}.$$

Dubins-Schwarz: (Thm 10.13). $X \in M^0_{loc}$ mit $\langle X\rangle_\infty = \infty$ f.s

$\Rightarrow$ • $B_t = X_{T_t}$ mit $T_t = \inf\{s\geq 0 \mid \langle X\rangle_s > t\}$ ist 1-d BB bzge $(\mathcal{F}_{T_t})_{t\geq 0}$

• $X_t = B_{\langle X\rangle_t}$.

Mart. Darstellung: (Thm 12.5) . $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ Brownsche Filtration.

. Wenn M lokale $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingal, dann besitzt stetige Version mit

$$M_t = \underset{\text{Konst.}}{M_0} + \int_0^t \underset{\in L^2_{loc}}{H_s}\, dB_s$$

F) Girsanov:

· Idee: Masswechsel mit Martingal Z_t.

· $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ Martingal mit $Z_t \geq 0$ und $\mathbb{E}(Z_t)=1$
$\Rightarrow Q_t := Z_t \mathbb{P}$

~~Lemma~~ (11.2): $Z>0 \in M_{loc} \Rightarrow \exists! L \in M_{loc}$ s.d. $Z = \exp(L - \frac{1}{2}\langle L\rangle)$
$\left(L_t = \ln Z + \int_0^t \frac{1}{Z_s} dZ_s\right)$

~~(Lemma 11.3)~~:

· $M^0_{loc,T}$ = stetige lok. Mart. auf $[0,T]$ bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}, M_0=0$
· $\tilde{M}^0_{loc,T}$ = " $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, Q_T, M_0=0$.

(Thm 11.4) Sei $M \in M^0_{loc,T}$
$\Rightarrow \tilde{M}_t = M_t - \langle M, L\rangle_t \in \tilde{M}^0_{loc,T}$ und $\langle \tilde{M}\rangle_t = \langle M\rangle_t$.

Girsanov: (Thm 11.6) · W_t ein d-dim BB., $X_t \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$,

$$L_t := (X \cdot W)_t = \sum_{k=1}^d \int_0^t X_s^k \, dW_s^k$$

$$Z_t = \mathcal{E}^{L_t} = \exp\left(\sum_{k=1}^d \int_0^t X_s^k dW_s^k - \frac{1}{2}\int_0^t \|X_s\|^2 ds\right)$$

Sei $Q_t = Z_t \mathbb{P}$ und

$$\tilde{W}_t^k = W_t^k - \int_0^t X_s^k ds$$

$\Rightarrow \forall T>0$ $(\tilde{W}_t)_{0\leq t\leq T}$ ist eine d-dim BB auf $(\Omega, \mathcal{F}_T, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, Q_T)$.

· Beispiel: $d=1$, $X_t = \mu \neq 0$ (konstant), W_t BB. bzgl $(\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$.
$\Rightarrow (\tilde{W}_t = W_t - \mu t)_{t\geq 0}$ ist eine BB bzgl.
$\mathbb{P}_t^{(\mu)} := Z_t \mathbb{P}$, mit $Z_t = \exp(\mu W_t - \frac{1}{2}\mu^2 t)$.