5) Lineare Gleichungssysteme.

5.1) Motivation: ein Beispiel.

. Betrachten wir das folgende Problem:

Sei $\mathbb{P}_n = \{\text{polynomen } P \mid p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n\}$.

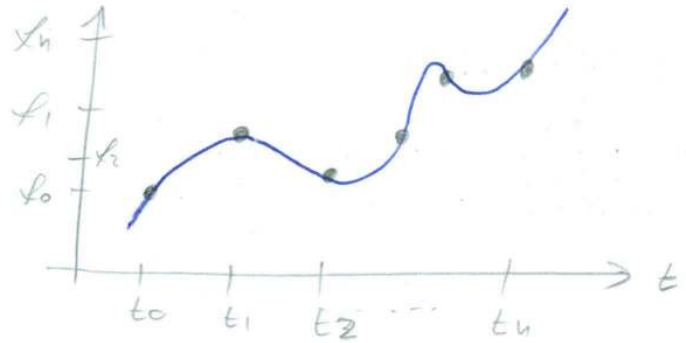
. $\mathbb{P}_n$ ist ein Vektorraum und $\dim(\mathbb{P}_n) = n+1$.
In der Tat, $\phi : \mathbb{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$

$$(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) \longmapsto (a_0, a_1, \dots, a_n)$$

ist ein Isomorphisme. Ohne es explizit zu erwähnen, haben wir die Kanonische Basis: $(1; t; t^2; \dots; t^n)$, die nach der Abbildung ϕ ist die Kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$, d.h., $\phi(1) = (1, 0, \dots, 0)$, $\phi(t) = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\phi(t^n) = (0, \dots, 0, 1)$.

. <u>Problem:</u> <u>Gegeben:</u> $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $n+1$ reelle Zahlen und $f_0, f_1, \dots, f_n$ andere $n+1$ reelle Zahlen

<u>Gesucht:</u> Polynom $p \in \mathbb{P}_n$ s.d. $p(t_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$.



$\Rightarrow$ <u>Zu lösen:</u>

$$\begin{cases} a_0 + a_1 t_0 + \dots + a_n t_0^n = f_0 \\ a_0 + a_1 t_1 + \dots + a_n t_1^n = f_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 t_n + \dots + a_n t_n^n = f_n. \end{cases}$$

- Bemerkungen: Man kann es auch in Matrixform umschreiben:

$$T \cdot \vec{a} = \vec{f} \quad , \text{mit}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

- Das Problem ist immer lösbar, wenn $t_0, \dots, t_n$ alle verschieden sind, weil dann T ist invertierbar ($\Rightarrow$ Übung).

$\Rightarrow \vec{a} = T^{-1} \vec{f}$ ist die Lösung.

- Frage: Wie findet man die Lösung (effizient)?

5.2) Gauss-Verfahren.

5.2.1) Numerisches Beispiel:

Teil 1:

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 = 4 \\ 3x_1 + 8x_2 + 13x_3 = 5 \\ 2x_1 + 9x_2 + 18x_3 = 11 \end{cases}$$

(1) Pivot: • Normalisieren die erste Gleichung, d.h., in der Form $x_1 + \dots = \dots$ bringen.

• Dann, entfernen "x_1" aus den 2. und 3. Gleichungen.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 5x_2 + 12x_3 = 9 \end{cases}$$

② Neues Pivot : . Normalisieren 2. Gleichung
. Dann, entfernen "x_2" aus der 3. Gleichung.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_3 = 4 \end{cases}$$

③ Pivot $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$

Teil 2: ④ Aus 2. Gleichung entfernen "x_3".

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 = -3 \quad (\equiv 1-2\cdot 2) \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

⑤ Aus 1. Gleichung entfernen "x_2" und "x_3"

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \quad (\equiv 1-2\cdot(-3)-3\cdot 2 = 1) \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

- <u>Zu lösen:</u> $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}\cdot x_n = b_n \end{cases}$, d.h.,

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

- Seien $A^{(k)}$ und $b^{(k)}$ die Matrizen nach dem $(k-1)$te Schritt.

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(k)}x_2 + a_{13}^{(k)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(k)}x_n = b_1^{(k)} \\ x_2 + a_{23}^{(k)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(k)}x_n = b_2^{(k)} \\ \ddots \\ x_{k-1} + a_{k-1,k}^{(k)}x_k + \cdots + a_{k-1,n}^{(k)}x_n = b_{k-1}^{(k)} \\ \boxed{\begin{array}{l} a_{k,k}^{(k)}x_k + \cdots + a_{k,n}^{(k)}x_n = b_k^{(k)} \\ \vdots \\ a_{n,k}^{(k)}x_k + \cdots + a_{n,n}^{(k)}x_n = b_n^{(k)} \end{array}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ <u>Im $k$te Schritt:</u> . $\underline{a_{k,k}^{(k)} = k\text{te Pivot}}$.

- Setze: $a_{k,e}^{(k+1)} := \dfrac{a_{k,e}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}$ für $e = k+1, \ldots, n$

  und $b_k^{(k+1)} := \dfrac{b^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}$

- Für $i = k+1, \ldots, n$: $a_{i,e}^{(k+1)} := a_{i,e}^{(k)} - a_{i,k}^{(k)} \cdot a_{k,e}^{(k+1)}$

  für $e = k+1, \ldots, n$.

  und $b_i^{(k+1)} := b_i^{(k)} - a_{k,e}^{(k+1)} \cdot b_i^{(k)}$

5.2.2) Gauss-Algorithmus:

- **Input:** Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ (invertierbar)
  - Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$
- **Output:** Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ s.d. $A\vec{x} = \vec{b}$.

Teil 1

- Für $k = 1$ bis $n-1$:
  - falls $a_{k,k} = 0$, suche das kleinste $\ell \geq k$ s.d. $a_{\ell,k} \neq 0$ und vertausche Zeile k und ℓ. (*)
  - $p := 1/a_{k,k}$
  - Für $\ell = k+1$ bis n:
    - $a_{k,\ell} := a_{k,\ell} \cdot p$;
  - $b_k := b_k \cdot p$
  - Für $i = k+1$ bis n
    - Für $\ell = k+1$ bis n
      - $a_{i,\ell} := a_{i,\ell} - a_{i,k} \cdot a_{k,\ell}$;
    - $b_i := b_i - a_{i,k} \cdot b_k$;
- $p := 1/a_{n,n}$;
- $b_n := b_n \cdot p$;

Teil 2:

- Für $\ell = n-1$ bis 1:
  - $b_\ell := b_\ell - \sum_{k=\ell+1}^{n} a_{\ell,k} \cdot b_k$

- **Bemerkung:** Schritt (*) funktioniert immer wenn A invertierbar ist. Sonst wäre $\mathrm{Rank}(A) < n$! $= \dim(\mathrm{Im}(A))$

- **Frage:** Ist es $\Uparrow$ $\ker$?

. Wie lange ist die Laufzeit von Gauss-Algorithmus?

. Lemma 5.1). Die Laufzeit von Gauss-Algorithmus ist $O(n^3)$.

. Beweis: Das folgt aus die drei "for" Schleifen ineinander #

. 5.2.3) Schlecht Konditionierte Systeme.

. Beispiel:

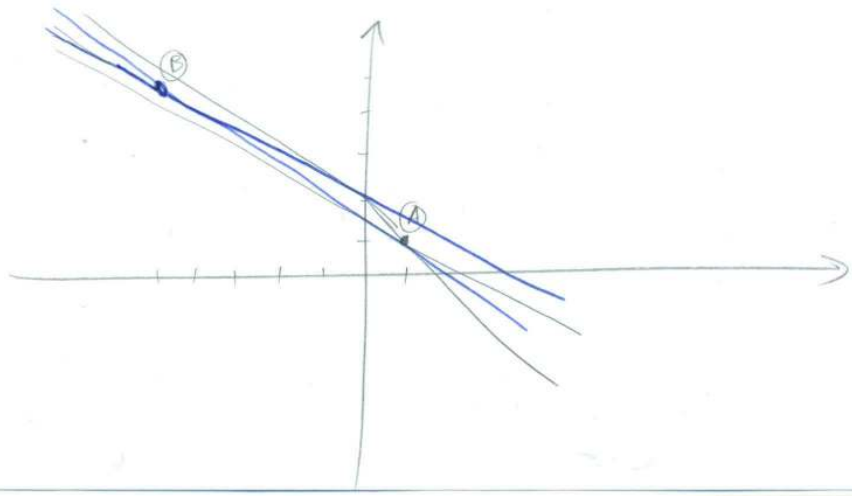
$$\text{(A)} \begin{cases} 4{,}218613 \cdot x_1 + 6{,}327917 \cdot x_2 = 10{,}546530 & (1) \\ 3{,}141592 \cdot x_1 + 4{,}712390 \cdot x_2 = 7{,}853982 & (2) \end{cases}$$

$$\text{(B)} \begin{cases} 4{,}218611 \cdot x_1 + 6{,}327917 \cdot x_2 = 10{,}546530 \\ 3{,}141594 \cdot x_1 + 4{,}712390 \cdot x_2 = 7{,}853980 \end{cases}$$

Lösungen:

$$\begin{cases} \text{(A)} : x_1 = 1, \ x_2 = 1 \\ \text{(B)} : x_1 = -5, \ x_2 = 5. \end{cases}$$

. Wieso passiert es? Weil (1) und (2) sind fast parallel.



- Wir werden ein Kondiziauszahl auch für lineare Systeme definieren.

  Für eine Matrix A wird eine Norm eingeführt durch $|||A||| := \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$, wobei $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}$.

- $|||\cdot|||$ ist eine Abbildung von $M_n(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}_+$ mit:

  (1) $|||A||| > 0$ für alle $A \neq 0$;

  (2) $|||\alpha A||| = |\alpha| \cdot |||A|||$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, und $A \in M_n(\mathbb{R})$,

  (3) $|||A+B||| \leq |||A||| + |||B|||$ für alle $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. (Dreieckungleichung).

- Damit werden wir die Definition des Kanditiauszahl

$$\mathcal{K}(A) := |||A||| \cdot |||A^{-1}|||$$

motivieren. Für praktische Anwendungen, man kann bis $\lfloor \log_{10} \mathcal{K}(A) \rfloor$ signifikanten Stellen verlieren.

- Im vorherige Beispiel ist: $|||A||| \cong 8{,}9..$, $|||A^{-1}||| \approx 1{,}5 \cdot 10^7$

$$\Rightarrow \mathcal{K}(A) \cong 1{,}4 \cdot 10^8 \; !$$

5.3) Konditionszahl für Lineare Gleichungssysteme.

5.3.1) Norm.

Definition 5.2) Eine Abbildung $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heisst Norm, falls:

(a) $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (positivität)

(b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ (homogenität)

(c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (Dreiecksungleichung).

Lemma 5.3) Die euklidische Norm, definiert durch

$$\|x\| \equiv \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

ist eine Norm.

Beweis: (a) Klar.

(b) $\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lambda^2 x_k^2} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = |\lambda| \cdot \|x\|$ ✓

(c) $$\|x+y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot |y_k|$$

$$\overset{?}{\leq} (\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\|$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot |y_k|\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{e=1}^{n} y_e^2 =$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k,e=1}^{n} (|x_k||y_e|) \cdot (|x_e| \cdot |y_k|) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(x_k^2 y_e^2 + y_e^2 y_k^2)$$

Das gilt, wegen $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq |a| \cdot |b|$ $(\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0)$. #

. Bemerkung: Die Definition 5.2 gilt auch für Matrizen, da $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ (isomorph).

. Definition 5.4) Eine Norm auf $M_n(\mathbb{R})$ heisst submultiplikativ, falls für alle $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, gilt

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Lemma 5.5) Die spektrale Norm einer Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ definiert durch

$$|||A||| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \equiv \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

ist eine submultiplikative Matrixnorm.

. Beweis: (a) . $|||A||| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq 0$, weil $\|\cdot\|$ ist eine Norm.

. $A = 0 \Rightarrow |||A||| = 0$. ✓

. Zu sehen, dass $\{|||A||| = 0 \Rightarrow A = 0\}$, man kann zeigen, dass $A \neq 0 \Rightarrow |||A||| \neq 0$.

. Aber, $A \neq 0 \Rightarrow \exists\, ij$ s.d. $A_{ij} \neq 0$. Nehme $e_j = (0, \ldots, \underset{j\text{-te Stelle}}{1}, \ldots, 0)$

$$\Rightarrow |||A||| \geq \|\underbrace{A e_j}_{\neq 0}\| \underset{\|\cdot\| \text{ ist eine Norm.}}{>} 0$$

(b) . $|||\lambda A||| = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda A x\| = |\lambda| \cdot \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda| \cdot |||A|||$.

(c) . $|||A+B||| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax + Bx\| \leq \sup_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|)$

$$\leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|=1} \|Bx\| = |||A||| + |||B|||.$$

$\Rightarrow |||\cdot|||$ ist eine Norm.

. Ist die Norm submultiplikativ? Sei $B \neq 0$ (sonst klar).

$$\cdot\ |||A \cdot B||| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A \cdot Bx\|}{\|x\|}$$

weil für x s.d. $\|Bx\| = 0$ $\Leftrightarrow Bx = 0$ $\Rightarrow$ sup wird erreicht für x s.d. $\|Bx\| \neq 0$

$$= \sup_{\|Bx\| \neq 0} \frac{\|A \cdot Bx\|}{\|Bx\|} \cdot \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$

$$\leq \underbrace{\sup_{\|Bx\| \neq 0} \frac{\|A \cdot Bx\|}{\|Bx\|}}_{= |||A|||} \cdot \underbrace{\sup_{\|Bx\| \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}}_{\leq \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}}$$

weil $\{x \text{ s.d. } \|x\| \neq 0\} \supset \{x \text{ s.d. } \|Bx\| \neq 0\}$

$$\leq |||A||| \cdot |||B|||.$$

#

. Notationen: . Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$;

. $A^t := (a_{j,i})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ die zu A transponierte Matrix.

. . A^{-1} ist die Inverse von A (falls A invertierbar).

5.3.2). Jetzt kommen wir zur Konditionszahl.

. Sei A invertierbar und betrachten wir

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

. Was passiert, wenn wir eine Störung auf $\vec{b}$ machen? $\vec{b} \longrightarrow \vec{b} + \Delta\vec{b}$.

Dann wird die Lösung $\vec{x} \longrightarrow \vec{x} + \Delta\vec{x}$ mit:

$$A(\vec{x} + \Delta\vec{x}) = \vec{b} + \Delta\vec{b}$$

$$\Rightarrow A \cdot \Delta\vec{x} = \Delta\vec{b}, \text{ d.h., } \Delta\vec{x} = A^{-1} \cdot \Delta\vec{b}$$

. Deshalb ist der relative Fehler:

$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \frac{\|A^{-1}\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{x}\|} \leq |||A^{-1}||| \cdot \frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|} \cdot \frac{\overbrace{\|\vec{b}\|}^{=\|A\vec{x}\|}}{\|\vec{x}\|} \leq |||A^{-1}||| \cdot |||A||| \cdot \frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}$$

Deshalb, der relative Fehler auf $\vec{b}$ vergrössert sich bis zum Faktor $|||A^{-1}||| \cdot |||A|||$.

Definition 5.6) Sei $A\vec{x} = \vec{b}$ ein lineares System mit A invertierbar, dann heisst

$$\varkappa(A) := |||A^{-1}||| \cdot |||A|||$$

die Konditionszahl dieses System.

Bemerkung: Man kann auch andere Norm dazu verwenden.

Bemerkung: Aus $\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \varkappa(A) \cdot \frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}$ folgt, dass man kann bis zu $[\log_{10} \varkappa(A)]$ signifikante Stellen während der Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ verlieren.

5.3.3) Berechnung von $\varkappa(A)$.

Um $\varkappa(A)$ zu berechnen, müssen wir $|||A|||$ und $|||A^{-1}|||$ berechnen.

Ein Exkurs: Betrachten wir n Vektoren in $\mathbb{R}^n$, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, mit folgender Eigenschaft:

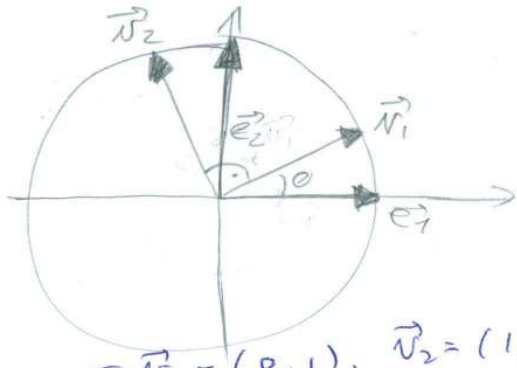
$$(\vec{v}_i, \vec{v}_j) := \sum_{k=1}^{n} v_i(k)\, v_j(k) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{für } i=j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Skalar Produkt

Geometrisch gesehen, die Länge des $\vec{v}_i$ sind 1, weil $\|\vec{v}_i\|^2 = \sum_{k=1}^{n} v_i(k)^2 = 1$, und den Winkel zwischen zwei Vektoren ist $90°$ (für alle Paare), d.h., orthogonal

Beispiel: In $\mathbb{R}^2$: (a) $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$ haben diese Eigenschaft.

(b) $\vec{v}_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$; $\vec{v}_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$ auch ($\forall \theta \in [0, 2\pi]$).



(c) $\vec{v}_1 = (0,1)$, $\vec{v}_2 = (1,0)$

. Wieso orthogonal? Weil den Winkel $\varphi \in [0,\pi]$ zwischen die Geraden $\{\lambda \vec{v}_1, \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $\{\mu \vec{v}_2, \mu \in \mathbb{R}\}$ ist durch

$$\varphi = \arccos\left(\frac{(v_1, v_2)}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}\right) \text{ gegeben.}$$

Bsp: (a) $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(c) $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

. Definieren nun die Matrix $R = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$, d.h.,

$$\boxed{R_{ij} = v_j(i).} \quad (**)$$

Dann, $R^t R = \mathbb{1} = R R^t$ (*)

In der Tat, $(R^t R)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (R^t)_{ik} (R)_{kj}$

$$= \sum_{k=1}^{n} R_{ki} R_{kj} = \sum_{k=1}^{n} v_i(k) v_j(k) \overset{\text{def.}}{=} \delta_{ij}.$$

. Eine reelle Matrix mit der Eigenschaft (*) heisst Orthogonale Matrix.

. Geometrisch; R macht eine Drehung + Permutationen zwischen die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$, $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ und $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$: $\boxed{\vec{v}_k = R \vec{e}_k}$

- Definiere nun $A = R \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}^{:=\Lambda} \cdot R^t$.

. A hat die Eigenschaften:

(a) $A = A^t$

(b) $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$.

. In der Tat, $A^t = \left(R \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} R^t\right)^t = \underbrace{(R^t)^t}_{=R} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^t}_{=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}} R^t$.

und $(A\vec{v}_i)(k) = \sum_{e=1}^{n} \underbrace{Q_{k,e}}_{=v_e(k)} \cdot \lambda_e \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (Q^t)_{ej}\, v_i(j)}_{\substack{= \sum_{j=1}^{n} Q_{je}\, v_i(j) = \\ = \sum_{j=1}^{n} Q_{e(j)} v_i(j) = \delta_{ei}}}$

$= \sum_{e=1}^{n} v_e(k) \lambda_e \delta_{ei} = \lambda_i v_i(k)$.

. <u>Bemerkung:</u> In Lineare Algebra wird es gezeigt, dass jede (reelle) symmetrische Matrix A kann als $A = R \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} R^t$ dargestellt sein. (mit R orthogonal), $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

<u>Ende der Excursus.</u>

- Sei $A\vec{x} = \vec{b}$ unsere <u>Lineare Gleichungssystem.</u>

Setze $B := A^t \cdot A$. Dann $B = B^t$, so $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ s.d. $B = R \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{:=\Lambda} R^t$ und $B\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$.

$\Rightarrow \vec{v}_i^t \cdot B \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \underbrace{\vec{v}_i^t \cdot \vec{v}_i}_{=1} = \lambda_i$.

$\Rightarrow \vec{v}_i^t \cdot A^t \cdot A\vec{v}_i = \lambda_i$

$\quad \llcorner\, \|A\vec{v}_i\|^2 \Longrightarrow \boxed{\lambda_i \geq 0}$.

• Ordne $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ wie folgt: $0 \le \lambda_1 \le \dots \le \lambda_n$.

<u>Lemma 5.7)</u> $|||A||| = \sqrt{\lambda_n}$.

<u>Beweis:</u> $$|||A|||^2 = \left(\max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right)^2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2}$$

$$= \max_{x \neq 0} \frac{x^t A^t A x}{x^t x} = \max_{x \neq 0} \frac{x^t B x}{x^t x}$$

$$= \max_{x \neq 0} \frac{x^t R \Lambda R^t x}{x^t R R^t x} \overset{y = R^t x}{=} \max_{y \neq 0} \frac{y^t \Lambda y}{y^t y}$$

$$= \max_{y \neq 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} \le \lambda_n$$ wobei Gleichheit ist für $y = \vec{v}_n$.

$\Rightarrow |||A|||^2 = \lambda_n \Rightarrow |||A||| = \sqrt{\lambda_n}$ #.

5.4) LU-Zerlegung

(≡ LR-Zerlegung)

· Die Laufzeit um $A\vec{y} = \vec{b}$ zu lösen ist $\mathcal{O}(n^3)$. Falls wir eine Reihe von Gleichungssysteme mit einem gegebenen A und verschiedene $\vec{b}$ haben, kann man die folgende Zerlegung von A benutzen.

Satz 58 Falls beim Gauss'chen Algorithmus keine Zeilenvertauschungen stattfinden, d.h., jede der Hauptminoren eine reguläre Matrix ist, dann $\exists!$ Matrizen L und U mit:

ⓐ L eine untere Dreiecksmatrix mit 1 auf der Diagonale,

ⓑ U eine obere Dreiecksmatrix,

ⓒ $A = L \cdot U$.

· **Bem.:** Um die LU-Zerlegung zu erhalten, brauchen wir $\mathcal{O}(n^3)$ Laufzeit (genau wie Gauss) aber dann kann man das System in nur $\mathcal{O}(n^2)$ Laufzeit lösen.

· **Beweis:** Idee: · Das folgt* aus dem Gauss'chen Algorithmus wenn man die Rechnungen auf den Zeilen explizit als Matrix-Produkt darstellt.

· 1. Schritt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

* Ohne Normalisierungsschritt.

Sei $L^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & 0 & \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ & 0 & & & \end{pmatrix}$ und

$$A^{(1)} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{12} & & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot a_{12} & & a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot a_{13} \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

Dann, $L^{(1)} \cdot A = A^{(1)}$, d.h.,

$$A = (L^{(1)})^{-1} \cdot A^{(1)}.$$

. Die Inverse von $L^{(1)}$ ist die folgende:

$$(L^{(1)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & \\ \vdots & 0 & & \ddots \end{pmatrix}.$$

. In der Tat: $L^{(1)} = \mathbb{1} + \ell^{(1)} \cdot e_1^t$ mit

$$\ell^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ell_2^{(1)} \\ \vdots \\ \ell_n^{(1)} \end{pmatrix}, \quad e_1^t = (1, 0, \ldots, 0).$$

und $(L^{(1)})^{-1} = \mathbb{1} - \ell^{(1)} \cdot e_1^t$.

$$\Rightarrow (L^{(1)})^{-1} \cdot L^{(1)} = (\mathbb{1} - \ell^{(1)} \cdot e_1^t)(\mathbb{1} + \ell^{(1)} e_1^t)$$
$$= \mathbb{1} - \cancel{\ell^{(1)} e_1^t} + \cancel{\ell^{(1)} e_1^t} - \underbrace{\ell^{(1)} e_1^{(t)} \cdot \ell^{(1)} e_1^t}_{=0}$$
$$= \mathbb{1}.$$

. <u>Am 2. Schritt:</u> Sei $L^{(2)} := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & -\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 0 & & \ddots \end{pmatrix}$

und $A^{(2)} := \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{33}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{23}^{(1)} & \\ & & & \end{pmatrix}$

So dass $L^{(2)} A^{(1)} = A^{(2)}$

$$\Rightarrow \quad A^{(1)} = \left(L^{(2)}\right)^{-1} \cdot A^{(2)}$$

mit $\left(L^{(2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)} & 1 & \\ 0 & \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 0 & \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \quad A = \left(L^{(1)}\right)^{-1} \cdot \left(L^{(2)}\right)^{-1} \cdot A^{(2)}$$

. Man macht so weiter bis $A^{(n-1)}$, die eine obere Dreiecksmatrix ist:

$$A = \underbrace{\left(L^{(1)}\right)^{-1} \cdot \left(L^{(2)}\right)^{-1} \cdots \left(L^{(n-1)}\right)^{-1}}_{:= L} \cdot \underbrace{A^{(n-1)}}_{:= U}$$

. Man muss noch zeigen, dass L eine untere Dreiecksmatrix mit 1 auf der Diagonale:

. Seien B_1 und B_2 zwei Matrizen dieser Form, d.h., $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}$ und $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}$.

Dann: Für $j > i$: $(B_1 \cdot B_2)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(B_1)_{ik}}_{=0 \text{ für } k>i} \underbrace{(B_2)_{kj}}_{=0 \text{ für } k<j}$

$= 0.$

Für $j = i$: $(B_1 \cdot B_2)_{i,i} = (B_1)_{i,i} \cdot (B_2)_{i,i} = 1.$

Zuletzt, die Eindeutigkeit: Nehmen wir an, $\exists\, L, \tilde{L}, U, \tilde{U}$ s.d. $A = L \cdot U = \tilde{L} \cdot \tilde{U}$ und (a), (b), (c) gelten.

Dann, $L^{-1} \cdot \tilde{L} = U \cdot \tilde{U}^{-1}$.

Aber, $L^{-1} \cdot \tilde{L}$ ist eine untere Dreiecksmatrix und $U\tilde{U}^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix. und dazu, $L^{-1}\tilde{L}$ hat 1 auf der Diagonale

$\Rightarrow L^{-1}\tilde{L} = U\tilde{U}^{-1} = \mathbb{1}.$

$\Rightarrow \tilde{L} = L$ und $U = \tilde{U}$. #

Anwendung: Wenn wir die LU-Zerlegung haben, können wir das Problem (Siehe auch Beispiel, ~~Seite~~ 80) $A\vec{x} = \vec{b}$ so lösen:

$$LU\vec{x} = \vec{b} \iff \begin{cases} L\vec{y} = \vec{b}, \\ U\vec{x} = \vec{y}. \end{cases}$$

Die Lösung von $L\vec{y} = \vec{b}$ und dann $U\vec{x} = \vec{y}$ erfolgen mittels eines vereinfachten Gaussverfahrens, wie folgt:

Algorithmus 59 (Gauss für untere Dreiecksmatrizen)

Input: Untere Dreiecksmatrix A, Vektor $\vec{b}$

Output: Vektor $\vec{x}$ // Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$

```
for (i=0; i<n; i++)
  { x[i] = b[i];
    for (j=0; j<i; j++)
      { x[j] = x[j] - A[i+n·j] · x[j]; }
  } x[i] = x[i] / A[(n+1)·i];
```

Gibt $A_{i,j}$ aus, da A als Vektor gespeichert ist.

Dieses Algorithmus entspricht das folgende:

$$b_i = \sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j = a_{ii} \cdot x_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j$$

$$\Leftrightarrow \quad x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j \right).$$

Wenn A eine obere Dreiecksmatrix ist, dann,

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j$$

$$\Leftrightarrow \quad x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Deshalb haben wir das folgende Algorithmus.

<u>Algorithmus 5.10)</u> (Gauss für obere Dreiecksmatrix).

<u>Input</u>: Obere Dreiecksmatrix A, Vektor $\vec{b}$.

<u>Output</u>: Vektor $\vec{x}$ // Lösung von

```
for (i=n; i>0; i--)
  { x[i] = b[i];
    for (j=i+1; j<n; j++)
      { x[j] = x[j] - A[i+n·j] · x[j]; }
    x[i] = x[i] / A[(n+1)·i];
  }
```

<u>Lemma 5.11)</u> Algorithmus 5.10 und 5.9 haben eine Laufzeit $O(n^2)$.

<u>Beweis</u>: Es folgt aus den 2 ineinander "for"-Schleifen.

Frage: Wie ändert sich die Aussage von Satz 5.8 falls A eine Matrix voller Rang ist, aber nicht alle Hauptminoren regulär sind?

. Wir müssen dazu einige Zeilen tauschen. Das wird durch Permutationsmatrizen gemacht.

Definition 5.12) Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$. Dann ist die assoziierte Permutationsmatrix $P = (P_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ durch

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{für } \sigma(i) = j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

definiert.

. Bemerkung: . Permutationsmatrizen sind orthogonal.

In der Tat:

$$(P^t P)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} P_{ki} P_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

. Lemma 5.13) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ und $\sigma \in S_n$. Sei $P = P(\sigma)$ die assoziierte Permutationsmatrix.

Dann
$$\tilde{A} = P \cdot A$$
entspricht die Matrix A mit vertauschen Zeilen.

$$(\tilde{A})_{ij} = A_{\sigma(i), j}$$

. Beweis: $. (\tilde{A})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{P_{ik}}_{= \begin{cases} 1, & \text{für } k = \sigma(i), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}} \cdot A_{kj} = A_{\sigma(i), j}$. #

• **Satz 5.14)** Sei A eine Matrix voller Rang. Dann $\exists$ eine Permutationsmatrix P, eine untere Dreiecksmatrix L mit 1 auf der Diagonale, und eine obere Dreiecksmatrix U s.d.

$$P \cdot A = L \cdot U.$$

Bemerkung: $P \cdot A = LU$ heisst "spaltenpivotisierte LU-Zerlegung".

Beweis: Idee: Ähnlich wie bei Satz 5.8, aber dazu muss man ggf. Zeile vertauschen (falls $A^{(k-1)}_{k,k} = 0$).

1. Schritt: Da A voller Rank ist, existiert ein $p \geq 1$ s.d. $A_{p,1} \neq 0$.

Sei $p(1) := \min\{k \geq 1 \mid A_{k,1} \neq 0\}$.

Dann, wählt man die Permutation

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdot & p(1) & \cdot & n \\ p(1) & 2 & \cdot & \cdot & 1 & n \end{pmatrix}, \quad P_1 := P(\sigma_1).$$

$$\Rightarrow \tilde{A} := P_1 \cdot A.$$

. Da $(P_1)^{-1} = P_1^t$, haben wir

$$A = P_1^t \cdot \tilde{A} \text{ und } \tilde{A}_{11} \neq 0$$

. Dann machen wir 1 Schritt wie beim Satz 5.8, i.e., finden wir $L^{(1)}$ und $A^{(1)}$ s.d. $L^{(1)} A^{(1)} = \tilde{A}$.

$$\Rightarrow A = P_1^t (L^{(1)})^{-1} A^{(1)}.$$

k=2,3,...,n. Schritt: analog ($p(1) \longrightarrow p(k) = \min\{e \geq k \mid A^{(k-1)}_{e,k} \neq 0\}$).

. Wir erhalten:

$$A = P_1^t (L^{(1)})^{-1} P_2^t (L^{(2)})^{-1} \cdots P_{n-1}^t (L^{(n-1)})^{-1} \cdot A^{(n-1)}.$$

. Letztlich, sei $P := P_{n-1} \cdots P_1$, dann,

$$P \cdot A = P_{n-1} \cdots \underbrace{P_1 \cdot P_1^t}_{=\mathbb{1}} (L^{(1)})^{-1} P_2^t (L^{(2)})^{-1} P_3^t \cdots P_{n-1}^t (L^{(n-1)})^{-1} A^{(n-1)}$$

$$= P_{n-1} \cdots P_2 (L^{(1)})^{-1} P_2^t \cdots P_{n-1}^t$$
$$\cdot P_{n-1} \cdots P_3 (L^{(2)})^{-1} P_3^t \cdots P_{n-1}^t$$
$$\vdots$$
$$\cdot P_{n-1} (L^{(n-2)})^{-1} P_{n-1}^t$$
$$(L^{(n-1)})^{-1} \cdot A^{(n-1)}$$

So, setze $\tilde{L}^{(k)} = P_{n-1} \cdots P_{k+1} \cdot L^{(k)} \cdot P_{k+1}^t \cdots P_{n-1}^t$

$$\Rightarrow (\tilde{L}^{(k)})^{-1} = P_{n-1} \cdots P_{k+1} (L^{(k)})^{-1} P_{k+1}^t \cdots P_{n-1}^t$$

und $P \cdot A = \underbrace{(\tilde{L}^{(1)})^{-1} \cdots (\tilde{L}^{(n-1)})^{-1}}_{\doteq L} \cdot \underbrace{A^{(n-1)}}_{\doteq U}$.

. Noch zu zeigen: L ist eine untere Dreiecksmatrix mit "1" auf der Diagonale.

. Falls $P_e \neq \mathbb{1}$, dann P_e in $P_e \cdot X$ vertauscht Zeile e mit irgendwelche Zeile $u > e$.
und $X P_e^t$ dasselbe aber auf Spalten.

$\Rightarrow$ ~~Für~~ k: $e_k^t P_e^t = e_k^t$

So, $P_{n-1} \cdots P_{k+1} L^{(k)} P_{k+1}^t \cdots P_{n-1}^t =$

$$= P_{n-1} \cdots P_{k+1} \cdot (\mathbb{1} - e^{(k)} \cdot e_k^t) P_{k+1}^t \cdots P_{n-1}^t$$

$$= \mathbb{1} - \underbrace{P_{n-1} \cdots P_{k+1} e^{(k)}}_{\text{Vektor der Form}} e_k^t.$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ c \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow k \\ \leftarrow k+1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$\Rightarrow \tilde{L}^{(k)}$ unter 3Δ mit diag$(\mathbb{1})$, $\forall k$
$\Rightarrow$ auch für L.

#

. Aus dem Beweis von Satz 5.14 erhält man das folgende

Algorithmus:

Input: Reguläre Matrix A $\|\, n \times n$.

Output: Spaltenpivotisierte LU-Zerlegung von A.

. $U = A$
. $L = \mathbb{1}$
. $P = \mathbb{1}$
for $(k=1; k<n; k++)$
{ . Wähle das kleinste $i \geq k$ s.d. $u_{ik} \neq 0$;
. vertausche i. und k. Zeilen von P, R, L;
for $(j=k+1; j \leq n; j++)$
{ . $l_{jk} = \frac{u_{jk}}{u_{kk}}$;
for $(m=k; m<n; m++)$
$\{u_{jm} = u_{jm} - l_{jk} \cdot u_{k,m}\}$
}
}

. Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -8 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{U}.$$

$\Rightarrow$ Für $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$: $\quad L y = b \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

und dann $U x = y \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.5) Störungstheorie für lineare Gleichungssysteme

. Das ist eine Erweiterung von Kapitel 5.3.2, wo wir eine Störung von $\vec{b}$ gemacht haben.

. Frage: Wie wächst der relativen Fehler wenn wir A und $\vec{b}$ leicht stören?

. Bemerkungen: (1) Bislang haben wir nur die Spektralnorm benutzt. Das ist die "beste", aber nicht immer schnell zu berechnen.

(2) Weitere submultiplikative Normen:

(a) $\|A\| := \max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|$ (Maximumnorm)

(b) $\|A\|_F := \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$ (Frobeniusnorm).

. Notation: $\rho(A) := \max\{|\lambda| \text{ s.d. } \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$
$\equiv \max\{|\lambda| \text{ s.d. } \exists x\neq 0 \text{ mit } Ax=\lambda x\}$.

. Falls $A = R\Lambda R^t$, dann Spektralnorm$(A) = \rho(A)$, sonst in general $\rho(A) \le \|A\|$.

. Sei ΔA die Störung von A, Δb die Störung von b und Δx die darauf folgende Störung von x, d.h.,

$$(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b+\Delta b$$

mit $Ax=b$.

Dann: $\underbrace{Ax + \Delta A\, x}_{=} + (A+\Delta A)\Delta x = b + \Delta b$

. Unter die Annahme, dass nicht nur A aber auch $A+\Delta A$ invertierbar ist, erhalten wir:

$$\Delta x = (A+\Delta A)^{-1} \cdot (\Delta b - \Delta A \cdot x)$$

Dehalb müssen wir die Norm von $(A+\Delta A)^{-1}$ abschätzen.

<u>Lemma 5.15)</u> . Sei $|||A||| < 1$. Dann die Neumannsche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ konvergiert,

$$(\mathbb{1} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

und

$$|||(\mathbb{1} - A)^{-1}||| \leq \frac{1}{1 - |||A|||}.$$

<u>Beweis:</u> . Aus $|||A||| < 1$ folgt $\rho(A) < 1$, d.h. 1 ist kein Eigenwert von A und deshalb die Eigenwerte von $\mathbb{1} - A$ sind $1 - \lambda_i(A)$ mit $\lambda_i(A)$ denen von A. $\Rightarrow$ $\mathbb{1} - A$ hat kein Eigenwert 0, d.h., invertierbar.

. $$(\mathbb{1} - A) \sum_{k=0}^{n} A^k = \mathbb{1} - A^{n+1}$$

und $\lim_{n \to \infty} A^n = 0$, weil $|||A^n||| \leq |||A|||^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

. letztlich, $$|||(\mathbb{1} - A)^{-1}||| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |||A^k||| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |||A|||^k = \frac{1}{1 - |||A|||}.$$

#

. $(A \cdot e_j)(i) = A_{ij}$

. $\|A e_j\| = 0 \Leftrightarrow A e_j = 0 \Leftrightarrow \{A_{ij} = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n\}$

und $|||A||| \geq \|A e_j\|$

. Mit Hilfe von Lemma 5.15 erhält man die folgende Abschätzung.

. <u>Lemma 5.16)</u> Sei A invertierbar, $|||\Delta A||| < \frac{1}{|||A^{-1}|||}$. Dann ist auch $A+\Delta A$ invertierbar mit

$$|||(A+\Delta A)^{-1}||| \leq \frac{|||A^{-1}|||}{1 - |||A^{-1}|||\cdot|||\Delta A|||}.$$

. <u>Beweis:</u> $|||A^{-1}\Delta A||| \leq |||A^{-1}|||\cdot|||\Delta A||| < 1 \Rightarrow (\mathbb{1} + A^{-1}\Delta A)^{-1}$ existiert und

$$|||(\mathbb{1}+A^{-1}\Delta A)^{-1}||| \leq \frac{1}{1-|||A^{-1}\cdot\Delta A|||} \leq \frac{1}{1-|||A^{-1}|||\cdot|||\Delta A|||}$$

Dazu: $(A+\Delta A)^{-1} = \left[A(\mathbb{1}+A^{-1}\Delta A)\right]^{-1}$

$$= (\mathbb{1}+A^{-1}\Delta A)^{-1}\cdot A^{-1}$$

und $|||(A+\Delta A)^{-1}||| \leq |||A^{-1}|||\cdot|||(\mathbb{1}+A^{-1}\Delta A)^{-1}|||$ #

. Jetzt haben wir die nötige Abschätzungen, und $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ zu kontrollieren.

. <u>Satz 5.17)</u> Unter die Annahme von Lemma 5.16, es gilt:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\varkappa(A)}{1-\varkappa(A)\cdot\frac{|||\Delta A|||}{|||A|||}}\left(\frac{|||\Delta A|||}{|||A|||} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right).$$

. <u>Bemerkung:</u> . Zum erste Ordnung:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \simeq \varkappa(A)\left(\frac{|||\Delta A|||}{|||A|||} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right).$$

<u>Beweis:</u> Aus $\Delta x = (A+\Delta A)^{-1}(\Delta b - \Delta A \cdot x)$ erhalten wir die Abschätzung

$$\|\Delta x\| \leq |||(A+\Delta A)^{-1}||| \cdot (\|\Delta b\| + |||\Delta A||| \cdot \|x\|)$$

$$\overset{\text{Lem 5.16}}{\leq} \frac{|||A^{-1}|||}{1 - |||A^{-1}||| \cdot |||\Delta A|||} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|x\|} + |||\Delta A||| \right) \cdot \|x\|$$

Dazu, $\|b\| = \|Ax\| \leq |||A||| \cdot \|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{|||A|||}{\|b\|}$

und $|||A^{-1}||| = \frac{\kappa(A)}{|||A|||}$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{|||\Delta A|||}{|||A|||}} \cdot \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{|||\Delta A|||}{|||A|||} \right).$$

#

<u>Beispiel:</u> $A = \begin{pmatrix} 0{,}505 & -0{,}495 \\ 0{,}495 & -0{,}505 \end{pmatrix}$, $\Delta A = \begin{pmatrix} -0{,}005 & 0 \\ 0{,}005 & 0 \end{pmatrix}$

$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\Delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow x = A^{-1} b = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ und zum Vergleich

$x + \Delta x = (A+\Delta A)^{-1} b = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta x = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Man berechnet:
- $|||A||| = 1$
- $|||A^{-1}||| = 100$
- $|||\Delta A||| = \frac{1}{\sqrt{2}\,100} \approx 0{,}00707$

$$\Rightarrow \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{|||\Delta A|||}{|||A|||}} \cdot \frac{|||\Delta A|||}{|||A|||} \approx 2{,}4 \geq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = 1.$$

5.6) Stabilität der LU-Zerlegung.

. Jetzt betrachten wir den Einfluss von Rundungsfehlern.

. Notationen: . $|A| \in M_n(\mathbb{R})$ ist die Matrix mit Einträge $|a_{ij}|$ (wenn $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$).

. $|A| \le |B|$ bedeutet $|a_{ij}| \le |b_{ij}|$, $1 \le i,j \le n$.

Satz 5.18) . Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ und $\tilde{L}, \tilde{U}$ die berechneten LU Matrizen mit einem Rechner mit $\varepsilon_{\mathbb{F}}$ Rundungsgenauigkeit.

Dann $\tilde{L} \cdot \tilde{U} = A + \Delta A$

mit

$$|\Delta A| \le 2 \cdot (n-1) \cdot \varepsilon_{\mathbb{F}} \left(|A| + |\tilde{L}| \cdot |\tilde{U}| \right) + \mathcal{O}(\varepsilon_{\mathbb{F}}^2).$$

Beweis: . Induktion über n. (Angenommen: $A = rd(A)$, d.h., darstellbar).

. $n=1$: Klar, da $\tilde{L} = 1$, $\tilde{U} = A$.

. Nehmen wir an, dass Satz 5.18 für $n-1$ gilt.

Dann, $A = \begin{pmatrix} \alpha & w^t \\ v & B \end{pmatrix}$ mit $\alpha \neq 0$ (sonst Zeilentausch)

und $B \in M_{n-1}(\mathbb{R})$, $w, v \in \mathbb{R}^{n-1}$.

. In die LU-Zerlegung wird das Vektor

$\tilde{z} := rd\left(\frac{1}{\alpha} \cdot v\right)$ (d.h., $\tilde{z}_k = rd\left(\frac{1}{\alpha} \cdot v_k\right)$, $k = 1, \dots, n-1$)

bestimmt und dann wird B mit $\tilde{S}$ ersetzt, wobei $\tilde{S} = rd(B - \tilde{z} \cdot w^t)$.

. $\tilde{z} = \frac{v}{\alpha} + \Delta \tilde{z}$ mit $|\Delta \tilde{z}| \le \frac{|v|}{|\alpha|} \varepsilon_{\mathbb{F}}$ ((da kein rel. Fehler auf α).

und $\tilde{S} = B - \tilde{z} \cdot w^t + F$ mit (Siehe Lemma 2.2)

$|F| \le 2 \cdot \varepsilon_{\mathbb{F}} \cdot (|B| + |\tilde{z}| \cdot |w|^t) + \mathcal{O}(\varepsilon_{\mathbb{F}}^2)$.

. Induktionsannahme $\Rightarrow$ $\tilde{L}_1 \tilde{U}_1 = \tilde{S} + F_1$ mit

$$|F_1| \leq 2(n-2)\cdot \varepsilon_{\mathbb{F}} \left(|\tilde{S}| + |\tilde{L}_1|\cdot|\tilde{U}_1| \right) + \mathcal{O}(\varepsilon_{\mathbb{F}}^2).$$

Dann haben wir:

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{z} & \tilde{L}_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{U} = \begin{pmatrix} \alpha & w^t \\ 0 & \tilde{U}_1 \end{pmatrix}$$

so dass

$$\tilde{L}\cdot\tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{z} & \tilde{L}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & w^t \\ 0 & \tilde{U}_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & w^t \\ z\alpha & \tilde{z}\cdot w^t + \tilde{L}_1 \tilde{U}_1 \end{pmatrix}$$

wegen: $\begin{cases} \cdot\ \tilde{z}\cdot\alpha = v + \alpha\cdot\Delta\tilde{z} \\ \cdot\ \tilde{z}\cdot w^t = B - \tilde{S} + F \\ \cdot\ \tilde{L}_1\tilde{U}_1 = \tilde{S} + F_1 \end{cases}$

folgt: $\tilde{L}\cdot\tilde{U} = A + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha\cdot\Delta\tilde{z} & F + F_1 \end{pmatrix}}^{=\Delta A}$

Sei, $\begin{cases} \cdot\ |\alpha\Delta\tilde{z}| \leq |v|\cdot\varepsilon_{\mathbb{F}} \\ \cdot\ |\tilde{S}_1| \leq (1+2\varepsilon_{\mathbb{F}})\cdot\left(|B| + |\tilde{z}|\cdot|w|^t\right) + \mathcal{O}(\varepsilon_{\mathbb{F}}^2) \end{cases}$

$$\Rightarrow |F + F_1| \leq 2\cdot\varepsilon_{\mathbb{F}}\cdot\left(|B| + |\tilde{z}|\cdot|w|^t + |\tilde{L}_1|\cdot|\tilde{U}_1|\right)\cdot(n-2+1) + \mathcal{O}(\varepsilon_{\mathbb{F}}^2).$$

. Alles zusammen, die Abschätzung

$$|\Delta A| \leq 2(n-1)\varepsilon_{\mathbb{F}} \left\{ \begin{pmatrix} |\alpha| & |w|^t \\ |v| & |B| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ |\tilde{z}| & |\tilde{L}_1| \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |\alpha| & |w|^t \\ 0 & |\tilde{U}_1| \end{pmatrix} \right\}$$

$+ \mathcal{O}(\varepsilon_{\mathbb{F}}^2)$ gilt. #

<u>Bemerkung</u>: . Rückwärtsstabilität folgt nicht aus Satz 5.18. Gilt nur falls $|\tilde{L}|\cdot|\tilde{U}| \approx |A|$.

($\downarrow$: Gegenbeispiel).

Partielle Pivotisierung.

. Nehmen wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0.$$

Dann, die exacte LU-Zerlegung ist

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\varepsilon & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1-1/\varepsilon \end{pmatrix}}_{U}.$$

. Falls aber ε klein genug ist, s.d. im Rechner $1-\frac{1}{\varepsilon}$ und $-\frac{1}{\varepsilon}$ die gleiche Darstellung erhalten,

dann $\tilde{U} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & -1/\varepsilon \end{pmatrix}$ und $L\tilde{U} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

. Für $Ax = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, erhält man dann statt $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ Fehler $O(\varepsilon)$ kann auf Fehler $O(1)$ sich vergrössern.

. Bemerkung: Diese Instabilität wenn L oder U Einträge, die (betragmässig) viel grösser als die Einträge von A sind.

. Frage: Wie kann man dieses Problem vermeiden?

. Im Beispiel: Vertauschen die Zeilen von A

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\varepsilon \end{pmatrix} \quad : \text{Kein Problem.}$$

. Antwort: Im Schritt No. k, sollten man den betragsmässig grösste der $n-k+1$ möglichen Pivots $\Rightarrow |l_{ij}| \le 1$, $1 \le i,j \le n$.

. Diese ist die sogenannte Partielle Pivotisierung.

- **Bemerkung:** Da $|l_{ij}| \leq 1 \Rightarrow |L| \leq 1$, so wird Satz 5.18 wie folgt.

- **Definition 5.19)**
  - Das Wachstumsfaktor einer LU-Zerlegung
  $$\rho_n := \frac{\|U\|_\infty}{\|A\|_\infty}, \text{ wobei}$$
  $$\|X\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |x_{ij}| \quad \text{(Zeilensumme norm)}$$

- **Satz 5.20)** (ohne Beweis).
  Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar, $\tilde{L}, \tilde{U}, \tilde{P}$ die LU-Zerlegung mit Partielle Pivotisierung. (und Rundungsfehlern). Dann,
  $$\tilde{L} \cdot \tilde{U} = \tilde{P} \cdot A + \Delta A$$
  mit $\|\Delta A\|_\infty \leq c \cdot \rho_n \cdot \varepsilon_F \cdot \|A\|_\infty$ (c eine Konstante).

- **Bemerkung:**
  - Man kann zeigen; für eine spaltenpivotisierte LU-Zerlegung $PA = LU$ von A, dann $\underline{\rho_n \leq 2^{n-1}}$ (gleichmässig in $A \in M_n(\mathbb{R})$).
  $\Rightarrow$ rückwärtsstabil.

- **Praktische Problem:** Die Abschätzung $\rho_n \leq 2^{n-1}$ ist in der Praxis unbrauchbar. Man kann aber danach den Fehler kontrollieren.

5.7) Die Cholesky-Zerlegung.

. Wir betrachten eine bestimmte Klasse, die positiv definite, Matrizen.

. **Definition 5.21)** Eine symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ heisst positiv definit falls für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$x^t \cdot A \cdot x > 0.$$

. Einige Eigenschaften:

. **Lemma 5.22)** $\begin{cases} \text{ⓐ } A \text{ positiv definit} \Rightarrow A \text{ regulär (invertierbar).} \\ \text{ⓑ } A_{ii} > 0. \end{cases}$

. **Beweis:** ⓐ Wegen $x^t A x > 0$, $\forall x \neq 0$, es folgt

$$\{Ax, x \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^n,$$

d.h., $\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ Spalten linear unabhängig.

ⓑ ~~Weg~~ $A_{ii} = e_i^t \cdot A \cdot e_i > 0$. #

. **Definition 5.23)** Eine Zerlegung $A = L \cdot L^t$ mit unterer Dreiecksmatrix L, die (strikt) positive Diagonaleinträge besitzt, heisst Cholesky-Zerlegung von A.

Ziel ist das folgende Satz.

Satz 5.24) (Existenz der Cholesky-Zerlegung).

- Eine Cholesky-Zerlegung von A existiert $\Longleftrightarrow$ A positiv definit ist.

- Zum Beweis braucht man einige Vorbereitungslemmas.

Definition 5.25

- Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ und die Blockdarstellung:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{11} \in M_p(\mathbb{R}),\ A_{22} \in M_{n-p}(\mathbb{R}).$$

- Falls A_{11} invertierbar ist, dann

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

mit $S := A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12}$ das Schur-Komplement von A bzgl. A_{11}.

Lemma 5.26)

- Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ positiv definit.
- Dann sind A_{11} und S positiv definit

Beweis: . $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$. Wegen $A = A^t$, haben wir

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^t & A_{21}^t \\ A_{12}^t & A_{22}^t \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow A_{11} = A_{11}^t,\ A_{22} = A_{22}^t,\ A_{12} = A_{21}^t,\ A_{21} = A_{12}^t.$

. Insbesondere, A_{11} ist symmetrisch.

. Dazu, $(x_1\ 0)^t \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1^t A_{11} x_1 > 0$

$\forall x_1 \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, weil A positiv definit ist.

$\Rightarrow$ A_{11} positiv definit.

- Es folgt, $S = A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12}$ ist wohldefiniert.

- $S^t = A_{22}^t - A_{12}^t A_{11}^{-t} A_2^t = A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12} = S$.

letztlich, sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $x_1 := -A_{11}^{-1} \cdot A_{12} \cdot x_2$

Dann, für $x_2 \neq 0$, gilt

$$0 < x^t A x = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} A_{11} x_1 + A_{12} x_2 \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 0 \\ (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) x_2 \end{pmatrix} = x_2 S x_2 .$$

$\Rightarrow$ Ist auch S positiv definit. #

- Nun kommen wir zum Beweis von Satz 5.24.

<u>Beweis von Satz 5.24:</u>

<u>$\Rightarrow$:</u> . Sei $A = L \cdot L^t$. Dann,

$$A^t = (L L^t)^t = (L^t)^t L^t = A .$$

Dazu, $x^t A x = x^t L L^t x = \| L^t x \|^2 \geq 0$.

. $\| \cdot \|$ ist eine Norm, deshalb $\| L^t x \| > 0$ für alle $L^t x \neq 0$. Wegen $L_{ii} > 0$ und $L_{ij} = 0$ für $j > i$, ist L invertierbar $\Rightarrow x^t A x > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

<u>$\Leftarrow$:</u> . Sei A positiv definit.

. <u>Induktion:</u> $n = 1$: $a_{11} > 0 \Rightarrow L = [\, l_{11} = \sqrt{a_{11}} \,]$. ✓.

. <u>Annahme:</u> Für alle $B \in M_{n-1}(\mathbb{R})$, positiv definit, existiert die Cholesky-Zerlegung.

. Schreibe $A = \begin{pmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, mit $A_{21} = A_{12}^t$,

(A_{22} positiv definit) und sei

$S = A_{22} - \frac{1}{a_{11}} \cdot A_{21} A_{12}$ das Schur-Kompl. von A bzgl. a_{11}.

Lem 5.26 $\Rightarrow$ $S = \tilde{L} \cdot \tilde{L}^t$ (Cholesky-Zerlegung).

Und können wir setzen

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ \frac{1}{l_{11}} A_{21} & \tilde{L} \end{pmatrix}.$$

Dann, $$L \cdot L^t = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ \frac{1}{l_{11}} A_{21} & \tilde{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & \frac{1}{l_{11}} A_{12} \\ 0 & \tilde{L}^t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overset{= a_{11}}{l_{11}^2} & A_{12} \\ A_{21} & \frac{1}{l_{11}^2} \cdot A_{12} A_{21} + \underbrace{\tilde{L}\tilde{L}^t}_{= S} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & \frac{A_{12} A_{21}}{a_{11}} + A_{22} - \frac{1}{a_{11}} A_{21} A_{12} \end{pmatrix} = A. \quad \#$$

. Algorithmus:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \\ l_{21} & l_{22} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \\ 0 & l_{22} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11} l_{21} & \\ \text{sym.} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & \cdots \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

Für $i \geq j$: . $a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} l_{kj}^t = l_{ij} l_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2} \text{ und} \\ l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right), \text{ für } i = j+1, \dots, n. \end{cases}$$

für $j = 1, \dots, n$.

$\Rightarrow$ l_{11} aus a_{11}, dann l_{21} aus $\{a_{12}, l_{11}\}$, l_3 aus $\{a_{13}, l_{11}\}$ ...
dann l_{22} aus $\{l_{21}, a_{22}\}$, ...

. Explizit: Siehe Algorithmus 6.49 in Bebendorf Skript.

<u>Beispiel:</u> $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -5/3 \\ 1 & -5/3 & 2 \end{pmatrix}$

- $l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 3$
- $l_{21} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{3}{3} = 1$
- $l_{31} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{1}{3}$
- $l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = 2$
- $l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} \cdot l_{21}}{l_{22}} = -1$
- $l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{\frac{26}{9}} = \frac{\sqrt{26}}{3}$.

$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{\sqrt{26}}{3} \end{pmatrix}$ und $\underline{A = L \cdot L^t}$.

- Hier haben wir keine Instabilität, weil die Einträge von L werden nie gross, falls die a_{ii} klein sind.

<u>Lemma 5.27</u>: Sei $A = LL^t$ eine Cholesky-Zerlegung. Dann, gilt

$$|l_{ij}| \leq \sqrt{a_{ii}} \text{ für alle } i \geq j.$$

<u>Beweis:</u> $0 < a_{ii} = \sum_{j=1}^{i} l_{ij}^2 \Rightarrow l_{ij}^2 \leq a_{ii}, \forall j \leq i.$ #

- <u>Rückwärtsstabilität:</u>

<u>Satz 5.28</u> (Ohne Beweis). Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ positiv definit und $\tilde{L}$ die mit dem Rechner berechnete Matrix. Dann

$$\tilde{L} \cdot \tilde{L}^t = A + \Delta A$$

mit $\|\Delta A\|_\infty \leq const \cdot \varepsilon_M \cdot \|A\|_\infty$.