29. Juni

6) Integration und Splines

6.1) Quadraturformeln, "Basics".

. Problem: Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $w : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, integrierbar und positiv.

. w ist eine Gewichtsfunktion.

Ziel: Für Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, suchen wir

$$I_w(f) := \int_a^b f(x) w(x) dx$$

. Fall 1: Man findet eine Stammfunktion von $f(x) w(x)$. (Spezialfall) $\Rightarrow$ ✓.

. Fall 2: Allgemein existiert keine schöne Formula für die Stammfunktion von $f(x) w(x)$.

$\Rightarrow$ Numerische Integration.

Def. 1: Eine Quadraturformel ist eine Abbildung $Q_{[a,b]} : C([a,b]) \to \mathbb{R}$ der Form

$$Q_{[a,b]}(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k \cdot f(x_k)$$

mit Stützstellen $x_0 < x_1 < \dots < x_m$, $x_k \in [a,b]$ und Gewichten $w_0, \dots, w_m \in \mathbb{R}$.

Def. 2) Ein Quadraturverfahren ist eine Folge $n \mapsto Q_n(f)$, $n \geq 1$, wobei

$$Q_n(f) := \sum_{\ell=0}^{n-1} Q_{[x_\ell, x_{\ell+1}]}(f), \quad x_\ell := a + \frac{b-a}{n} \cdot \ell$$

Fragen: (1) Für welche Funktionen f ist eine Quadraturformel $Q_{[a,b]}(f) = I_w(f)$?

(2) Sei $h := \frac{b-a}{n}$. Wie gut ist die Approximation von $I_w(f)$ durch $Q_n(f)$?

Def. 3) (a) Die Quadraturformel $Q_{[a,b]}$ hat Exactheitsgrad $r \in \{0,1,2,3,\dots\}$ falls

$$Q_{[a,b]}(p) = I_w(p)$$

für alle $p \in \mathbb{P}_r$.

(b) Das Quadraturverfahren Q_n hat Konsistenzordnung $s \geq 0$, falls

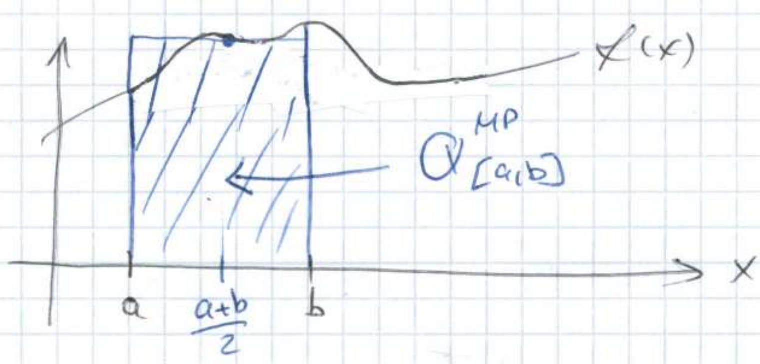
$$|Q_n(f) - I_w(f)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^s}\right) = \mathcal{O}(h^s)$$

für alle $f \in C^\infty([a,b])$.

Beispiele: (1) Mittelpunktformel. Sei $w \equiv 1$, $h := \frac{b-a}{n}$

$$\Rightarrow Q^{MP}_{[a,b]}(f) = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

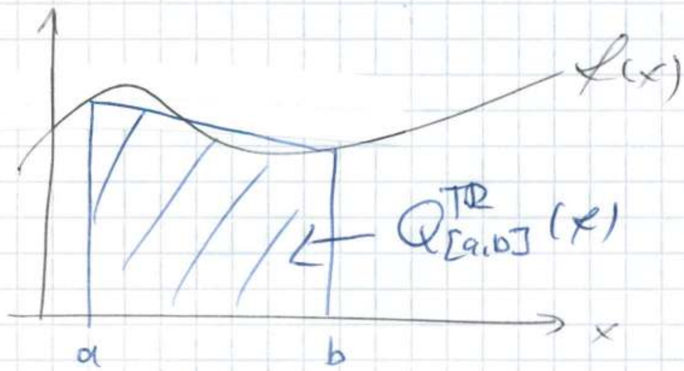
und $$Q^{MP}_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} h \cdot f\left(a + \left(k+\tfrac{1}{2}\right)h\right)$$



(2) Trapezformel: Sei $w=1$, $h=\frac{b-a}{n}$.

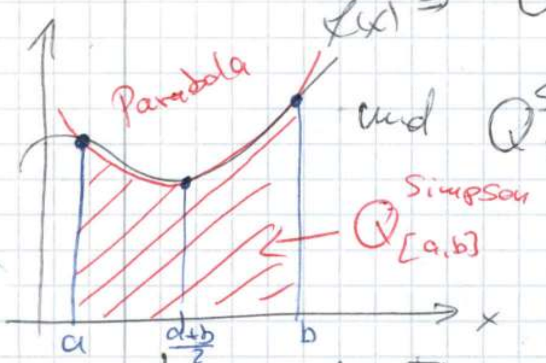
$$\Rightarrow Q^{TR}_{[a,b]}(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(b)+f(a)\right)$$

und $$Q^{TR}_n(f) = \frac{h}{2}\cdot\left[f(a)+2f(a+h)+\dots+2f(b-h)+f(b)\right]$$



(3) Simpson-formel: Sei $w=1$, $h=\frac{b-a}{n}$.

$$\Rightarrow Q^{Simpson}_{[a,b]}(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$



und $$Q^{Simpson}_n(f) = \frac{h}{6}\left(f(a)+4f\left(a+\frac{h}{2}\right)+2f(a+h)+\dots+2f(b-h)+4f\left(b-\frac{h}{2}\right)+f(b)\right).$$

Lemma 4 Für Mittelpunkt und Trapez gilt:

(a) Exactheitsgrad $= 1$

(b) Konsistenzordnung $= 2$

(c) $\forall f\in C^2([a,b])$,
$$\left|\int_a^b f(x) - Q^{MP/TR}_n(f)\right| \le (b-a)\frac{h^2}{24}\cdot\|f''\|_{L^\infty([a,b])}.$$

Beweis: ⓐ Sei $f(x) = \alpha x + \beta$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \frac{\alpha}{2}(b^2 - a^2) + \beta(b-a)$$

$$= (b-a)\left(\alpha(b+a) + \beta\right)$$

$$\begin{cases} = (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ = (b-a)\, \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall p \in \mathbb{P}_1, \quad Q^{MP/TR}_{[a,b]}(p) = \int_a^b p(x)\,dx.$$

Aber $\exists f \in \mathbb{P}_2 \setminus \mathbb{P}_1$ s.d.

$$\int_a^b f(x)\,dx \begin{cases} \neq Q^{MP}_{[a,b]}(f) \\ \neq Q^{TR}_{[a,b]}(f). \end{cases}$$

Bsp: $f(x) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)^3}{12} \\ Q^{MP}_{[a,b]}(f) = 0 \\ Q^{TR}_{[a,b]}(f) = \frac{(b-a)^3}{8}. \end{cases}$$

(Siehe Übungen) ⓑ & ⓒ: Sei $f \in C^2([a,b])$. $\forall x \in [a,b]$,

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2} f''(\xi(x))\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ für}$$

einer $\xi(x) \in (a,b)$.

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx - Q^{MP}_{[a,b]}(f) \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b \frac{|f''(\xi(x))|}{2} \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 dx$$

$$\leq \|f''\|_{L^\infty([a,b])} \cdot \frac{(b-a)^3}{24}.$$

So, für $Q^{MP}_n(f)$:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - Q^{MP}_n(f) \right| =$$

$$= \left| \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\int_{a+\ell h}^{a+(\ell+1)h} f(x)dx - Q^{MP}_{[a+\ell h, a+(\ell+1)h]}(f) \right) \right|$$

$$\leq \frac{n \cdot h^3}{24} \cdot \|f''\|_{L^\infty([a,b])} = \frac{b-a}{24} \cdot h^2 \cdot \|f''\|_{L^\infty([a,b])}.$$

#

<u>Lemma 5)</u> Für Simpson gilt:

(a) Exaktheitsgrad $= 3$

(b) Konsistenzordnung $= 4$.

(c) $\forall f \in C^4([a,b])$,

$$\left| \int_a^b f(x) - Q^{\text{Simpson}}_n(f) \right| \leq \frac{b-a}{180} \|f^{(4)}\|_{L^\infty([a,b])} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^4$$

<u>Beweis:</u> (a): Übungen: Man testet, dass

$$\int_a^b x^k dx = Q^{\text{Simpson}}_{[a,b]}(x^k), \quad k = 0,1,2,3$$

aber $\exists f \in \mathbb{P}_4 \setminus \mathbb{P}_3$ s.d.

$$\int_a^b f(x)dx \neq Q^{\text{Simpson}}_{[a,b]}(x^4).$$

b und c: Sei $h = \frac{b-a}{n}$. Dann,

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - Q_n^{\text{Simpson}}(f) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a+k\cdot h}^{a+(k+1)h} f(x)\,dx - Q^{\text{Simpson}}_{[a+k\cdot h,\, a+(k+1)h]}(f) \right|$$

Zu zeigen: $\forall \alpha \in [a, b-h]$,

$$\left| \int_\alpha^{\alpha+h} f(x)\,dx - Q^{\text{Simpson}}_{[\alpha,\alpha+h]}(f) \right| \leq$$

$$\leq \frac{h}{180} \cdot \| f^{(4)} \|_{L^\infty([a,b])} \left(\frac{h}{2}\right)^4.$$

Aus Teil a, wissen wir, dass $\forall p \in \mathbb{P}_3$,

$$\int_\alpha^{\alpha+h} p(x)\,dx = Q^{\text{Simpson}}_{[\alpha,\alpha+h]}(p).$$

Für $p \in \mathbb{P}_3$, Polynom mit

$$\begin{cases} p(\alpha) = f(\alpha), \\ p(\alpha+\frac{h}{2}) = f(\alpha+\frac{h}{2}), \\ p'(\alpha+\frac{h}{2}) = f'(\alpha+\frac{h}{2}), \\ p(\alpha+h) = f(\alpha+h). \end{cases} \Rightarrow Q^{\text{Simpson}}_{[\alpha,\alpha+h]}(p) \overset{\text{def.}}{=} Q^{\text{Simpson}}_{[\alpha,\alpha+h]}(f).$$

(Seite 122)

(Man kann auch direkt berechnen: $\int_\alpha^{\alpha+h} p(x)\,dx = \frac{h}{6}\left(f(\alpha) + 4f(\alpha+\frac{h}{2}) + f(\alpha+h)\right)$)

(Siehe File)
(Seite 125b)

Aus Lemma 3, Kapitel 5 (mit $x_0 = \alpha$, $x_1 = x_2 = \alpha+\frac{h}{2}$, $x_3 = \alpha+h$)

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} (x-\alpha)\left(x-\alpha-\frac{h}{2}\right)^2 (x-\alpha-h)$$

Für einen $\xi(x) \in [\alpha, \alpha+h]$.

$$\Rightarrow \left| \int_\alpha^{\alpha+h} f(x)\,dx - Q^{Simpson}_{[\alpha,\alpha+h]}(f) \right| = \left| \int_\alpha^{\alpha+h} \left(f(x) - p(x)\right) dx \right|$$

$$\leq \frac{\|f^{(4)}\|_{L^\infty([\alpha,\alpha+h])}}{4!} \cdot \underbrace{\int_\alpha^{\alpha+h} (x-\alpha)\left(x-\alpha-\frac{h}{2}\right)^2 (\alpha+h-x)\,dx}_{= \frac{h^5}{120}}$$

$$\leq h \cdot \frac{\|f^{(4)}\|_{L^\infty([a,b])}}{180} \left(\frac{h}{2}\right)^4 . \quad \#$$

4. Juli

6.2) Newton-Cotes-Formeln

. Wie erhält man eine Quadraturformel mit beliebigen Exactheitsgrad?

Sei $\boxed{Q_{[a,b]}(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k)}$ aus Def. 1.

Satz 6) Die Quadraturformel hat Exactheitsgrad grösser oder gleich m

$$\iff$$

$$w_k = \int_a^b L_k(x)\, w(x)\,dx \quad , k = 0, \dots, m$$

mit L_k die Lagrange Polynome (siehe Def. 1, Kapitel 5).

Beweis: $\Rightarrow$: Exactheitgrad $\geq m$

$$\Rightarrow \int_a^b L_k(x) w(x)\,dx = Q_{[a,b]}(L_k) = \sum_{\ell=0}^{m} w_\ell \underbrace{L_k(x_\ell)}_{=\delta_{k,\ell}} = w_k .$$

126b

Simpson-Regel.

Hermite Basis: H0,H1,H2,H3:

p(x)=f(alpha) H0(x)+f(alpha+h/2) H1(x) + f '(alpha+h/2) H2(x) + f(alpha+h) H3(x)

```
> H0:=-4/h^3*(x-alpha-h/2)^2*(x-alpha-h);
```

$$H0 := -\frac{4\left(x-\alpha-\frac{h}{2}\right)^2 (x-\alpha-h)}{h^3}$$

```
> H1:=-(x-alpha)*(x-alpha-h)*4/h^2;
```

$$H1 := -\frac{4\,(x-\alpha)\,(x-\alpha-h)}{h^2}$$

```
> H2:=-(x-alpha)*(x-alpha-h)*(x-alpha-h/2)*4/h^2;
```

$$H2 := -\frac{4\,(x-\alpha)\,(x-\alpha-h)\left(x-\alpha-\frac{h}{2}\right)}{h^2}$$

```
> H3:=(x-alpha-h/2)^2*(x-alpha)*4/h^3;
```

$$H3 := \frac{4\left(x-\alpha-\frac{h}{2}\right)^2 (x-\alpha)}{h^3}$$

Koeffizienten

```
> simplify(int(H0,x=alpha..alpha+h));
```

$$\frac{h}{6}$$

```
> simplify(int(H1,x=alpha..alpha+h));
```

$$\frac{2\,h}{3}$$

```
> simplify(int(H2,x=alpha..alpha+h));
```

$$0$$

```
> simplify(int(H3,x=alpha..alpha+h));
```

$$\frac{h}{6}$$

Laguerre Basis: L0,L1,L2:

p(x)=f(alpha) L0(x)+f(alpha+h/2) L1(x) + f(alpha+h) L2(x)

```
> L0:=(x-alpha-h/2)*(x-alpha-h)*2/h^2;
```

$$L0 := \frac{2\left(x-\alpha-\frac{h}{2}\right)(x-\alpha-h)}{h^2}$$

```
> L1:=-(x-alpha)*(x-alpha-h)*4/h^2;
```

$$L1 := -\frac{4(x-\alpha)(x-\alpha-h)}{h^2}$$

```
> L2:=(x-alpha)*(x-alpha-h/2)*2/h^2;
```

$$L2 := \frac{2(x-\alpha)\left(x-\alpha-\frac{h}{2}\right)}{h^2}$$

Koeffizienten

```
> simplify(int(L0,x=alpha..alpha+h));
```

$$\frac{h}{6}$$

```
> simplify(int(L1,x=alpha..alpha+h));
```

$$\frac{2h}{3}$$

```
> simplify(int(L2,x=alpha..alpha+h));
```

$$\frac{h}{6}$$

```
>
```

$\underline{\Leftarrow}$: Ist $w_k = \int_a^b L_k(x)\, w(x)\, dx$

$$\Rightarrow Q_{[a,b]}(L_\ell) = \sum_{k=0}^{m} \underbrace{\int_a^b w(x) L_k(x)\, dx}_{w_k} \cdot \underbrace{L_\ell(x_k)}_{=\delta_{k\ell}}$$
$$= \int_a^b w(x)\, L_\ell(x)\, dx .$$

$\Rightarrow$ Wegen Linearität, $Q_{[a,b]}(p) = \int_a^b w(x)\, p(x)\, dx$ $\forall\, p \in \mathbb{P}_m$ (da die Lagrange Polynome eine Basis von $\mathbb{P}_m$ sind). #

<u>Def. 7)</u> ⓐ Die Quadraturformel mit

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{m}, \quad k = 0, \dots, m$$

und Gewichte $w_k = \int_a^b L_k(x)\, w(x)\, dx$

heisst <u>geschlossene Newton-Cotes-Formula.</u>

ⓑ Die Quadraturformel mit

$$x_k = a + \frac{(k+\frac{1}{2})}{m+1}(b-a), \quad k = 0, \dots, m$$

und Gewichte $w_k = \int_a^b L_k(x)\, w(x)\, dx$

heisst <u>offene Newton-Cotes-Formula.</u>

<u>Beispiele für $w(x) \equiv 1$.</u>

Mittelpunkt. $\boxed{m = 0, \text{ offen:}}$ $Q(f) = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Trapez. $\boxed{m = 1, \text{ abgeschlossen:}}$ $Q(f) = (b-a)\, \frac{f(a) + f(b)}{2}$

. <u>$m = 1$, offen:</u> $Q(f) = (b-a)\, \frac{f\left(\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b\right) + f\left(\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b\right)}{2}$

Simpson $\boxed{m = 2, \text{ abgeschlossen}}$ $Q(f) = (b-a)\, \frac{\left(f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}{6}$

$m=2$, offen: $Q(f) = (b-a)\left[\frac{1}{8} f\left(\frac{5}{6}a+\frac{1}{6}b\right) + \frac{1}{12} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{8} f\left(\frac{1}{6}a+\frac{5}{6}b\right)\right].$

Welche Exactheitsgrad haben die Newton-Cotes-Formeln?

Satz 8) Sei $Q(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k)$ eine Quadratur-Formel für $\int_a^b f(x)\,dx$. Falls $Q(f)$ symmetrisch bzgl. $\frac{a+b}{2}$,

d.h., $\begin{cases} x_{m-k} + x_k = a+b \\ w_{m-k} = w_k \end{cases}, \; k=0,\ldots,m,$

und Q Exactheitsgrad $\geq 2q$ $(q \in \mathbb{N})$.

$\Rightarrow Q$ hat Exactheitsgrad $\geq 2q+1$.

Beweis: Für $p(x) := \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2q+1}$, wegen Symmetrie folgt $Q(p) = \int_a^b p(x)\,dx = 0$

$\Rightarrow \forall \tilde{p} \in \operatorname{span}(\mathbb{P}_{2q}, p) = \mathbb{P}_{2q+1}$ ist

$Q(\tilde{p}) = \int_a^b \tilde{p}(x)\,dx.$ #

Bsp.: Simpson hat a-priori Exactheitsgrad ≥ 2 (wegen Satz 6) aber wegen Satz 8 wissen wir sofort, dass Simpson hat Exactheitsgrad ≥ 3.

6.3) Gauss-Quadratur

- Seien $a \le x_0 < x_1 < \dots < x_m \le b$, $w_k = \int_a^b L_k(x) w(x)\,dx$.

$$\xRightarrow{\text{Satz 6}} \quad Q_{[a,b]}(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k) = \int_a^b w(x) f(x)\,dx$$

$\forall f \in \mathbb{P}_m$.

- **Frage:** Kann man die Knoten $x_0, \dots, x_m$ geschickt wählen um ein höheres Exaktheitsgrad zu erreichen?

- Notation: $\omega(x) = \prod_{k=0}^{m} (x - x_k) \in \mathbb{P}_{m+1}$.

Satz 9) Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Quadraturformel $Q_{[a,b]}$ hat Exaktheitsgrad $m+k$

$$\Longleftrightarrow$$

$\omega \perp_w \mathbb{P}_{k-1}$ (d.h. bzgl. $L^2(w)$), d.h.,

$$(\omega, p)_w = \int_a^b \omega(x) p(x) w(x)\,dx = 0, \ \forall p \in \mathbb{P}_{k-1}.$$

Beweis: $\Rightarrow$: Exaktheitsgrad $m+k$. $\forall p \in \mathbb{P}_{k-1}$,

$$\Rightarrow (\omega, p)_w = \int_a^b \underbrace{\omega(x) p(x)}_{\in \mathbb{P}_{m+k}} w(x)\,dx$$

$$= \sum_{\ell=0}^{m} w_\ell \cdot \underbrace{\omega(x_\ell)}_{=0} p(x_\ell) = 0$$

$\Leftarrow$: Sei $g \in \mathbb{P}_{m+k}$. Dann $\exists\ p \in \mathbb{P}_{k-1}$ und $q \in \mathbb{P}_m$ s.d.

$$g = p \cdot \omega + q,$$

weil $\{1, x, \dots, x^m, \omega(x), \omega(x)\cdot x, \dots, \omega(x)\cdot x^{k-1}\}$ ist eine Basis von $\mathbb{P}_{m+k}$.

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,w(x)\,dx = \int_a^b \big(p(x)\omega(x) + q(x)\big)\,w(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\int_a^b p(x)\,\omega(x)\,w(x)\,dx}_{=0=Q_{[a,b]}(p\cdot\omega)} + \underbrace{\int_a^b q(x)\,w(x)\,dx}_{=Q_{[a,b]}(q)}$$

weil $q \in \mathbb{P}_m$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} Q_{[a,b]}(p\cdot\omega + q). \quad \#$$

Korollar 10
(a) Der Exactheitsgrad ist $\leq 2m+1$.

(b) Der Exactheitsgrad ist $2m+1$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\omega \perp_w \mathbb{P}_m$$

Beweis: (a). Falls Exactheitsgrad ist $\geq 2m+2$
$\Rightarrow$ für $k = m+2$, ω ist $\perp_w$ zu $\mathbb{P}_{k-1} = \mathbb{P}_{m+1}$,
d.h. $(\omega, \omega)_w = \int_a^b \omega^2(x)\,w(x)\,dx = 0$. ↯

(b) Satz 9 mit $k = m+1$.

Frage: $\exists$ Knoten $x_0, \dots, x_m$ s.d. $\omega \perp_w \mathbb{P}_m$?

Man benutzt dem Gram-Schmidt Verfahren aus L.A.

• $\omega_{m+1} \in \mathbb{P}_{m+1}$ mit $\omega_{m+1} \perp_w \mathbb{P}_{m+1}$ ist so konstruiert:

$$\begin{cases} \cdot\ \omega_0(x) = 1, & \forall x \in [a,b] \\ \cdot\ \omega_{n+1}(x) := x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} (x^{n+1}, \omega_k)_w \cdot \omega_k(x), & n = 0,1,\dots,m. \end{cases}$$

Hier sind einige Eigenschaften von Orthogonalpolynome.

<u>Lemma 11)</u>

(a) $\exists!\ \omega_{m+1} \in \mathbb{P}_{m+1} \setminus \{0\}$ s.d. $\omega_{m+1} \perp_w \mathbb{P}_m$.

(b) Die Orthogonale Polynome erfüllen die 3Termrekursion:

$$\begin{cases} \omega_{m+1}(x) = (x - \alpha_m)\,\omega_m(x) - \beta_m\,\omega_{m-1}(x), & m \geq 0 \\ \omega_0(x) = 1, & \omega_{-1}(x) :\equiv 0 \end{cases}$$

wobei $\alpha_m = \dfrac{(x \cdot \omega_m, \omega_m)_w}{(\omega_m, \omega_m)_w}$ und

$$\beta_m = \frac{(\omega_m, \omega_m)_w}{(\omega_{m-1}, \omega_{m-1})_w} \quad (\beta_0 \text{ beliebig})$$

(c) ω_m hat $m+1$ <u>einfache</u> Nullstellen $x_0 < x_1 < \dots < x_m$ in (a,b).

<u>Beweis:</u> (a),(b): leicht.

(c) Seien $x_0, \dots, x_k$ die Nullstellen von ω_{m+1} mit <u>ungerade</u> Vielfachheit in (a,b).

<u>Zu zeigen:</u> $k = m$. ($k \leq m$ folgt aus $\omega_{m+1} \in \mathbb{P}_{m+1}$)

Nehmen wir an, $k < m$.

$\Rightarrow q(x) := \prod_{e=0}^{k} (x - x_e) \in \mathbb{P}_{k+1} \subseteq \mathbb{P}_m$.

Aber $\operatorname{sign}(q(x) \cdot \omega_{m+1}(x))$ ist konstant auf $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b \omega_{m+1}(x)\,q(x)\,w(x)\,dx \neq 0$ ↯. #

Def. 12) Seien $x_0, \dots, x_m$ die Nullstellen von ω_{m+1} (aus Lemma 11).
Die Quadraturformel
$$Q^m_{[a,b]}(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k)$$
mit Gewichten
$$w_k = \int_a^b \underbrace{L_k(x)}_{=\prod_{e \neq k} \frac{x-x_e}{x_k-x_e}} w(x)\,dx = \int_a^b \frac{\omega_{m+1}(x)}{(x-x_k)\,\omega'_{m+1}(x)} w(x)\,dx$$
heisst Gauss-Formel vom Grad $m+1$.

Korollar 13) Gauss-Formel hat ein Exactheitsgrad $2m+1$.

Beweis: Trivial #

Satz 14) Für $s \in \mathbb{N}$, $\exists\, C > 0$ s.d.
$$\left| Q^m_{\text{Legendre}}(f) - \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \right| \leq \frac{C \cdot \|f\|_{s,1}}{m^s}$$
und
$$\left| Q^m_{\text{Tchebishev}}(f) - \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \right| \leq \frac{C \cdot \|f\|_{s,w}}{m^s}$$
$\forall f \in C^s([-1,1])$ wobei
$$\|f\|_{s,w} := \sqrt{\sum_{k=0}^{s} \|f^{(k)}\|^2_w}, \quad \|f\|_w = (f,f)_w.$$

(Beweis ... Büchern.)

Beispiele: (a) Tchebishev

. Sei $[a,b]=[-1,1]$ und $w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\Rightarrow T_k(x) := \cos(k \cdot \operatorname{acos}(x))$, $k=0,1,\dots$,
die Tchebishev Polynome, sind orthogonal bzgl. w:

In der Tat:

$$(T_k, T_\ell)_w = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(k \cdot \operatorname{acos}(x)) \cdot \cos(\ell \cdot \operatorname{acos}(x))}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\left\{\begin{matrix} x=\cos\theta \\ dx=-\sin\theta\, d\theta \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi} \frac{\cos(k\cdot\theta)\cos(\ell\cdot\theta)}{\cancel{\sin\theta}}\,\cancel{\sin\theta}\, d\theta$$

$$= 0, \text{ für } k \neq \ell$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

(b) Legendre

Sei $[a,b]=[-1,1]$ und $w(x)=1$.

Dann $L_k(x) := \dfrac{1}{2^k k!} \cdot \dfrac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k$, $k=0,1,\dots$,

die Legendre Polynome, sind orthogonal bzgl. 1:

(c) Hermite

Sei $[a,b]=(-\infty,\infty)$ und $w(x)=e^{-x^2}$.

$\Rightarrow H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \dfrac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}$, $k=0,1,\dots$:

die Hermite Polynome sind $\perp$ bzgl. w.

6.4) Splines

- **Gesucht:** Glatte Interpolationen, die aber stückweise Polynome mit kleinen Grad sind.

- **Def. 15)** Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ Stützstellen, $m \in \mathbb{N}$ gegeben.
  $\Delta := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ist ein Gitter und
  $$S_m(\Delta) := \left\{ s \in C^{m-1}([a,b]) \;\middle|\; s|_{[x_{k-1}, x_k]} \text{ ist ein Polynom vom Grad } m, \forall k = 1, \dots, n \right\}$$
  heisst Raum der Splines vom Grad m bzgl. des Gitters Δ.

Beispiele: (a) $m=1$: Stückweise lineare stetige Funktionen.

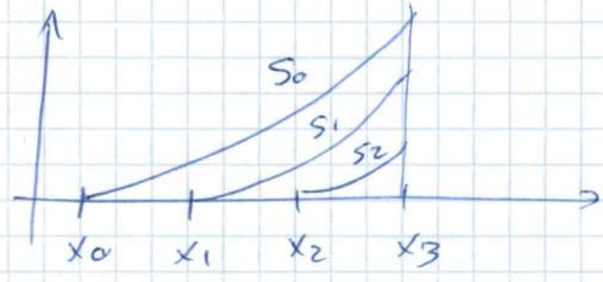
(b) $m=3$: Kubische Splines.

- Für $m=3$ sind $s \in S_m$ in C^2, so wird die Kurve als glatt empfunden.

- Fragen: (1) $\dim(S_m(\Delta)) = ?$
  (2) Welche Basis von $S_m(\Delta)$ ist (numerisch) geeignet?
  (3) Wie berechnet man $s(x)$?

- Bemerkung: $s_k(x) = ((x - x_k)_+)^m$, mit $x_+ := \max(0, x)$ ist in $S_m(\Delta)$.

$n=3$



Lemma 16) $\dim\left(S_m(\{x_0,\dots,x_n\})\right) = m+n$.

Einer Basis von $S_m(\{x_0,\dots,x_n\})$ ist

$$\{\underbrace{1,\ x-x_0,\ \dots,\ (x-x_0)^m}_{m+1},\ \underbrace{(x-x_1)_+^m,\ \dots,\ (x-x_{n-1})_+^m}_{n-1}\}.$$

Beweis: Induktion über n:

$\underline{n=1}$: $S_m(\{x_0,x_1\})$ sind Polynome mit Grad $m \Rightarrow \{1, x-x_0, \dots, (x-x_0)^m\}$ ist eine Basis

. Sei nun Lemma 16 OK für n.

$\Rightarrow (x-x_n)_+^m$ ist linear unabhängig von $(x-x_1)_+^m, \dots, (x-x_{n-1})_+^m$, weil $(x-x_n)_+ = 0$ auf $[x_0,x_n]$.

In der Tat: Nehmen wir an $\exists\, \alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$ s.d.

$$\text{(*)} \qquad \alpha_1 (x-x_1)_+^m + \dots + \alpha_{n-1}(x-x_{n-1})_+^m = (x-x_n)_+^m$$

und sei $\ell = \min\{1,\dots,n-1 \mid \alpha_k = 0 \text{ für } k<\ell,\ \alpha_\ell \neq 0\}$.

$\Rightarrow$ auf $[x_\ell, x_{\ell+1}]$ ist (*):

$$\alpha_\ell \cdot (x-x_\ell)^m = (x-x_n)_+^m = 0 \ \lightning.$$

Dazu, $(x-x_n)_+^m$ ist linear unabhängig von

$$1, x-x_0, \dots, (x-x_0)^m,$$

weil $(x-x_n)_+^m$ hat ∞-viele Nullstellen in $[x_0,x_n]$ und der einzige Polynom in $\mathbb{P}_m$ mit ∞-viele Nullstellen ist Null.

Aber $(x-x_n)_+^m$ ist nicht identisch gleich Null auf $[x_0, x_{n+1}]$.

$\Rightarrow$ Wir haben gezeigt, dass

$$S_m(\{x_0, \dots, x_{n+1}\}) \supseteq \text{span}\{1, \dots, (x-x_0)^m, (x-x_1)_+^m, \dots, (x-x_n)_+^m\}.$$

. Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, muss man sehen, dass

$$\forall s \in S_m(\{x_0, \dots, x_{n+1}\}),$$

$$s\big|_{[x_0, x_n]} \in S_m(\{x_0, \dots, x_n\}).$$

. Aus IV $\Rightarrow \exists \alpha_k, \beta_\ell \in \mathbb{R}$ mit

$$s(x) = \tilde{s}(x) := \sum_{k=0}^{m} \alpha_k (x-x_0)^k + \sum_{\ell=1}^{n-1} \beta_\ell \cdot (x-x_\ell)_+^m,$$

$$\underline{\forall x \in [x_0, x_n].}$$

. Dazu ist $s \in C^{m-1}$

$$\Rightarrow s^{(k)}(x_n) = \tilde{s}^{(k)}(x_n), \quad 0 \le k \le m-1.$$

. Aber $s - \tilde{s}$ auf $[x_n, x_{n+1}]$ ist ein Polynom vom Grad m

$\Rightarrow \exists \beta_n \in \mathbb{R}$ s.d.

$$s(x) - \tilde{s}(x) = \beta_n (x-x_n)^m, \quad \forall x \in [x_n, x_{n+1}]$$

$$\Rightarrow s(x) = \tilde{s}(x) + \beta_n (x-x_n)_+^m, \quad \forall x \in [x_0, x_{n+1}]$$

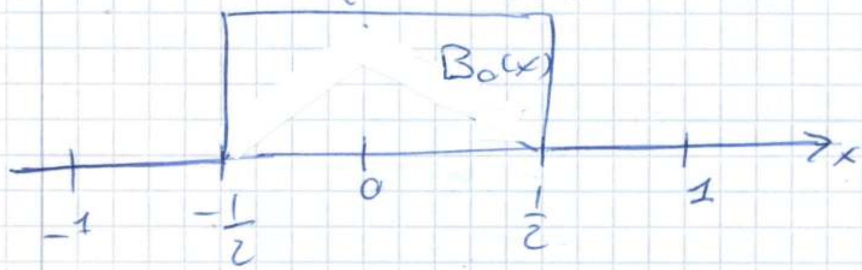
\#

. <u>Geeignete Basis:</u> $\boxed{\text{B-ell-splines}}$

. Seien die Stützstellen äquidistant:

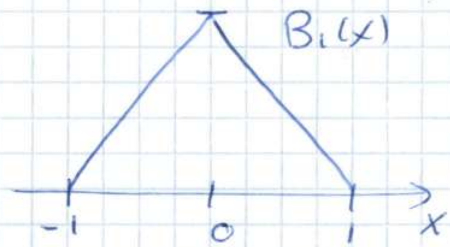
$$x_k = a + h \cdot k, \quad k = 0, \dots, n \quad \text{mit } h = \frac{b-a}{n}.$$

Sei $B_0(x) := \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2. \end{cases}$



und rekursiv

$$B_{m+1}(x) := \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} B_m(t)\,dt$$



Siehe auch Seite 137b

Einige Eigenschaften von B_m.

Lemma 17: $\forall m \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $B_m \in C^{m-1}(\mathbb{R})$, $B_m(x) = 0$ für $|x| \geq \frac{m+1}{2}$.

(b) $B_m \in S_m(\Delta_m)$ mit

$$\Delta_m = \left\{ -\frac{m+1}{2}, -\frac{m-1}{2}, \ldots, \frac{m-1}{2}, \frac{m+1}{2} \right\}.$$

Beweis: Induktion über m.

Für $m = 1$: klar.

Sei Lemma 17 wahr für m, d.h.,

Aus $B_m \in C^{m-1}$ folgt $B_{m+1} \in C^m$

(weil B_{m+1} Integral von B_m ist).

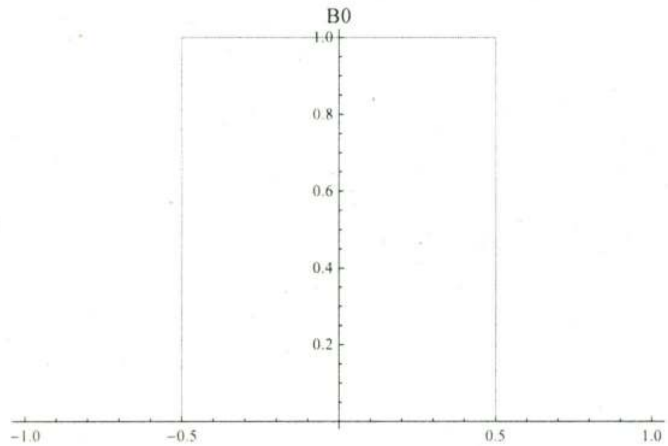
$B_m(x) = 0$ für $|x| \geq \frac{m+1}{2}$ ist auch klar.

$\Rightarrow$ (a) ist ok für $m+1$.

137b

In[94]:= `Plot[BSplineBasis[0, x + 1 / 2], {x, -1, 1}, PlotLabel → B0]`

Out[94]=

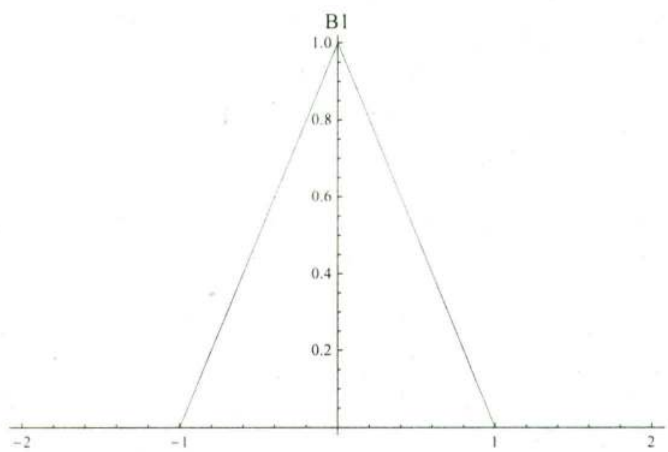


In[95]:= `PiecewiseExpand[BSplineBasis[0, x + 1 / 2]]`

Out[95]= $\begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$

In[96]:= `Plot[BSplineBasis[1, x / 2 + 1 / 2], {x, -2, 2}, PlotLabel → B1]`

Out[96]=

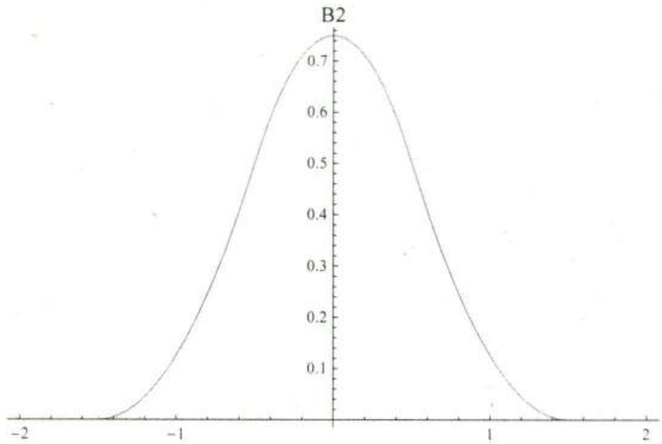


In[97]:= `PiecewiseExpand[BSplineBasis[1, x / 2 + 1 / 2]]`

Out[97]= $\begin{cases} 1 - x & 0 \le x \le 1 \\ 1 + x & -1 \le x < 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$

```
In[98]:= Plot[BSplineBasis[2, x / 3 + 1 / 2], {x, -2, 2}, PlotLabel → B2]
```

Out[98]=



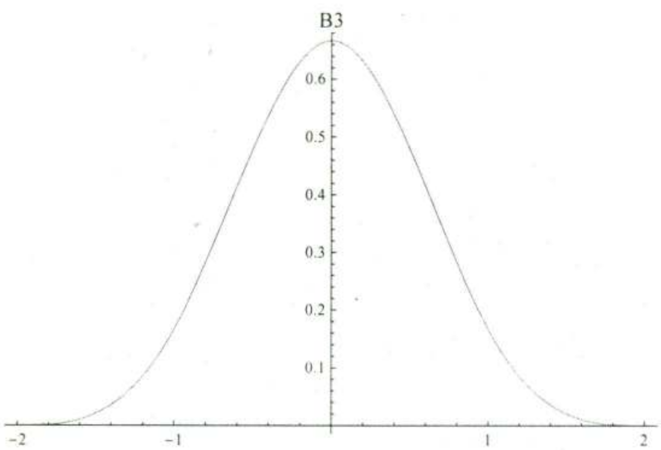

```
In[99]:= PiecewiseExpand[BSplineBasis[2, x / 3 + 1 / 2]]
```

Out[99]=

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\left(3-4x^2\right) & -\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8}\left(9-12x+4x^2\right) & \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2} \\ \frac{1}{8}\left(9+12x+4x^2\right) & -\frac{3}{2} \le x < -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

```
In[103]:= Plot[BSplineBasis[3, x / 4 + 1 / 2], {x, -2, 2}, PlotLabel → B3]
```

Out[103]=




```
In[104]:= PiecewiseExpand[BSplineBasis[3, x / 4 + 1 / 2]]
```

Out[104]=

$$\begin{cases} \frac{1}{6}\left(4-6x^2-3x^3\right) & -1 \le x < 0 \\ \frac{1}{6}\left(8-12x+6x^2-x^3\right) & 1 \le x \le 2 \\ \frac{1}{6}\left(8+12x+6x^2+x^3\right) & -2 \le x < -1 \\ \frac{1}{6}\left(4-6x^2+3x^3\right) & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Dazu, $\frac{d}{dx} B_{m+1}(x) = B_m(x+\frac{1}{2}) - B_m(x-\frac{1}{2})$.

Da B_m ist ein Polynom vom Grad m ausserhalb Δ_m, ist $\frac{d}{dx} B_{m+1}(x)$ ein Polynom vom Grad m ausserhalb Δ_{m+1}. #

Satz 18 (B-Spline Basis).

Die Funktionen $B_{m,k}(x) := B_m\left(\frac{x-(a+h\cdot k)}{h}\right)$, für

$k = -\frac{m-1}{2}, -\frac{m-1}{2}+1, \ldots, \frac{m-1}{2}+n$, bilden eine Basis von $S_m^1(\Delta)$ mit $\Delta = \{x_k = a+k\cdot h \mid k=0,\ldots,n,$ mit $h = \frac{b-a}{n}\}$.

Beweis: Das ist leicht zu zeigen, dass die $B_{m,k}$ sind linear unabhängig und sind insgesamt $m+n$. #

Problem: Interpolation für kubische Splines.

Seien $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ und $y_{0,1}, y_{n,1} \in \mathbb{R}$ gegeben.

Wir suchen $s \in S_3^1(\Delta)$ mit:

$$s(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

und Randbedingungen:

ⓐ Hermite: $s'(a) = y_{0,1}$, $s'(b) = y_{n,1}$.

oder ⓑ Periodisch: $s'(a) = s'(b)$, $s''(a) = s''(b)$

oder ⓒ "Natürlich": $s''(a) = s''(b) = 0$.

Bemerkung: Da $\dim(S_3(\Delta)) = n+3$ und $S(x_k)=y_k,\ k=0,\dots,n$ nur $n+1$ Bedingung sind, um eine eindeutige Lösung zu erhalten brauchen wir die Randbedingungen.

Basis von $S_3(\Delta)$: $$B_3(x) = \frac{1}{6}\begin{cases} (2-|x|)^3 - 4(1-|x|)^3, & |x| \le 1 \\ (2-|x|)^3, & 1 \le |x| \le 2, \\ 0, & |x| \ge 2. \end{cases}$$

$$\Rightarrow B_{3,k}(x) = B_m\left(\frac{x - \overbrace{\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)}^{=:x_k}}{h}\right),\quad k=-1,0,1,\dots,n+1.$$

$$\Rightarrow \exists\, c_k \in \mathbb{R} \text{ s.d. } S(x) = \sum_{k=-1}^{n+1} c_k \cdot B_3\left(\frac{x-x_k}{h}\right),\ x\in[a,b].$$

Lemma 19) Die Koeffizienten $c_{-1}, c_0, \dots, c_{n+1}$ sind Lösungen von

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & & & \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & & & 0 & \\ & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ & & & & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\cdot y_{0,1} \\ y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ h\cdot y_{n,1} \end{pmatrix}$$

Beweis: Es gilt: $\begin{cases} B_3(0) = \frac{2}{3}, & B_3(\pm 1) = \frac{1}{6}, \quad B_3(k) = 0, |k| \geq 2 \\ B_3'(0) = 0, & B_3'(\pm 1) = \mp\frac{1}{2}, \quad B_3'(k) = 0, |k| \geq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Für $l = 0, .., n$: $S(x_l) = \sum_{k=-1}^{n+1} c_k \cdot B_3\left(\frac{x - x_k}{h}\right)$

$$= \frac{2}{3} c_l + \frac{1}{6}(c_{l-1} + c_{l+1}) \stackrel{!}{=} y_l.$$

. Für $l \in \{0, n\}$ $S'(x_l) = \sum_{k=-1}^{n+1} c_k \cdot B_3'\left(\frac{x - x_k}{h}\right) \cdot \frac{1}{h}$

$$= \frac{1}{h} \cdot (c_{l-1} + c_{l+1}) \stackrel{!}{=} y_{l,1}.$$

#

. Was noch fehlt ist die eindeutigkeit der Lösung. Man kann zeigen (aber nicht trivial) dass (für $n \geq 1$) $\det(M) \neq 0 \Rightarrow$ Die c_k sind eindeutig. :-).