20. Juni

5) Interpolation.

5.1) Problem.

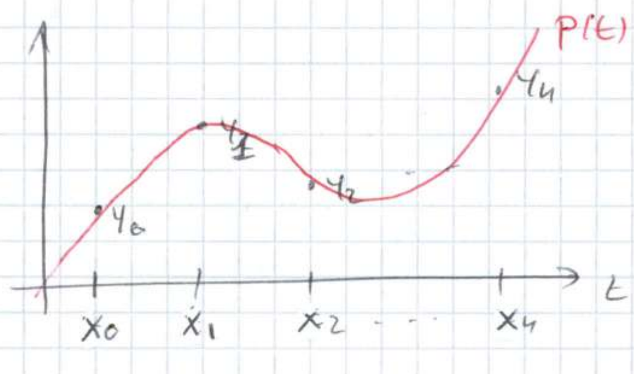
- Sei $\mathbb{P}_n := \{ \text{Polynome } p \mid p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, a_k \in \mathbb{R} \}$, Raum der Polynomen von Grad $\leq n$.
- Die kanonische Basis ist $\{1; x; x^2; \dots; x^n\}$.
- Seien $n+1$ (verschiedene) Knoten gegeben:

$$-\infty < x_0 < x_1 < \dots < x_n < \infty$$

und $n+1$ reelle Zahlen

$$y_0, y_1, \dots, y_n .$$

- Gesucht: Polynom $p \in \mathbb{P}_n$ s.d. $p(x_k) = y_k$, $k = 0, \dots, n$.



- Erste Lösung: Sei $T = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$, die Vandermonde Matrix.

und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = T^{-1} \vec{y}}$

Aber T^{-1} zu finden ist aufwendig. Die Lösung ist eindeutig, weil $\det(T) \neq 0$.

5.2) Lagrange Basis

Def. 1) Die Polynome

$$L_k(x) := \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{n} \frac{x - x_l}{x_k - x_l} \in \mathbb{P}_n, \ k = 0, \ldots, n$$

heissen die Lagrange Polynomen.

Bem.: $\{L_0, L_1, \ldots, L_n\}$ ist eine Basis von $\mathbb{P}_n$ (Easy :-))

Lemma 2) Die Lösung von

$$\{ p(x_k) = y_k, \ k = 0, \ldots, n, \ p \in \mathbb{P}_n \}$$

ist

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot L_k(x).$$

(und ist eindeutig).

Beweis: • $P(x_m) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot L_k(x_m)$ aber

$$L_k(x_m) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{n} \frac{(x_m - x_l)}{(x_k - x_l)} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = m \\ 0 & \text{für } k \neq m \end{cases}$$

$$= \delta_{k,m}$$

$$\Rightarrow P(x_m) = y_m, \ m = 0, \ldots, n. \quad \#$$

Bem.: Die Eindeutigkeit folgt aus:

(1) $\det(T) \neq 0 \Rightarrow$ die Lösung ist Eindeutig bzgl. der Kanonische Basis von $\mathbb{P}_n$,

und (2) $\{L_0, \ldots, L_n\}$ ist eine Basis von $\mathbb{P}_n$.

5.3) Interpolation einer Funktion.

. Sei $f \in C([a,b])$ gegeben.

Gesucht: Polynom $p \in \mathbb{P}_n$ s.d.
$\|f-p\|_\infty \equiv \|f-p\|_{\infty, [a,b]} := \max_{a \le x \le b} |f(x) - p(x)|$ ist minimal.

Lemma 3) Sei $f \in C^{n+1}([a,b])$ und $p \in \mathbb{P}_n$ mit $p(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, \dots, n$
(und $x_k \in [a,b]$).
Dann, $\forall x \in [a,b]$, $\exists \xi \in [a,b]$ mit

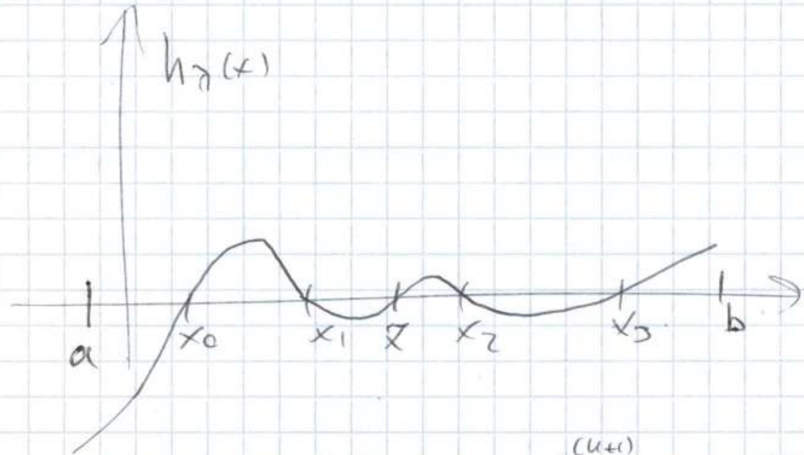
$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(x), \quad (*)$$

$$\omega_n(x) := \prod_{e=0}^{n} (x - x_e).$$

Beweis: . Für $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$ sind beide Seiten von $(*)$ gleich Null.
. Sei nun $\tilde{x} \notin \{x_0, \dots, x_n\}$ und setze für $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$h_\lambda(x) := f(x) - p(x) - \lambda \cdot \omega_{n+1}(x).$$

Man kann λ wählen s.d. $h_\lambda(\tilde{x}) = 0$
$\Rightarrow$ $h_\lambda(x)$ hat $n+2$ Nullstellen, $x_0, x_1, \dots, x_n, \tilde{x}$.
$\Rightarrow h'_\lambda(x)$ hat $\geq n+1$ " in $[a,b]$
und $h''_\lambda(x)$ hat $\geq n$ " in $[a,b]$
⋮
$h_\lambda^{(n+1)}(x)$ hat ≥ 1 Nullstelle in $[a,b]$.
$\Rightarrow$ Setze $\xi \in [a,b]$ s.d. $h_\lambda^{(n+1)}(\xi) = 0$.



Dann, $0 = h_\lambda^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \underbrace{p^{(n+1)}(\xi)}_{=0} - \lambda \cdot \underbrace{\omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi)}_{=(n+1)!}$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \text{ so,}$$

$$0 = h_\lambda(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) - p(\tilde{x}) - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(\tilde{x}) \quad \#$$

Korollar 4) Es folgt:

$$\|f - p\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty \cdot \|\omega_{n+1}\|_\infty}{(n+1)!}$$

. So, wenn $f \in C^{n+1}([a,b])$ haben wir eine Abschätzung.

Frage: Wie sollte man die Knoten wählen, s.d. $\|\omega_n\|_\infty$ minimal ist.

Satz 5) (Tchebisher Knoten)

. $\|\omega_{n+1}\|_\infty$ ist minimal für

$$x_k = \frac{b-a}{2} \cdot y_k + \frac{a+b}{2} \quad \text{wobei}$$

$$y_k = -\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right), \quad k = 0, \dots, n:$$

$(y_0, \dots, y_n)$ heissen Tchebisher Knoten, weil die Nullstellen von $T_{n+1}(y) = \cos((n+1)\operatorname{acos}(y))$.

Dazu: $\|\omega_{n+1}\|_\infty = \frac{1}{2^n}$ und $\omega_{n+1}(x) = \frac{T_{n+1}(x)}{2^n}$.

. **Eigenschaften:** $\boxed{T_n(x) := \cos(n \cdot \operatorname{acos}(x))}$

ⓐ 3 Term Rekursion: $\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{cases}$

Folgt aus $\cos(n \cdot \operatorname{acos} x + \operatorname{acos} x)$ und

$$\cos(\alpha+\beta) = 2 \cdot \cos\alpha \cos\beta - \cos(\alpha-\beta).$$

ⓑ Führende Koeffizient, von T_n ist 2^{n-1}, d.h., $T_n(x) = 2^{n-1} \cdot x^n + O(x^{n-1})$.

Folgt aus ⓐ.

ⓒ Die Nullstellen von T_{n+1} sind

$$\cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)} \cdot \pi\right), \quad k = 0, \dots, n.$$

ⓓ Maximum von $|T_n|$ sind erreicht an

$$t_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n.$$

wo $|T_n| = 1$.

. Beweis von Satz 5) O.E.d.A., nehmen wir $a=-1$, $b=1$.

Zu zeigen: $\forall$ polynome $p \in \mathbb{P}_{n+1}$ (weil $\omega_{n+1} \in \mathbb{P}_{n+1}$) mit führenden Koeffizient 1,

$$\|p\|_\infty \geq \frac{1}{2^n}.$$

. Nehmen wir an, $\exists\, p \in \mathbb{P}_{n+1}$ mit $\|p\|_\infty < \frac{1}{2^n}$.

Dann, $p - \frac{T_{n+1}}{2^n} \in \mathbb{P}_n$.

Setze $\tilde{T}_{n+1} := \frac{T_{n+1}}{2^n}$.

. An den Punkten $t_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, $k = 0, .., n+1$,

$$\begin{cases} \tilde{T}_{n+1}(t_{2k}) = \frac{1}{2^n}, & p(t_{2k}) < \frac{1}{2^n} \\ \tilde{T}_{n+1}(t_{2k+1}) = -\frac{1}{2^n}, & p(t_{2k+1}) > -\frac{1}{2^n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(t_{2k}) - \tilde{T}_{n+1}(t_{2k}) < 0 \\ p(t_{2k+1}) - \tilde{T}_{n+1}(t_{2k}) > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow p - \tilde{T}_{n+1}$ hat $n+1$ Nullstellen in $[-1,1]$
und ist ein Polynom Grad $n \Rightarrow p = \tilde{T}_{n+1}$.

Aber $\|\tilde{T}_{n+1}\|_\infty = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \lightning$.

#

. <u>Instabilität:</u> Betrachten wir

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25 \cdot x^2}.$$

. $f \in C^\infty$ und versuchen wir f in $[-1,1]$ zu interpolieren.

(a) Seien $x_k = -1 + \frac{2}{n} \cdot k$, $k = 0, .., n$, die Knoten, und sei $p_n(x) \in \mathbb{P}_n$ s.d. $p_n(x_k) = f(x_k)$.

Dann (Runge 1901) hat gezeigt, dass

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_n(x)| \xrightarrow{n \to \infty} \infty \ !$$

<u>Lehre:</u> Interpolation auf gleichverteilte Knoten mit n gross ist eine schlechte Idee.

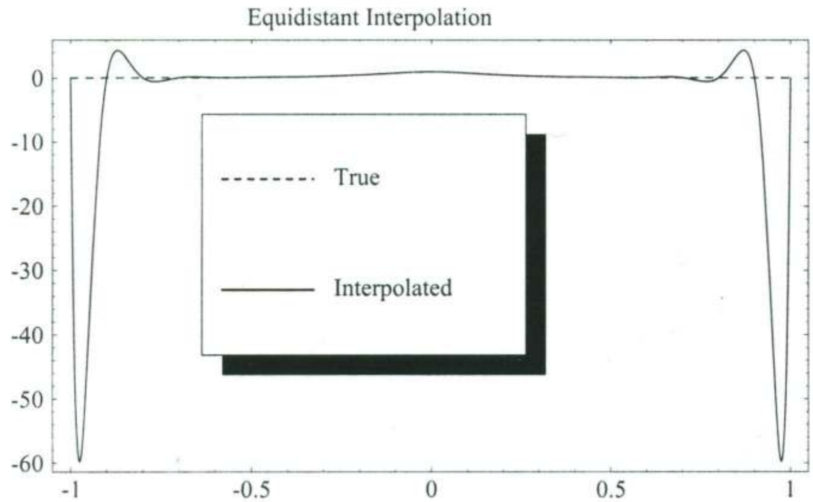
113b

Interpolation

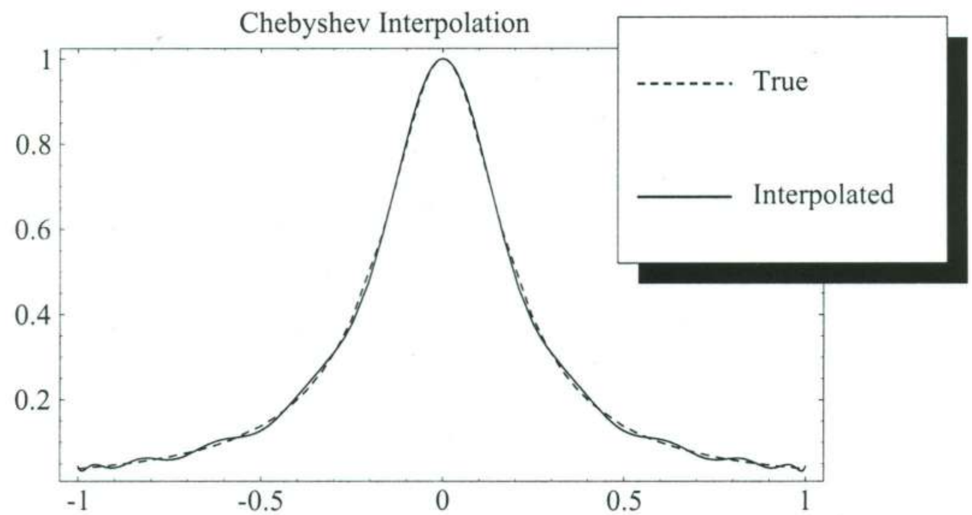
In 1901, Runge demonstrated the pitfalls of equidistant polynomial interpolation using the function

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}.$$

Interpolation with 21 equidistant (regularly spaced) nodes:



Interpolation with 21 Chebyshev nodes:



$\Rightarrow$ Entweder benutzt man Tchebishev Knoten

oder interpoliert man Stückweise

mit Polynome kleinere Ordnung (1, 2, 3).

$\hookrightarrow$ Splines, siehe Integration (Kap. 6).

27 Juni

5.4) Hermite Interpolationsproblem.

- Statt nur die Werte, kann man auch Ableitungen festsetzen.

. Notation: Sei $p^{(j)}$ die j-te Ableitung von p.

. Problem: Seien $k_0, k_1, \dots, k_n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ gegeben und Setze $N = \sum_{i=0}^{n} (k_i + 1)$.

(*) Gesucht: $\begin{cases} p \in \mathbb{P}_{N-1} \text{ s.d.} \\ p^{(j)}(x_i) = y_{i,j}, \ 0 \le i \le n, \ 0 \le j \le k_i \end{cases}$

wobei $y_{i,j}$ und x_i sind gegeben.

Lemma: $\exists!$ Lösung $p \in \mathbb{P}_{N-1}$ für das Problem (*).

Beweis: Sei die Abbildung

$$\Lambda : \mathbb{P}_{N-1} \to \mathbb{R}^N$$
$$p \longmapsto \left(p^{(j)}(x_i)\right)_{0 \le i \le n, \, 0 \le j \le k_i}$$

Zeigen wir, dass Λ ist bijektiv.

(a) Injektivität: Falls Λ nicht injektiv

$\Rightarrow \exists \, \tilde{p} \in \mathbb{P}_{N-1} \setminus \{0\}$ s.d. $\tilde{p}^{(j)}(x_i) = 0, \ \forall \, 0 \le i \le n, \ 0 \le j \le k_i$.

$\Rightarrow \tilde{p}$ hat $(k_i + 1)$-fache Nullstelle bei x_i

$\Rightarrow \tilde{p}$ hat $N = \sum_{i=1}^{n} (k_i + 1)$ Nullstellen.

- Aber $\tilde{p}$ hat Grad $\leq N-1 \Rightarrow \tilde{p} = 0$ ↯.

(b) Bijektivität: $\dim(\mathbb{P}_{N-1}) = N = \dim(\mathbb{R}^N)$, N endlich,

$\Rightarrow$ auch bijektiv.

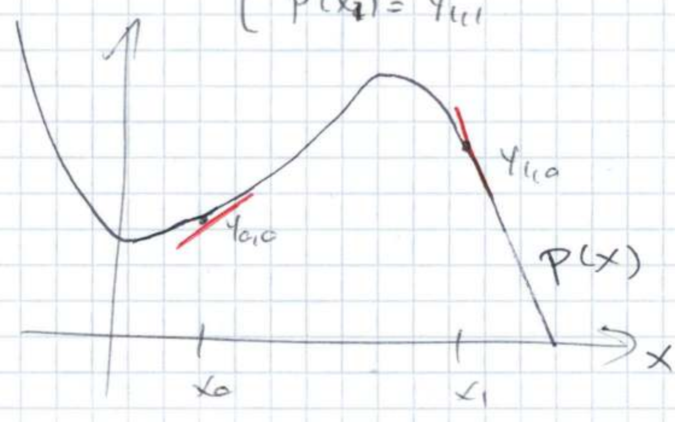
#

- Beispiel: Sei $f \in C^1$, $x_0 < x_1$ gegeben.

Sei $y_{0,0}, y_{0,1}, y_{1,0}, y_{1,1}$ auch gegeben.

$\Rightarrow$ Gesucht: $p \in \mathbb{P}_3$ mit

$$\begin{cases} p(x_0) = y_{0,0} \\ p'(x_0) = y_{0,1} \\ p(x_1) = y_{1,0} \\ p'(x_1) = y_{1,1} \end{cases}$$



- Hermite Basis: - $\varphi_0 \in \mathbb{P}_3$ s.d.

$\varphi_0(x_0) = 1$, $\varphi_0(x_1) = \varphi_0'(x_0) = \varphi_0'(x_1) = 0$

$\Rightarrow \varphi_0(x) = (x - x_1)^2(ax+b) \Rightarrow a, b = \ldots$

- $$\varphi_0(x) = \frac{(x-x_1)^2(2x + x_1 - 3x_0)}{(x_1 - x_0)^3}.$$

- $\psi_0 \in \mathbb{P}_3$ s.d. $\psi_0(x_0) = 0 = \psi_0(x_1) = \psi_0'(x_1)$,

$\psi_0'(x_0) = 1$

$$\Rightarrow \psi_0(x) = (x - x_1)^2(x - x_0) \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{x_0}{(x_1 - x_0)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \psi_0(x) = \frac{x_0}{(x_1-x_0)^2}\cdot(x-x_1)^2(x-x_0).$$

. Man konstruiert $\varphi_1(x)$ und $\psi_1(x)$ analog.

$\Rightarrow \{\varphi_0(x), \varphi_1(x); \psi_0(x), \psi_1(x)\}$ ist eine Basis von $\mathbb{P}_3$.

$\Rightarrow$ Lösung: $\boxed{P(x) = y_{0,0}\cdot\varphi_0(x) + y_{0,1}\cdot\psi_0(x) + y_{1,0}\cdot\varphi_1(x) + y_{1,1}\cdot\psi_1(x).}$

5.5) Neville-Schema.

. Für praktische Berechnung sind Lagrange Polynome nicht immer geeignet (Instabilität).

. Man kann die Lösung aber rekursiv berechnen.

Satz 6) . Sei $p_{i,k} \in \mathbb{P}_{k-i}$ der Polynom die durch (x_{i+l}, y_{i+l}), $l = 0, .., k-i$ interpoliert.

Es gilt:

(a) $p_{i,i}(x) = y_i$, $i = 0, .., n$,

(b) $p_{i,k}(x) = \dfrac{(x-x_i)p_{i+1,k}(x) - (x-x_k)p_{i,k-1}(x)}{x_k - x_i}$

$0 \le i < k \le n$.

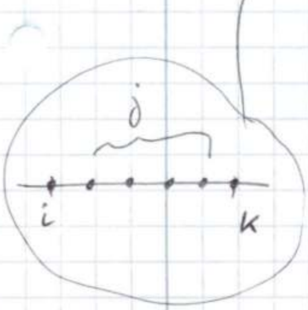
. Damit erhält man $p_{0,n}$, das gesuchte Polynom.

Beweis: (a) Per Definition.

(b) Sei $q(x) := \dfrac{(x-x_i)p_{i+1,k}(x) - (x-x_k)p_{i,k-1}(x)}{x_k - x_i}$.

$\Rightarrow$. $q \in \mathbb{P}_{k-i}$ ist klar (weil $p_{i+1,k}(x), p_{i,k-1}(x) \in \mathbb{P}_{k-i-1}$).

Induktion: Sei (b) ok für $k-i-1$.



- $q(x_j) = y_j$ für $j = i+1, \dots, k-1$

  weil $P_{i+1,k}(x_j) = P_{i,k-1}(x_j) = y_j$ für $j = i+1, \dots, k-1$!

- letztlich, $q(x_i) = P_{i,k-1}(x_i) = y_i$

  und $q(x_k) = P_{i+1,k}(x_k) = y_k$

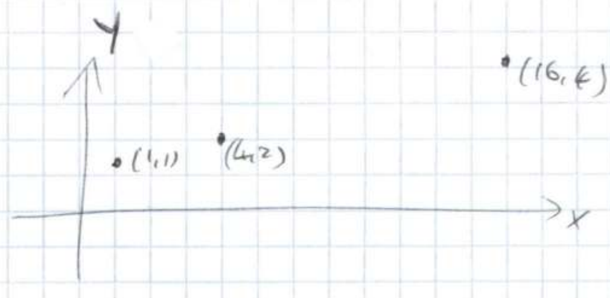
- Wegen Eindeutigkeit der Interpolation folgt $P_{i,k} = q$. #

Neville-Schema.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
P_{0,0}(x)=y_0 \arrow[dr] & & & & \\
& P_{0,1}(x) \arrow[dr] & & & \\
P_{1,1}(x)=y_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & P_{0,2}(x) \arrow[dr] & & \\
& P_{1,2}(x) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots P_{0,n-1}(x) \arrow[dr] & \\
P_{2,2}(x)=y_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \vdots & & P_{0,n}(x) \\
\vdots & \vdots & P_{n-2,n}(x) \arrow[r] & P_{1,n}(x) \arrow[ur] & \\
& P_{n-1,n}(x) \arrow[ur] & & & \\
P_{n,n}(x)=y_n \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

Bsp.:

i	0	1	2
x_i	1	4	16
y_i	1	2	4



Für $x=2$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
y_0 = 1 \arrow[dr] & & \\
& P_{0,1}(2) = \frac{4}{3} \arrow[dr] & \\
y_1 = 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & P_{0,2}(2) = \frac{61}{45}. \\
& P_{1,2}(2) = \frac{5}{3} \arrow[ur] & \\
y_2 = 4 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

5.6) Newton Basis

. Die Newton Basis für die Knoten $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ist

$$\left(1,\ x-x_0,\ (x-x_0)(x-x_1),\ \dots,\ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \right)$$

und
$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).$$

Bem: Numerisch kann man $p(x)$ auswerten mittels Horner-Schema:
$$p(x) = a_0 + (x-x_0)\Big(a_1 + (x-x_1)\big(a_2 + \dots + a_{n-1} + (x-x_{n-1})a_n\big)\Big).$$

. Wie erhält man die Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$?

. Zu lösen: $(n=2)$

$$\begin{cases} p(x_0) = y_0 = a_0 \\ p(x_1) = y_1 = a_0 + a_1(x_1-x_0) \\ p(x_2) = y_2 = a_0 + a_1(x_2-x_1) + a_2(x_2-x_1)(x_2-x_0) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_1-x_0 & 0 \\ 1 & x_2-x_0 & (x_2-x_1)(x_2-x_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Satz 7) Das eindeutige Polynom $p \in \mathbb{P}_n$ mit $p(x_i) = y_i$, $0 \le i \le n$, hat die Newton-Darstellung

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + \dots + f[x_0,\dots,x_n]\cdot(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}).$$

wobei
$$\begin{cases} f[x_i] := y_i \\ f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_k] := \dfrac{f[x_{i+1},\dots,x_k] - f[x_i,\dots,x_{k-1}]}{x_k - x_i}, \end{cases}$$
$0 \le i < k \le n$.

Beweis: Per Induktion nach n.

Sei $p_{i,n} \in \mathbb{P}_{n-i}$ s.d. interpoliert den Knoten $x_i, \dots, x_n$.

- Für $n=0$, $p(x) \equiv y_0 = f[x_0]$. ✓
- Sei die Formel ok bis $n-1$.

Führenden Koeffizient:

$$\Rightarrow p_{0,n}(x) \overset{\text{Satz 6)}}{=} \frac{(x-x_0)\,p_{1,n}(x) - (x-x_n)\,p_{0,n-1}(x)}{x_n - x_0}$$

$$\overset{\text{Ind.}}{=} \frac{f[x_1,\dots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}{x_n-x_0}$$

$$- \frac{f[x_0,\dots,x_{n-1}](x-x_0)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_n)}{x_n-x_0}$$

$$+ \text{Poly} \in \mathbb{P}_{n-1}$$

$$= f[x_0,\dots,x_n]x^n + \text{Poly} \in \mathbb{P}_{n-1}$$

$$= f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}) + \text{Poly} \in \mathbb{P}_{n-1}$$ ✓

Polynom $q \in \mathbb{P}_n$: Es gilt: $y_i = p(x_i) = q(x_i)$, $i = 0, \dots, n-1$.

wegen Eindeutigkeit der Interpolation und Induktionsvoraussetzung:

$$q(x) = p_{0,n-1}(x) = f[x_0] + \cdots + f[x_0,\dots,x_{n-1}]\cdot(x-x_0)\cdots(x-x_{n-2}).$$

\#