4) Iterationsverfahren

4.1) Banach Fixpoint

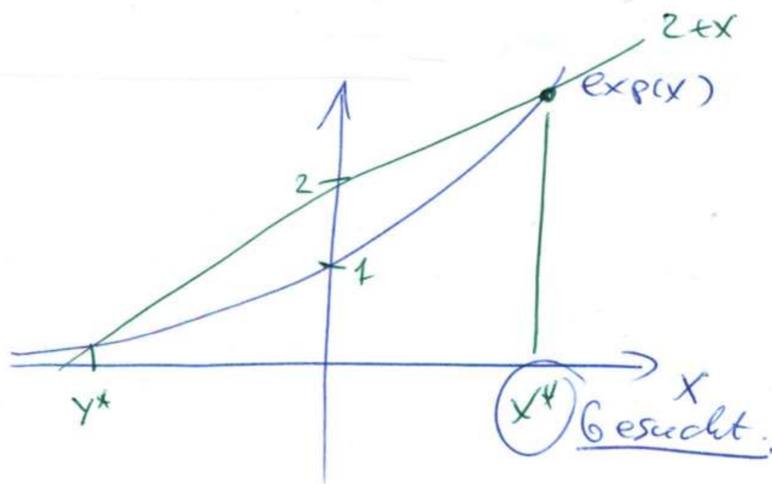
Beispiel 1: In ÜB2, Übung 3, Alma I haben wir 2 Iterative Verfahren zur Berechnung von $\sqrt{a}$, $a \in \mathbb{R}_+$:

(a) $x_0 > 0$, $x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{a}$

(b) $y_0 > 0$, $y_{n+1} := \frac{y_n}{2}\left(3 - a\cdot y_n^2\right)$, $x_n := \frac{1}{y_n} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{a}$

falls $y_0 \in (0, \sqrt{\frac{3}{a}})$.

Beispiel 2: (a) Ziel ist die Berechnung von $x^* > 0$ Lösung von $\exp(x) = 2 + x$.



1. Versuch: Sei $\phi(x) := \exp(x) - 2$.

und setze $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$.

Dann: · für $x^{(0)} > x^*$: $x^{(n)} \longrightarrow \infty$

· für $x^{(0)} < x^*$: $x^{(n)} \longrightarrow y^* \cong -1{,}844\ldots$

$\Rightarrow$ Nicht gut wenn x^* gesucht.

$\left(\begin{array}{l} 2 \text{ stabiler Fixpunkte} : \infty, y^*, \\ 1 \text{ instabiler } \text{"} \quad : x^* \end{array}\right)$

2. Versuch: $\exp(x) = 2+x \iff x = \ln(2+x)$

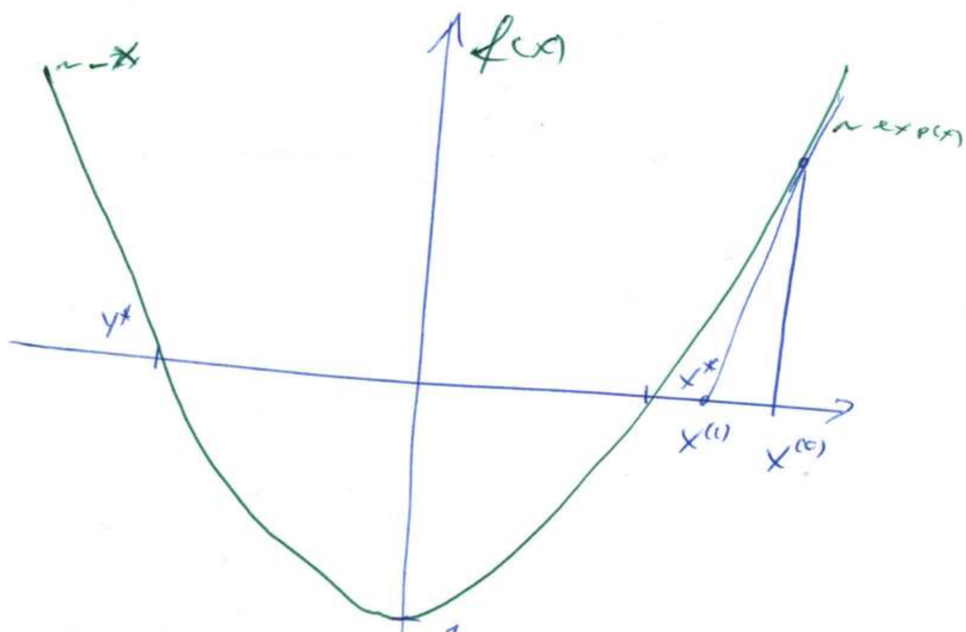
$\Rightarrow$ Sei $\tilde{\Phi}(x) := \ln(2+x)$ und setze $x^{(n+1)} = \tilde{\Phi}(x^{(n)})$.

Dann, für $x^{(0)} > -2$, $x^{(0)} \neq y^*$, $x^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} x^* \cong 1{,}146156\ldots$ (insbesonderes $\forall x^{(0)} \geq 0$)

$\begin{cases} 1 \text{ stabiler Fixpunkt: } x^* \\ 2 \text{ instabiler Fixpunkte: } y^*, \infty \end{cases}$

3. Versuch: Newton-Verfahren

Sei $f(x) := \exp(x) - (2+x)$.



Idee: Annäherung durch lineare Approximation von f.

$$f(x) \cong f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})\cdot(x-\tilde{x}) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\tilde{x})} := \phi(x)$$

Insbesonderes, $f(x^*) = 0 \iff \phi(x^*) = x^*$.

Ansatz: $x^{(n+1)} := \phi(x^{(n)})$.

Dann, für $x^{(0)} > 0$, $x^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} x^*$

und für $x^{(0)} < 0$, $x^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} y^*$.

Frage: Gibt es allgemeiner Aussagen?

Satz 1 (Banachscher Fixpunktsatz)

- Sei (X,d) ein metrischer Raum,
  $\phi: X \to X$ eine Fixpunktiteration, d.h., $x^{(n+1)} := \phi(x^{(n)})$, $n \geq 0$.
- Falls (X,d) ist vollständig und $\exists\, L \in (0,1)$ mit

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq L \cdot d(x,y), \quad \forall x,y \in X \quad (*)$$

(d.h., ϕ ist eine Kontraktion), dann

(a) ϕ hat genau einen Fixpunkt $x^* \in X$

(b) $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} x^*$, $\forall$ Startwert $x^{(0)} \in X$, mit:

(1) $d(x^{(n)}, x^*) \leq L \cdot d(x^{(n-1)}, x^*)$ Monotonie

(2) $d(x^{(n)}, x^*) \leq \dfrac{L^n}{1-L} \cdot d(x^{(1)}, x^{(0)})$ A priori-Schranke

(3) $d(x^{(n)}, x^*) \leq \dfrac{L}{1-L} \cdot d(x^{(n)}, x^{(n-1)})$ A posteriori-Schranke

Bem.: Eine Kontraktion ist stetig!
($\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ s.d. $d(\phi(x), \phi(y)) \leq \varepsilon$, $\forall d(x,y) \leq \delta$;
Weil: $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ ist genug).

Beweis: (a) Aus $(*)$ folgt sofort, dass

$$d(x^{(n+1)}, x^{(n)}) = d(\phi(x^{(n)}), \phi(x^{(n-1)}))$$
$$\leq L^n \cdot d(x^{(1)}, x^{(0)}), \ \forall n \geq 0.$$

Für $m > n \geq 0$: $\Rightarrow$ $d(x^{(m)}, x^{(n)}) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x^{(k+1)}, x^{(k)}) \leq \sum_{k=n}^{m-1} L^k d(x^{(1)}, x^{(0)})$

$$\leq \frac{L^n}{1-L} d(x^{(1)}, x^{(0)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

falls $|L| < 1$

$\Rightarrow x^{(n)}$ ist eine Cauchy-Folge.

Da (X,d) Vollständig ist,

$$\exists \; x^* := \lim_{n\to\infty} x^{(n)}. \quad \text{(a priori hängt von } x^{(0)} \text{ ab).}$$

Da aber $\phi(x^{(n)}) = x^{(n+1)}$, folgt auch dass

$$\lim_{n\to\infty} \phi(x^{(n)}) = x^*,$$

d.h., x^* ist ein Fixpunkt von ϕ.

· Eindeutigkeit: Seien $x^* \neq y^*$ Fixpunkte von ϕ.

$$\Rightarrow d(x^*, y^*) = d(\phi(x^*), \phi(y^*)) \leq L \cdot d(x^*, y^*)$$

$$\underset{L<1}{\Rightarrow} d(x^*, y^*) = 0 \Leftrightarrow \underline{x^* = y^*}.$$

b) Eigenschaften: (1) $d(x^{(n)}, x^*) = d(\phi(x^{(n-1)}), \phi(x^*)) \overset{\text{def}}{\leq} L \cdot d(x^{(n-1)}, x^*)$.

(2) $$d(x^{(n)}, x^*) = \lim_{m\to\infty} d(x^{(m)}, x^{(n)}) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x^{(1)}, x^{(0)}).$$

(3) $$d(x^{(m)}, x^{(n)}) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x^{(k+1)}, x^{(k)})$$

für $m \geq n \geq 0$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{m-n} L^{\ell} \cdot d(x^{(n)}, x^{(n-1)})$$

$$\leq \frac{L}{1-L} d(x^{(n)}, x^{(n-1)}).$$

#

Notation: $D\phi(x)$ bezeichnet die Jacobi-Matrix,

d.h. $$D\phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Korollar 2: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und Konvex, $\phi \in C^1(A)$ und für eine Matrix $M \in M_n(\mathbb{R})$, $\boxed{\text{mit } \phi(A) \subseteq A}$ $\|M\|_2 := \sup_{\|v\|_2 = 1} \|Mv\|_2$.

Falls $L := \sup_{x \in A} \|D\phi(x)\|_2 < 1$, dann hat ϕ genau einen Fixpunkt x^* und $x^{(n)}$ konvergiert gegen x^*.

Bem: Formel an Seite 99: $\|A\varphi\|_2^2 \le \left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^2\right)^{1/2} \|\varphi\|_2$.

Beweis: Zu zeigen: ϕ ist eine Kontraktion. Dann folgt aus Satz 1.

Seien $x, y \in A \Rightarrow \forall\, t \in [0,1]$, $\gamma(t) := (1-t)x + ty \in A$. (Konvex).

$$\Rightarrow \|\phi(y) - \phi(x)\|_2 = \|\phi(\gamma(1)) - \phi(\gamma(0))\|_2$$
$$= \left\| \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} \phi(\gamma(t))\right) dt \right\|_2$$
$$\le \int_0^1 \|D\phi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\|_2 \, dt$$
$$\overset{(?)\,C.S.}{\le} \int_0^1 \underbrace{\|D\phi(\gamma(t))\|_2}_{\le L} \cdot \|\gamma'(t)\|_2 \, dt$$
$$\le L \cdot \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_2 = L \cdot \|y - x\|_2.$$

#

Korollar 3: (Lokale Konvergenz)

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\phi \in C^1(B)$ mit Fixpunkt x^*

und $\|D\phi(x^*)\|_2 < 1$.

Dann $\exists\, \varepsilon > 0$ s.d.

$$\|D\phi(x)\|_2 \leq L < 1 \quad , \forall \|x - x^*\|_2 \leq \varepsilon.$$

Es folgt: $x^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} x^*$, $\forall\ \|x^{(0)} - x^*\|_2 \leq \varepsilon$.

Beispiele: (1) $\phi(x) = \exp(x) - 2$

$\Rightarrow \phi'(x) = \exp(x) \in (0,1)$ für $x < 0$

$\Rightarrow \phi$ ist eine Kontraktion auf $\mathbb{R}_-$ und konvergiert gegen den Fixpunkt in $\mathbb{R}_-$ (y^*)

Genauer:
Sei $\varepsilon \in (0,1]$, $\forall x \in (-\infty, -\varepsilon]$, $|\phi'(x)| < 1$ und $\phi(x) \leq -\varepsilon$.
$\Rightarrow$ Aus Korollar 2, für $x^0 \in (-\infty, -\varepsilon]$, $\phi^n(x^0) \xrightarrow[n\to\infty]{} y^*$.

(2) $\tilde{\phi}(x) = \ln(2+x)$.

$\Rightarrow \tilde{\phi}'(x) = \dfrac{1}{2+x} \in (0,1)$ für $x > -1$

$\Rightarrow \tilde{\phi}$ ist eine Kontraktion auf $(-1, \infty)$ und konvergiert gegen den Fixpunkt x^*.

Sei $x \in \mathbb{R}_+$.
$\Rightarrow |\tilde{\phi}'(x)| < 1$ und $\tilde{\phi}(x) \in \mathbb{R}_+$
Aus Korollar 2, folgt $\phi^n(x^0) \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$ $\forall x^0 \in \mathbb{R}_+$

(3) Sei $c \in \mathbb{R}$ gegeben.

Zu Lösen: $\begin{cases} x_1 = c\cdot\cos(x_1) - c\cdot\sin(x_2) \\ x_2 = c\cdot\cos(x_1) - 2\cdot c\cdot\sin(x_2). \end{cases}$

$$\Rightarrow \ := \phi(X = (x_1, x_2)) = c\cdot\begin{pmatrix} \cos(x_1) - \sin(x_2) \\ \cos(x_1) - 2\cdot\sin(x_2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D\phi(x) = -c\cdot\begin{pmatrix} \sin(x_1) & \cos(x_2) \\ \sin(x_1) & 2\cdot\cos(x_2) \end{pmatrix}$$

. Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dann für $\|\varphi\|_2 = 1$,

$$\|A\varphi\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\varphi_j\Big)^2$$

$$\overset{C.S.}{\leq} \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2\Big)\cdot\underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^2\Big)}_{\overset{=}{def}\|\varphi\|_2^2 = 1}$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^2.$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 \leq \Big(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^2\Big)^{1/2}.$$

. In unseren Fall, $\|D\phi(x)\|_2^2 \leq c^2 \cdot (2\sin^2(x_1) + 5\cos^2(x_2))$
$\leq 7c^2$.

$\Rightarrow$ Für $|c| < \frac{1}{\sqrt{7}}$, mit $L = \sqrt{7}|c|$, konvergiert den Fixpunktverfahren.

<u>Bsp.:</u> $c = 0{,}1$, $x^{(0)} = (0,0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^{(n)} \approx \begin{pmatrix} 0{,}0913\ldots \\ 0{,}0830\ldots \end{pmatrix}$

(Nicht gemacht) (4) Gleichgewichte MK

. Sei P die Übergangsmatrix einer MK auf S mit $|S| < \infty$. $\Rightarrow$ Ein Gleichgewicht μ von P ist ein Fixpunkt von

$$\phi: WV(S) \to WV(S)$$
$$\phi(\mu) := \mu \cdot P.$$

Da $WV(S)$ ein Simplex in $[0,1]^{|S|}$ ist $\Rightarrow$ Kompakt.

<u>Falls</u> $\exists\, L \in (0,1)$ mit

(*) $$d_{TV}(\mu P, \nu P) \leq L \cdot d_{TV}(\mu, \nu), \quad \forall \mu,\nu \in WV(S)$$

$\Rightarrow \exists!$ Gleichgewicht μ von P und

$$d_{TV}(\nu P^n, \mu) \leq \frac{L^n}{1-L}\, d_{TV}(\nu, \mu) \leq \frac{L^n}{1-L}.$$

<u>I.A.</u> gilt aber (*) nur mit $L = 1$.

8. Juni

4.2) Newton-Verfahren.

. Problem: Gegeben: $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen,
$f: D \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar.

Gesucht: $x^* \in D$ mit
$f(x^*) = 0$.

. Idee: Wie in $d=1$, man linearisiert und erhält man eine Folge von Approximationen.
(Man benutzt Infos über die "lokale Struktur").

. Gegeben $x^{(n)}$, in der nähe von $x^{(n)}$,

$$f(x) \cong f(x^{(n)}) + (Df(x^{(n)}))\cdot(x - x^{(n)})$$

$\Rightarrow$ Lösung von $f(x^{(n)}) + (Df(x^{(n)}))\cdot(x - x^{(n)}) = 0$ gibt die nächste Approximation: $x^{(n+1)}$.

$$\left(\text{d.h., } x^{(n+1)} = x^{(n)} - (Df(x^{(n)}))^{-1}\cdot f(x^{(n)})\right).$$

$\Rightarrow$ Algorithmus:

Input: . $f: D \to \mathbb{R}^d$, $x^{(0)} \in D$, Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$.

. Output: $x \in D$ mit $|f(x) - f(x^*)| = |f(x)| \leq \varepsilon$.

```
. n := 0;
repeat
      x^(n+1) := x^(n) - (D f(x^(n)))^(-1) · f(x^(n));
      n := n+1;
until ||f(x^(n))|| ≤ ε.
```

(oder: $\|x^{(n)} - x^{(n+1)}\| \leq \varepsilon$. Aber $\not\Rightarrow$ Konvergenz).

Bem.: Falls $x^{(n)} \notin D$, dann kann man den Versuch abbrechen und mit einen anderen $x^{(0)}$ versuchen.

Beispiel: $f(x) = x^n - a \quad , a > 0, \; n \geq 2.$

$\Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

$$\Rightarrow \boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)})^n - a}{n (x^{(k)})^{n-1}} = \frac{n-1}{n} x^{(k)} + \frac{a}{n} (x^{(k)})^{1-n}}.$$

ist ein Iterationsverfahren zur Berechnung der n-ten Wurzel von a.

Frage: Wie schnell konvergiert ein Iterationsverfahren?

Definition 4) Sei $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ eine Folge mit $\varepsilon_k \geq 0$ und $\lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$.

Die Folge ε konvergiert

(a) linear, falls $\exists\, L \in (0,1)$ und ein $n \geq 1$ s.d.

$$\varepsilon_{k+1} \leq L \cdot \varepsilon_k \quad , \forall\, k \geq n.$$

(b) superlinear, falls $\exists$ Nullfolge L_k s.d.

$$\varepsilon_{k+1} \leq L_k \cdot \varepsilon_k \quad \forall\, k \geq 1$$

(c) superlinear mit Ordnung $p > 1$, falls $\exists\, C \in (0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ s.d.

$$\varepsilon_{k+1} \leq C \cdot \varepsilon_k^p \quad \forall\, k \geq n.$$

Beispiel: ⓐ $\varepsilon_k = e^{-\alpha \cdot k}, \alpha > 0.$

Da $\varepsilon_{k+1} = e^{-\alpha} \cdot \varepsilon_k \Rightarrow \varepsilon$ konvergiert linear.

ⓑ $\varepsilon_k = e^{-k^2}.$

Da $\varepsilon_{k+1} = e^{-(k+1)^2} = e^{-2k-1} \cdot \varepsilon_k$

$\Rightarrow \varepsilon$ konvergiert superlinear. (aber nicht mit Ordnung $p > 1$).

ⓒ $\varepsilon_k = e^{-p^k}.$

Da $\varepsilon_{k+1} = e^{-p \cdot p^k} = (\varepsilon_k)^p$

$\Rightarrow \varepsilon$ konvergiert superlinear mit Ordnung p.

. Bem.: Im folgende benutzen wir die Matrixnorm

$$\|M\|_2 := \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^d \\ \|v\|_2 = 1}} \|Mv\|_2$$

mit $\|v\|_2^2 := \sum_{k=1}^{d} v_k^2$, aber man kann jede andere "verträgliche" Matrixnorm ($\|\cdot\|_M$) benutzen: $\|M \cdot v\|_V \le \|M\|_M \cdot \|v\|_V$.

. Newton-Verfahren konvergiert (lokal) superlinear mit Ordnung $p = 2$.

Satz 5) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$, $f: D \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar, $x^* \in D$ eine Nullpunkt von f (dh. $f(x^*) = 0$).

. Falls ⓐ $\exists$ Umgebung $U = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - x^*\|_2 < \varepsilon\}$ von x^* mit $U \subseteq D$

ⓑ $\exists L \in (0, \infty)$ s.d. $(Df(x))^{-1}$ existiert $\forall x \in U$, und

$$\|(Df(x))^{-1}(Df(y) - Df(x))\|_2 \le L \cdot \|x - y\|_2 \quad \forall x, y \in U,$$

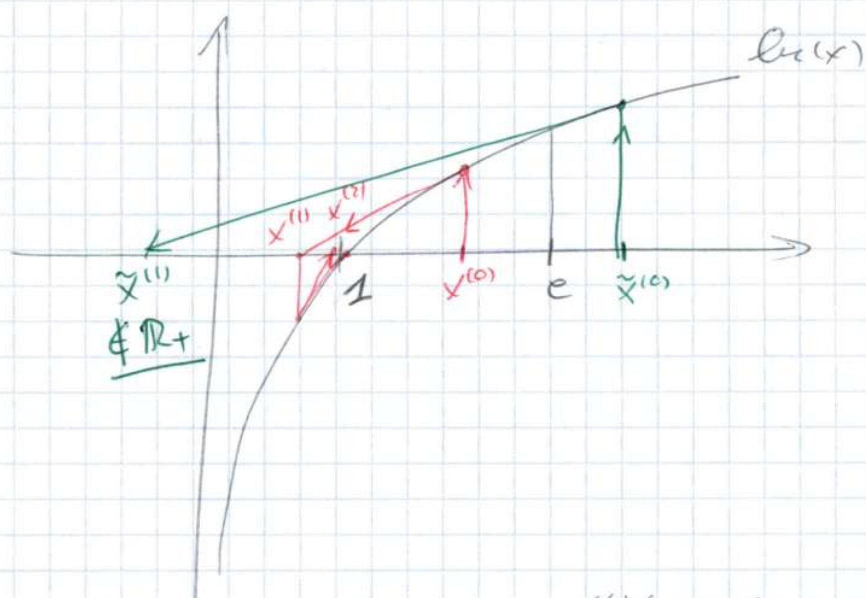
dann
$$\|x^{(k+1)} - x^*\|_2 \leq \frac{L}{2} \|x^{(k)} - x^*\|_2^2, \quad \forall k \geq 0 \text{ mit } x^{(k)} \in U.$$

Es folgt, dass $\forall x^{(0)}$ mit $\|x^{(0)} - x^*\|_2 < \min(\varepsilon, \frac{2}{L})$, $\|x^{(k)} - x^*\|_2$ konvergiert <u>Quadratisch</u> (d.h. superlinear mit Ordnung $p=2$) gegen 0.

. <u>Bem:</u> Es bedeutet nicht, dass den Newton-Verfahren immer konvergiert (oder immer Quadratisch), nur <u>lokal</u>.

. <u>Beispiel:</u> $d=1$, $f(x) = \ln(x)$, $D = \mathbb{R}_+$.
Dann $x^* = 1$ ist die Lösung.

. Mit Newton-Verfahren:



$$. \, x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\ln(x^{(k)})}{(x^{(k)})^{-1}} = x^{(k)}(1 - \ln(x^{(k)})) > 0$$
$$\iff x^{(k)} \in (0, e).$$

<u>Sei $U \in (0,e) \Rightarrow \varepsilon := 9/10$.</u>

. <u>Bedingung ⓑ:</u> $\left|\frac{x-y}{y}\right| \leq L \cdot |y-x|$ mit $L = 10 \; \forall x,y \in D$.

$\Rightarrow$ Für $|x^{(0)} - 1| \leq \varepsilon$, <u>Quadratische Konvergenz</u>.

Resumé:

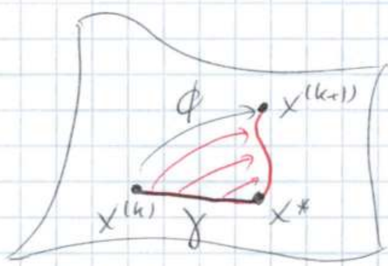
- Für $x^{(0)} \geq e$: Keine Konvergenz
- Für $x^{(0)} \in (0, e)$: Konvergenz gegen $x^* = 0$.
- Für $|x^{(0)} - 1| \leq \frac{9}{10}$: quadratische Konvergenz. (mindestens)

Beweis: Sei $k \geq 0$ und $x^{(k)} \in U$.

Dann $(Df(x^{(k)}))^{-1}$ existiert und

$$x^{(k+1)} - x^* = x^{(k)} - (Df(x^{(k)}))^{-1} \cdot f(x^{(k)}) - x^*$$

$$= (x^{(k)} - x^*) - (Df(x^{(k)}))^{-1} \left(f(x^{(k)}) - \underbrace{f(x^*)}_{=0} \right)$$



Sei $\gamma(t) := (1-t)x^{(k)} + t \cdot x^* \in U$, $0 \leq t \leq 1$.

Dann, $\boxed{f(x^{(k)}) - f(x^*)} = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \cdot dt$$

$$= \int_0^1 Df(\gamma(t)) \cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{= x^* - x^{(k)}} dt$$

$$= \int_0^1 Df(\gamma(t))(x^* - x^{(k)}) dt$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} - x^* = Df(x^{(k)})^{-1} \cdot \Big[\big(Df(x^{(k)})\big) \cdot (x^{(k)} - x^*) - \int_0^1 Df(\gamma(t)) \cdot (x^{(k)} - x^*)\, dt \Big]$$

$$= \int_0^1 \big(Df(x^{(k)})\big)^{-1} \cdot \big(Df(x^{(k)}) - Df(\gamma(t))\big) \cdot (x^{(k)} - x^*)\, dt$$

$$\Rightarrow \|x^{(k+1)} - x^*\|_2 \le \int_0^1 \overbrace{\big\|\big(Df(x^{(k)})\big)^{-1} \cdot \big(Df(x^{(k)}) - Df(\gamma(t))\big)\big\|_2}^{\le L \|x^{(k)} - \gamma(t)\|_2} \cdot \|x^{(k)} - x^*\|_2\, dt$$

$$\le L \cdot \|x^{(k)} - x^*\|_2^2 \cdot \int_0^1 t\, dt = \frac{L}{2} \|x^{(k)} - x^*\|_2^2.$$

$$\|x^{(k)} - \gamma(t)\|_2 = t \cdot \|x^{(k)} - x^*\|_2$$

<u>Letzlich</u>: Sei $x^{(k)} \in U$ mit $\varepsilon_k := \|x^{(k)} - x^*\|_2 \le \delta$.

Dann,

$$\varepsilon_{k+1} = \|x^{(k+1)} - x^*\|_2 \le \frac{L}{2} \varepsilon_k^2 \le \frac{L}{2} \delta \cdot \varepsilon_k.$$

Für $\delta \in (0, \frac{2}{L})$ gilt $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$, d.h.,

$\boxed{\varepsilon_k \text{ ist eine Nullfolge.}}$

Wegen $\varepsilon_k \le \frac{L}{2} \varepsilon_k^2$ ist die Konvergenz superlinear mit Ordnung 2.

(Die Bedingung $\|x^{(0)} - x^*\|_2 \le \min(\varepsilon, \frac{2}{L})$

ist wie $\delta \in (0, \frac{2}{L})$ zusammen mit $x^{(0)} \in U$.

#

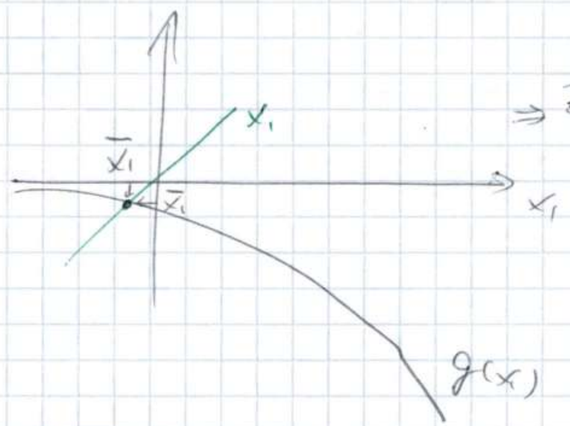
Beispiel: Zu Lösen:

$$(P)\begin{cases} 2x_1 - x_2 + e^{x_1} = 0 \\ 2x_2 - x_1 + e^{x_2} = 0. \end{cases}$$

a) Eindeutigkeit der Lösung: Notation: Lösung ist $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

. Aus (P1) $\Rightarrow$ $x_2 = 2x_1 + e^{x_1}$

. In (P2) $\Rightarrow$ $x_1 = -\frac{1}{3} e^{x_1}\left(2 + e^{x_1 + e^{x_1}}\right) := g(x_1)$



$\Rightarrow \exists!\ \bar{x}_1$ Lösung von $g(\bar{x}_1) = \bar{x}_1$.

. Symmetrie $1 \leftrightarrow 2$ $\Rightarrow$ $\exists!\ \bar{x}_2\ (<0)$ auch.

b) Sei $\vec{f}(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + e^{x_1} \\ 2x_2 - x_1 + e^{x_2} \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow D\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 + e^{x_1} & -1 \\ -1 & 2 + e^{x_2} \end{pmatrix}.$$

. Newton-Verfahren $\begin{cases} \vec{X}^0 = (X^0, Y^0) \text{ gegeben} \\ \vec{X}^{n+1} := (X^{n+1}, Y^{n+1}) = \vec{X}^n - \left(D\vec{f}(\vec{X}^n)\right)^{-1} \vec{f}(\vec{X}^n),\quad n \geq 0 \end{cases}$

. Das ist besser $D\vec{f}$ nicht zu invertieren.
Stattdessen, löst man:

$$(*)\begin{cases} \vec{X}^0 \\ D\vec{f}(\vec{X}^n)(\vec{X}^n - \vec{X}^{n+1}) = \vec{f}(\vec{X}^n),\quad n \geq 0. \end{cases}$$

ⓒ Ist ⊛ wohldefiniert?

Ja, weil $D\vec{f}$ ist eine symmetrische positive Matrix

$\Rightarrow$ Man wird $D\vec{f} = L \cdot L^T$ zerlegen.

$\Rightarrow$ Algorithmus: . Setze $\vec{x}^0 = (0,0)$;

Für $n = 0, 1, 2, \ldots$

- Konstruiere $\vec{b} := \vec{f}(\vec{x}^n)$
- Konstruiere $A := D\vec{f}(\vec{x}^n)$
- Löse $A\vec{z} = \vec{b}$ mit Hilfe der LL^T Zerlegung von A
- Setze $\vec{x}^{n+1} := \vec{x}^n - \vec{z}$
- Falls $\dfrac{\|\vec{x}^n - \vec{x}^{n+1}\|}{\|\vec{x}^{n+1}\|} < \delta \Rightarrow \vec{\bar{x}} := \vec{x}^{n+1}$ und Stop.

Lösung: $\boxed{\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0{,}56714\ldots}$

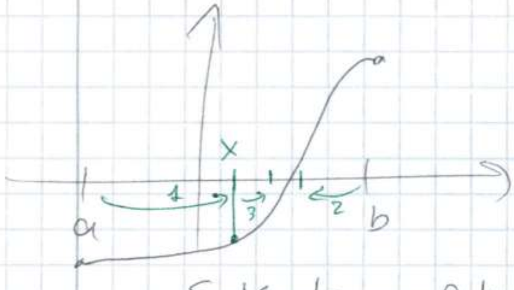
. Andere Iterationsverfahren in $\mathbb{R}$ (für $f(x) = 0$, f stetig).

. Bisektionsverfahren: . $f \in C([a,b])$ mit $f(a)f(b) \leq 0$.

$\Rightarrow x := \frac{a+b}{2}$

Falls $f(x)f(a) < 0 \Rightarrow b := x$

sonst $a := x$



. Sekantenverfahren: f muss nicht C^1 sein.

$$\begin{cases} x^{(0)} = a, \quad x^{(1)} = b \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} \cdot f(x^{(k)}), \quad k \geq 1 \end{cases}$$