Institut für Angewandte Mathematik
SS 2017
Patrik Ferrari, Eva Kopfer & Angelo Profeta

4. Übungsblatt „Einführung in die Statistik"

Abgabe: Mittwoch 24.4.2017 in der Vorlesung

---

1. (Konfidenzintervalle im n-fachen Produktmodell) *[6 Pkt]*

Betrachten Sie das n-fache Produktmodell $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{U}_\vartheta^{\otimes n} : \vartheta > 0)$, wobei $\mathcal{U}_\vartheta$ die Gleichverteilung auf $[\vartheta, 2\vartheta]$ sei. Für $\vartheta > 0$ sei $T_\vartheta(x) := \max_{1 \le i \le n} x_i/\vartheta$.

a) Für welches Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist $(Q; T_\vartheta : \vartheta > 0)$ ein Pivot?
Hinweis: $(Q; T_\vartheta : \vartheta > 0)$ *heißt Pivot, falls* $Q := \mathrm{P}_\vartheta \circ T_\vartheta^{-1}$ *unabhängig von* ϑ *ist.*

b) Konstruieren Sie mit Hilfe dieses Pivots zu gegebenen Irrtumsniveau α ein Konfidenzintervall für ϑ mit minimaler Länge.

2. (Folgen falscher Modellwahl) *[5 Pkt]*

Ein Experimentator macht n unabhängige normalverteilte Messungen mit unbekanntem Erwartungswert m. Die Varianz $v > 0$ meint er zu kennen.

a) Welches Konfidenzintervall für m wird er zu einem vorgegebenen Irrtumsniveau α angeben?

b) Welches Irrtumsniveau α' hat das Konfidenzintervall aus *Aufgabenteil a)*, wenn die Varianz in Wirklichkeit beliebige positive Werte annehmen kann?

* Extra Übung (3Pkt). Simulieren Sie das Irrtumsniveau α' aus *Aufgabenteil b)* (mind. 10 Wiederholungen) für verschiedene n, und stellen Sie den Mittelwert graphisch dar. Nehmen Sie hierzu an, dass $m = 0$, $\alpha = 0.05$ und die vom Experimentator gewählte Varianz $v_{\mathrm{Exp}} \in \{\frac{1}{2}, 2\}$ ist, während in Wirklichkeit die Varianz $v = 1$ betrage.

3. (Bestimmung des Grades der Umweltbelastung) *[4 Pkt]*

Im Abwasserbereich eines Chemiewerkes werden n Fische gehalten. Aus deren Überlebenswahrscheinlichkeit ϑ kann auf den Verschmutzungsgrad des Wassers geschlossen werden. Wie groß muß n sein, damit man ϑ aus der Anzahl der toten Fische mit 95%iger Sicherheit bis auf eine Abweichung von ± 0.05 erschliessen kann? Verwenden Sie a) die Čebyšev-Ungleichung und b) die Normalapproximation.

4. (Mehrdimensionaler Konfidenzbereich) *[5 Pkt]*

Es sei $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)^T \in \mathbb{R}^k$ und für $j = 1, \ldots, k$ sei $C_j(\theta) = (\overline{c}_j(X), \underline{c}_j(X))$ ein $(1-\alpha_j)$-Konfidenzintervall für θ_j. Weiter sei $C(\theta) = C_1(\theta) \times \ldots \times C_k(\theta)$.

a. Zeigen Sie, dass $C(\theta)$ ein Konfidenzbereich für θ zum Niveau $1 - \sum_{j=1}^k \alpha_j$ ist.

b. Die Konfidenzintervalle $C_1(\theta), \ldots, C_k(\theta)$ heißen stochastisch unabhängig falls die Zufallsvariablen $((\overline{c}_1(X), \underline{c}_1(X)), \ldots, (\overline{c}_k(X), \underline{c}_k(X)))$ unabhängig sind. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $C(\theta)$ ein Konfidenzbereich zum Niveau $\prod_{j=1}^k (1-\alpha_j)$ ist. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil a..

c. Es sei nun $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = \alpha$. Wie muss in Teil a. und b. α gewählt werden, damit man einen Konfidenzbereich für θ zum Niveau $1-\gamma$ erhält?