Institut für Angewandte Mathematik
SS 2017
Patrik Ferrari, Eva Kopfer & Angelo Profeta

3. Übungsblatt „Einführung in die Statistik”

Abgabe: Mittwoch 17.4.2017 in der Vorlesung

---

1. (Angleichung der Restunsicherheit bei wachsender Information) *[5 Pkt]*

Sei $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{N}_{\vartheta,v}^{\otimes n} : \vartheta \in \mathbb{R})$ das n-fache Gauß'sche Produktmodell mit bekannter Varianz $v > 0$, wobei die Likelihood-Funktion gegeben ist durch

$$\varrho(x, \vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{\vartheta,v}(x_i) = (2\pi v)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2v} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \vartheta)^2 \right).$$

Weiter sei $\mathcal{N}_{m,u}$ die a-priori-Verteilung, wobei $m \in \mathbb{R}$ und $u > 0$ gegeben sind. Betrachte nun eine Folge $x = (x_1, x_2, \dots)$ von Beobachtungswerten in $\mathbb{R}$, für welche die Folge der Mittelwerte $M_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ beschränkt bleibt.

a) Zeigen Sie, dass die a-posteriori-Dichte $\pi_x^{(n)}$ zu den Ergebnissen $(x_1, \dots, x_n)$ durch die Dichte einer Normalverteilung $\phi_{T_n(x),u_n}$ gegeben ist, und bestimmen Sie den Erwartungswert $T_n(x)$ sowie die Varianz u_n.

b) Sei $\theta_{n,x}$ eine Zufallsvariable mit Verteilung $\pi_x^{(n)}$. Zeigen Sie, dass $\sqrt{n/v}\,(\theta_{n,x} - M_n(x))$ in Verteilung gegen $\mathcal{N}_{0,1}$ konvergiert.

2. (Poisson, Beta und Gamma Verteilungen) *[5 Pkt]*

Zu gegebenen Parameter $\alpha > 0$ und $r \in \mathbb{N}$ ist die Dichte der Gamma Verteilung $\Gamma(\alpha, r)$ gegeben durch

$$\gamma_{\alpha,r}(x) = \alpha^r x^{r-1} e^{-\alpha x} / (r-1)!$$

Die Dichte der *Beta-Verteilung* $\beta(a, b)$ ist gegeben durch

$$f(x; a, b) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1},$$

wobei $x \in [0, 1]$, $a, b > 0$ und $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$.

a) Zeigen Sie: ist die Anzahl der bei einer Kfz-Versicherung eintreffenden Schadensmeldungen auf dem Zeitintervall sei $(0, t]$ Poisson-verteilt zum Parameter αt, dann ist die r-te Schadensmeldung $\Gamma(\alpha, r)$-verteilt.

b) Zeigen Sie: $B(a + 1, b) = \frac{a}{a+b} B(a, b)$.

c) Seien X, Y unabhängige Zufallsvariable mit Verteilung $\Gamma(\alpha, r)$ bzw. $\Gamma(\alpha, s)$. Berechnen Sie die Verteilung von $(X+Y, \frac{X}{X+Y})$. Merken Sie etwas überraschend?

3. (Bayes-Schätzer im Binomialmodell) [*5 Pkt*]

Betrachte das statistische Modell $(\mathcal{X}, \mathcal{P}(\mathcal{X}), \mathrm{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta)$, wobei $\mathcal{X} = \{0, \ldots, n\}$ und $\mathrm{P}_\vartheta = \mathrm{Bin}(n, \vartheta)$ für $\vartheta \in (0,1)$ ist. Weiterhin sei die a-priori-Verteilung gegeben durch die Beta-Verteilung $\mathrm{Beta}(a, b)$ zu den Parameter $a, b > 0$ mit der Dichte

$$\beta_{a,b}(x) = \frac{x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}, \quad 0 < x < 1 \quad \text{und} \quad B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

a) Bestimmen Sie die a-posteriori-Dichte und geben Sie den Bayes-Schätzer für ϑ an.

b) Betrachten Sie den Bayes-Schätzer zur uniformen Bewertung $a = b = 1$. Ist dieser Schätzer erwartungstreu? Für welche $\vartheta \in (0,1)$ ist der mittlere quadratische Fehler kleiner als der des besten, erwartungstreuen Schätzers $T_n(x) = x/n$?

4. (Ein- und beidseitige Exponentialverteilungen) [*5 Pkt*]

Gegeben sei das statistische Modell $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{P}_\vartheta : \vartheta \in \mathbb{R})$. Konstruieren Sie ein minimales (d.h., von kleinste Lebesgue-Mass) Konfidenzintervall für ϑ zum Irrtumsniveau α für

a) das Wahrscheinlichkeitsmaß P_ϑ mit Dichte $\varrho_\vartheta(x) = \mathrm{e}^{-(x-\vartheta)}\,\mathbb{1}_{\{\vartheta \le x\}}$.

b) das Wahrscheinlichkeitmaß P_ϑ mit Dichte

$$\varrho_\vartheta(x) \;=\; \frac{a\,b}{a+b}\left(\mathrm{e}^{-a|x-\vartheta|}\,\mathbb{1}_{\{x<\vartheta\}} \;+\; \mathrm{e}^{-b|x-\vartheta|}\,\mathbb{1}_{\{x \ge \vartheta\}}\right),$$

wobei $a, b > 0$ feste Parameter sind.