Institut für Angewandte Mathematik
SS 2017
Patrik Ferrari, Eva Kopfer & Angelo Profeta

1. Übungsblatt „Einführung in die Statistik"

Abgabe: Mittwoch 3.5.2017 in der Vorlesung

---

1. (Strahlenbelastung) [*4 Pkt*]

Die Strahlenbelastung von Waldpilzen soll überprüft werden. Dazu wird bei n unabhängigen Pilzproben die Anzahl der Geigerzähler-Impulse jeweils während einer Zeiteinheit gemessen. Stellen Sie ein geeignetes statistisches Modell auf und geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer für die Strahlenbelastung an.

2. (Hardy-Weinberg-Gleichgewicht) [*5 Pkt*]

In einer (hypothetisch unendlich großen) Population gebe es bezüglich eines gewissen diploiden Genortes die drei genetischen Typen aa, aA und AA mit Häufigkeiten $p_{aa} = \vartheta^2$, $p_{aA} = 2\vartheta(1-\vartheta)$, $p_{AA} = (1-\vartheta)^2$. Dabei ist $\vartheta \in [0,1]$. In einer Stichprobe der Größe n aus der Population beobachten wir n_t Individuen von Typ t, wobei $t \in \{aa, aA, AA\}$ und $n_{aa} + n_{aA} + n_{AA} = n$ sei.
Formulieren Sie ein Modell und bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ.

3. (Diskrete Gleichverteilungen) [*6 Pkt*]

In einer Lostrommel befinden sich N Lose mit den Nummern $1, 2, \dots, N$. Dabei ist N unbekannt. Der kleine Fritz will wissen, wie viele Lose sich in der Trommel befinden und entnimmt in einem unbeobachteten Augenblick ein Los, merkt sich die aufgedruckte Nummer und legt es wieder in die Trommel zurück. Das macht er n-mal.

a) Berechnen Sie aus den gemerkten Nummern $X_1, \dots, X_n$ einen Maximum-Likelihood-Schätzer T für N. Ist dieser erwartungstreu?

b) Berechnen Sie approximativ für großes N den relativen Erwartungswert $\mathrm{E}_N[T]/N$.

c) Diesmal zieht der kleine Fritz die n Lose *ohne* Zurücklegen. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T für N, berechnen Sie $\mathrm{E}_N[T]$ und geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer für N an.

P. (Simulation von Gleichverteilungen)

Betrachten Sie das statistische Modell $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{U}_\vartheta^{\otimes n} : \vartheta \in \mathbb{R})$ sowie die beiden erwartungstreuen Schätzer

$$M(x) \; = \; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{und} \qquad T(x) \; = \; \frac{1}{2}\big(\max_{1\le i\le n} x_i + \min_{1\le i\le n} x_i\big).$$

Entscheiden Sie mit Hilfe einer Simulation, welcher der beiden Schätzer weniger streut. Gehen Sie hierbei folgendermaßen vor:

a) Erzeugen Sie einen Vektor `sample` aus $n = 100$ Zufallszahlen, die auf der Menge $[-0.5, 0.5]$, d.h. $\vartheta = 0$, gleichverteilt sind und berechnen Sie $M(x)^2$ sowie $T(x)^2$.

b) Wiederholen Sie das Experiment nun $K = 1000$ mal. Schreiben Sie dazu eine Funktion `simulate.schaetzer` mit den Input-Argumenten n und K, wobei die Funktion den Mittelwert über die K Realisierungen von $M(x)^2$ sowie $T(x)^2$ zurückgeben soll.

c) Für $n = 10^k$, $k = 1, \ldots, 6$ und $K = 1000$ stellen Sie anschließend in einem Diagramm den Logarithmus die Mittelwertes von M^2 bzw. T^2 über n dar. Was können Sie über die n Abhängigkeit der Varianz der beiden Schätzer aussagen?