Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2011
Patrik Ferrari, Nikolaus Schweizer

Probeklausur zu „Algorithmische Mathematik II"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Übungsgruppe-Nr:		Tutor:	

Wichtige Hinweise:

- Taschenrechner, Handys u.ä. sind nicht zugelassen!
- Geben Sie dieses ausgefüllte Deckblatt (Tutor *oder* Nummer der Übungsgruppe) mit den Lösungen ab. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit dem Namen zu versehen.
- Im Falle von Rechenfehlern, werden nur dann Punkte vergeben, wenn *aus Ihren Kommentaren zu den Rechnungen* der Lösungsweg eindeutig erkennbar ist.
- Sie sollten die *zentralen* Definitionen, Sätze kennen. Längere Formeln, Detailaussagen usw. werden bei Bedarf in der Klausur zur Verfügung gestellt oder dort hergeleitet.
- Die Probeklausur wird von den Tutoren korrigiert und zurückgegeben. Die Punktzahl ist allerdings nicht zulassungsrelevant.
- Die Probeklausur dient zur Wiederholung des Stochastikteils der Vorlesung. Für die eigentliche Klausur ist natürlich auch der Numerikteil relevant.
- *Noch nicht in der Probeklausur, aber dann in der richtigen Klausur:* Bitte den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten!
- Geplante Bearbeitungszeit: ca. 60 Minuten.

Weitere Informationen

- Die zwei Übungen sind aus Klausuren/Probeklausuren von AlMaII 2009.
Die AlMaII Klausuren von 2009 stehen, mit Musterlösungen, auf Andreas Eberles Homepage zur Verfügung (s. den Link auf der AlMaII 2011 Seite).
- Seit einigen Wochen stehen ebenfalls meine gescannten Notizen auf der AlMaII 2011 Seite zur Verfügung.

NICHT selbstständig ausfüllen:

Punkte Aufgabe 1: Punkte Aufgabe 2: Summe:

1. (Bedingte Wahrscheinlichkeiten (Aus Klausur AlMaII 2009))

a) Definieren Sie die Begriffe *Wahrscheinlichkeitsraum* und *bedingte Wahrscheinlichkeit.*

b) Seien A und B Ereignisse mit $P[B] \in (0,1)$. Folgern Sie aus den Definitionen:

$$P[A] \;=\; P[A \,|\, B] \cdot P[B] + P[A \,|\, B^c] \cdot P[B^c].$$

Welche entsprechenden Aussagen gelten im Fall $P[B] = 0$ bzw. $P[B] = 1$?

c) Eine Zufallsfolge von Binärzahlen $X_0, X_1, X_2, \ldots$ wird wie folgt rekursiv erzeugt:

$X_0 = 0$
for $n \geq 1$ **do**
  if $X_{n-1} = 1$ **then** $X_n = 0$ **else** $X_n = Z_n$ **end if**
end for

Hierbei sei die Zufallsvariable Z_n unabhängig von $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ mit $P[Z_n = 1] = P[Z_n = 0] = 1/2$.

(i) Sei $p_n = P[X_n = 1]$. Zeigen Sie: $p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, p_{n-1}$.

(ii) Konvergiert die Folge p_n für $n \to \infty$? Falls ja, berechnen Sie den Grenzwert.

(iii) Zeigen Sie: $P[X_1 = 1 \text{ und } X_3 = 1] = 1/4$.

(iv) Berechnen Sie $P[X_1 = 1 \,|\, X_3 = 1]$.

(v) Berechnen Sie $\mathrm{Cov}(X_1, X_3)$.

2. (Markovketten (Aus Probeklausur AlMaII 2009))

a) Geben Sie die Definition einer Markovkette an. Was versteht man unter einer Gleichgewichtsverteilung der Markovkette?

b) Wir betrachten eine Sammlung von N Büchern, die in einer Reihe auf einem Bücherregal aufgestellt ist. Zu aufeinanderfolgenden Zeitpunkten wird jeweils ein Buch zufällig entnommen, und anschließend wieder zurückgestellt. Dabei wird das Buch eine Stelle links von seiner vorherigen Position eingefügt (d.h. das Buch und das Buch links daneben tauschen die Position). Wenn das ausgewählte Buch schon ganz links steht, wird es auch dort wieder eingefügt.

Alle bis auf ein Buch haben gelbe Umschläge, und werden mit derselben Wahrscheinlichkeit ausgewählt. Das verbleibende Buch hat einen roten Umschlag, und wird in jeder Zeiteinheit mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ ausgewählt. Aufeinanderfolgende Bücherauswahlen geschehen unabhängig voneinander.

Wir nummerieren die Positionen auf dem Bücherregal von 1 (ganz links) bis N (ganz rechts). Sei X_n die Position des roten Buchs nach n Zeiteinheiten.

Zeigen Sie, dass X_n eine Markovkette ist, deren nichtverschwindende Übergangswahrscheinlichkeiten gegeben sind durch

$$\begin{aligned}
p_{i,i-1} &= p && (i = 2, 3, \ldots, N), \\
p_{i,i+1} &= (1-p)/(N-1) && (i = 1, 2, \ldots, N-1), \\
p_{i,i} &= 1 - p - (1-p)/(N-1) && (i = 2, 3, \ldots, N-1), \\
p_{1,1} &= 1 - (1-p)/(N-1), && \\
p_{N,N} &= 1 - p. &&
\end{aligned}$$

c) Zeigen Sie, dass für die Gleichgewichtsverteilung μ der Markovkette gilt:

$$\mu(2) = \frac{1-p}{p(N-1)}\mu(1) \qquad \text{und} \qquad \mu(3) = \frac{1-p}{p(N-1)}\mu(2).$$

Identifizieren Sie die Gleichgewichtsverteilung.