Konfidenzbereich zum Niveau $1-\alpha$, geometrisch beschreibt $C(x)$ eine Ellipse.

Was passiert, wenn ΣC unbekannt ist?

Antwort für $d=1$:

Korollar 3.17: Seien $X_1 \ldots X_n$ iid $\mathcal{N}(m, v)$-verteilt, $\vartheta = (m, v)$ unbekannt.

a) Sei $c_\alpha := q_{\alpha/2}(\chi^2_{n-1})$, $d_\alpha = q_{1-\alpha/2}(\chi^2_{n-1})$.

Dann ist

$$\left\{ \tilde{v} \in \mathbb{R}_+ : c_\alpha \le \frac{(n-1) S_n^2}{\tilde{v}} \le d_\alpha \right\}$$

Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$ für v.

b) Sei $c_\alpha = q_{1-\alpha/2}(t_{n-1})$ (d.h. $P[T_n \le -c_\alpha] = P[T_n \ge c_\alpha] = \alpha/2$)

Dann ist

$$\left[\bar{X} - c_\alpha \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X} + c_\alpha \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right]$$

Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$ für m.

Beweis: Direkte Folgerung aus Satz 3.9 b) bzw c). □

98

8. Tests

Bsp 8.1: Ein Pharmaunternehmen hat ein neues Medikament entwickelt. Wie kann man herausfinden, ob es besser ist als ein auf dem Markt vorhandenes?

Modelliere Krankheitsbehandlung als 0-1 Experiment:

$X_1, \ldots, X_n$ iid $Ber(\vartheta)$-verteilt mit $n = \#$ Patienten, $\vartheta \in \Theta = [0,1]$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Medikament wirkt bei Patient } i \\ 0 & \text{———— " ———— nicht} \end{cases}$$

Sei ϑ_{alt} die Erfolgsrate des alten Medikamentes

Frage: Ist das neue Medikament besser?

Man muss entscheiden zwischen

- der Nullhypothese $H_0 : \vartheta \in \Theta_0 := [0, \vartheta_{alt}]$ (neues Medikament nicht besser)
- der Alternative $H_1 : \vartheta \in \Theta_A := [\vartheta_{alt} + \varepsilon, 1]$

Ein Test ist nun eine Entscheidungsregel, ob man aufgrund der Daten H_0 oder H_1 glauben sollte. Dabei kann man zwei mögliche Fehler machen:

- Fehler 1. Art: Man verwirft Hypothese H_0, obwohl sie richtig ist ($\vartheta \in \Theta_0$).
- Fehler 2. Art: Man nimmt die Hypothese H_0 an, obwohl sie falsch ist ($\vartheta \notin \Theta_0$).

⅃V11

Man kann den Fehler 1. Art radikal minimieren, indem man H_0 immer annimmt. Dann würden wir aber H_1 auch immer ablehnen, insbesondere auch dann, wenn es richtig ist. Analog kann man den Fehler 2. Art radikal minimieren, indem man H_1 immer annimmt also H_0 also stets verwirft. Beides ist nutzlos! Die beiden Fehler sind also komplementär zueinander, in dem Sinne, dass die Minimierung der W'keit des einen zu einem Anstieg der W'keit des anderen führt. ~~Alle Möglichen~~

Daher führt man eine Rangordnung ein. Als der gravierendere Fehler (peinlicher Fehler) wird das irrtümliche Verwerfen der Nullhypothese festgelegt. Ein irrtümliches Festhalten an der Nullhypothese wird als weniger gravierend eingestuft. ("verzeihlich")

↳ ~~Stat.~~ Zuordnung von Null- und Alternativhypothese dient der Festlegung welcher der beiden Testfehler als peinlich bzw. verzeihlich angesehen wird.

100

Ziel: Finde einen Test, dessen W'keit für Fehler 1. Art unter einem geg. Irrtumsniveau $\alpha \in (0,1)$ liegt.

Durchführung eines stat. Entscheidungsproblems:

1) Formulierung des stat. Modells $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta; \vartheta \in \Theta))$
2) Formulierung der Nullhypothese und Alternative
   ↳ Seien $\Theta_0, \Theta_1 \subset \Theta$ mit $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.
   $H_0: \vartheta \in \Theta_0$
   $H_1: \vartheta \in \Theta_1$
3) Wahl des Irrtumsniveau: Wähle α und fordere, dass Fehler 1. Art höchstens W'keit α haben (typisch ist $\alpha \in \{5\%, 1\%, 0{,}1\%\}$)
4) Wahl der Entscheidungsregel:
   Wähle eine Statistik $\phi: \mathcal{X} \to [0,1]$ wie folgt:
   $\phi = 0 \iff$ Nehme H_0 an
   $\phi = 1 \iff$ Verwerfe H_0 und nehme H_1 an
   $\phi \in (0,1) \iff$ Nehme H_0 mit W'keit $1-\phi$ an. Ansonsten verwerfe H_0 und nehme H_1 an.
5) Durchführung des Experimentes.

Formal:

Def 8.2: Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta, \vartheta \in \Theta))$ ein stat. Modell und $\Theta_0, \Theta_1 \subset \Theta$ mit $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ definiere Nullhypothese und Alternative (wie in Punkt 2) oben).

i) Eine Statistik $\phi: \mathcal{X} \to [0,1]$ heißt <u>Test</u> von Θ_0 gg Θ_1
ii) Ein Test ϕ heißt <u>nicht randomisiert</u>, falls $\phi \in \{0,1\}$ $\mathbb{P}_\vartheta$-f.s. für alle $\vartheta \in \Theta$. In diesem Fall heißt $K = \{\omega : \phi(\omega) = 1\}$ <u>Ablehnbereich</u> oder <u>kritischer Bereich</u>

iii) Falls $\phi \in (0,1)$ mit pos. ~~W'keit~~ P_ϑ-W'keit für mind. ein $\vartheta \in \Theta$, so heißt ϕ randomisiert.

iv) Das effektive Niveau von ϕ ist def. durch

$$\sup_{\vartheta} \int_0^1 t\, P_\vartheta^\phi(dt) = \sup_{\vartheta \in \Theta_0} E_\vartheta[\phi] = \cancel{\sup_{\vartheta\in\Theta_0}}\ \cancel{P_\vartheta}$$

+ 4) vorige Seite

Das entspricht der größten W'keit für einen Fehler 1. Art.

v) Ein Test ϕ hat (Intuns-) Niveau $\alpha \in (0,1)$, wenn

$$\sup_{\vartheta \in \Theta_0} E_\vartheta[\phi] \le \alpha.$$

vi) Die Gütefkt ist definiert durch

$$G_\phi : \Theta \to [0,1], \quad \vartheta \mapsto E_\vartheta[\phi]$$

vii) Die Macht von ϕ bei ϑ ist $G_\phi(\vartheta)$.

Für $\vartheta \in \Theta_1$ ist $\beta_\phi(\vartheta) = 1 - G_\phi(\vartheta)$ die W'keit für einen Fehler 2. Art.

Fortsetzung (v)

Bsp 8.1 Medikament. Die beobachtete Erfolgsrate ist $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

Wir möchten die Hypothese $\vartheta \le \vartheta_{alt}$ verwerfen, falls $\bar{x}$ deutlich über ϑ_{alt} liegt.

Ansatz $\phi = 1_K$ (nicht randomisiert)

mit Ablehnbereich

$$K = \{ x : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \ge c \}$$

Wähle dann c groß genug, so dass

$$\sup_{\vartheta \le \vartheta_{alt}} E_\vartheta[\phi] = \sup_{\vartheta \le \vartheta_{alt}} P_\vartheta[\bar{X} \ge c]$$

$$= P_{\vartheta_{alt}}[\underbrace{\sum_{i=1}^n X_i}_{\sim Bin(n, \vartheta_{alt})} \ge cn] \le \alpha$$

$\hookrightarrow$ c kann über Quantile festgelegt werden $\lrcorner$

Die Form $\phi = 1_K$ mit $K = \{x : T(x) \ge c\}$ ist typisch. Man nennt die entsprechende Statistik T eine Teststatistik.

(102) Alternativ zum Niveau kann man auch den P-Wert (oder Signifikanzniveau) eines Tests festlegen. Anschaulich ist der P-Wert das kleinste Niveau, bei dem man aufgrund der Daten X die Hypothese H_0 noch ablehnen würde.

Formal: Sei $\phi_\alpha = 1_{K_\alpha}$ Test zum Niveau α.

P-Wert. $W = \inf\{\alpha \in [0,1] : X \in K_\alpha\}$.

Bem 8.3 Zshg zwischen Tests und Konfidenzbereichen

Sei $\Theta_0 = \{\vartheta_0\}$ d.h. $H_0: \vartheta = \vartheta_0$ einfache Hypothese und sei $C(X)$ ein Konfidenzbereich zum Sicherheits-Niveau $1-\alpha$, d.h.

$P_\vartheta[C(X) \ni \vartheta] \geq 1-\alpha$ für alle ϑ.

Wähle $\phi = 1_K$ mit

$$K = \{C(X) \not\ni \vartheta_0\}$$

$\Rightarrow E_{\vartheta_0}[\phi] = P_{\vartheta_0}[C(X) \not\ni \vartheta_0] = 1 - P_{\vartheta_0}[C(X) \ni \vartheta_0] \leq \alpha$

↳ also ist ϕ Test zum Niveau α ($\Theta_0 = \{\vartheta_0\}$)

Bsp 8.4: Seien $X_1, \dots, X_n$ iid $\mathcal{N}(\vartheta, \sigma^2)$-verteilt mit σ^2 bekannt.

Nach Bsp 7.3 ist

$$C(X) = [\bar{X} - \overbrace{c_\alpha \sigma}^{=\gamma}, \bar{X} + \overbrace{c_\alpha \sigma}^{=\gamma}], \quad c_\alpha = \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{\text{Quantil}}(\mathcal{N}(0,1))$$

ein Konfidenzbereich zum Sicherheits-Niveau $1-\alpha$.

Wir möchten die Hypothese $H_0: \vartheta = \vartheta_0$ auf dem Niveau α testen. Nach Bem 8.3 ist dann $\phi = 1_K$ mit

$$K = \{X : C(X) \not\ni \vartheta_0\} = \{X : \vartheta_0 \notin [\bar{X} - \overbrace{c_\alpha \sigma}^{=\gamma}, \bar{X} + \overbrace{c_\alpha \sigma}^{=\gamma}]\}$$

$$\cancel{= \left\{X : \left|\frac{\bar{X} - \vartheta_0}{\sigma}\right| > c_\alpha\right\}} = \{X : |\bar{X} - \vartheta_0| > \gamma\}$$

Test zum Niveau α

~~6. Tests: Theorie und Anwendungen~~

8.1 Neyman-Pearson-Tests

Anforderungen an einen guten Test:

1) $G_\phi(\vartheta) = E_\vartheta[\phi] \le \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta_0$
↳ W'keit für Fehler 1. Art kleiner als α

2) $G_\phi(\vartheta)$ soll möglichst groß sein für alle $\vartheta \in \Theta_1$
↳ W'keit für Fehler 2. Art wird klein.

Def 8.5 Ein Test ϕ von Θ_0 gegen Θ_1 heißt UMP (uniformly most powerful) zum Niveau α, falls

i) ϕ hat Niveau α

ii) Für alle Tests ψ zum Niveau α gilt $G_\phi(\vartheta) \ge G_\psi(\vartheta)$ für alle $\vartheta \in \Theta_1$.

Das bedeutet, dass bei gleichen Schranken für Fehler 1. Art ϕ den kleinsten Fehler 2. Art hat.

Def 8.6 Sei $\Theta_0 = \{\vartheta_0\}$ und $\Theta_1 = \{\vartheta_1\}$, $L_\vartheta(x)$ die Likelihoodfkt.

i)
$$\varrho(x) = \frac{L_{\vartheta_1}(x)}{L_{\vartheta_0}(x)}$$
heißt Likelihood-Quotient

ii) Ein Test von der Form

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varrho(x) > c \\ 0 & \text{falls } \varrho(x) < c \end{cases}$$
keine Aussage über $=$

heißt Neyman-Pearson Test (NP-Test) oder Likelihood-Quotienten-Test (LQ-Test) zum Schwellenwert c.

Satz 8.7 (Neyman-Pearson-Lemma (1932))
Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (P_0, P_1))$ ein stat. Modell ~~und~~ mit Likelihoodfkt $L(\vartheta_i, x)$ ~~bzgl. eines Referenzmaßes ν (man kann z.B. immer $\nu = \frac{1}{2}P_0 + \frac{1}{2}P_1$ setzen.)~~

(704)

Sei ϱ der Likelihood-Quotient und $\alpha \in (0,1)$ ein vorgegebenes Niveau. Dann gilt:

i) Es gibt einen NP-Test mit $\mathbb{E}_{\vartheta_0}[\phi] = \alpha$ (insbesondere hat ϕ Niveau α)

ii) Jeder NP-Test ϕ mit $\mathbb{E}_{\vartheta_0}[\phi] = \alpha$ ist UMP zum Niveau α.

Beweis: i) Sei μ die Vtlg von ϱ unter $\mathbb{P}_{\vartheta_0}$, d.h. $\mu((-\infty, z]) = \mu([0, z]) = \mathbb{P}_{\vartheta_0}[\varrho(X) \le z]$ für $z \ge 0$.

μ ist ein W'maß auf $\mathbb{R}_+$. Sei c ein $(1-\alpha)$ Quantil von μ. Dann gilt

$$\mu([c, \infty)) = \mathbb{P}_{\vartheta_0}[\varrho(X) \ge c] \ge \alpha$$

und $\mu((c, \infty)) = \mathbb{P}_{\vartheta_0}[\varrho(X) > c]$

$$= 1 - \underbrace{\mu((-\infty, c])}_{\ge 1-\alpha} \le \alpha$$

(c existiert, da $\mathbb{P}_{\vartheta_0}(\varrho(X) = \infty) = 0$)

Es folgt, dass

$$\mathbb{P}_{\vartheta_0}[\varrho(X) = c] = \mathbb{P}_{\vartheta_0}[\varrho(X) \ge c] - \mathbb{P}_{\vartheta_0}[\varrho(X) > c]$$
$$\ge \alpha - \mathbb{P}_{\vartheta_0}[\varrho(X) > c]$$

Fall 1: $\mathbb{P}_{\vartheta_0}[\varrho(X) = c] = 0$. Dann ist

$\phi = 1_{\{\varrho(X) > c\}}$ ein NP-Test mit

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0}[\phi] = \mathbb{P}_{\vartheta_0}[\varrho(X) > c] = \alpha$$

Fall 2: $\mathbb{P}_{\vartheta_0}[\varrho(X) = c] > 0$ Setze

$$\gamma = \frac{\alpha - \mathbb{P}_{\vartheta_0}[\varrho(X) > c]}{\mathbb{P}_{\vartheta_0}[\varrho(X) = c]} \in (0, 1]$$

Dann ist

$$\phi = \begin{cases} 1 & \varrho(X) > c \\ \gamma & \varrho(X) = c \\ 0 & \varrho(X) < c \end{cases}$$

ein NP-Test zum Niveau ~~α~~, ~~dass~~

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0}[\phi] = 1 \cdot \mathbb{P}_{\vartheta_0}[\rho > c] + \gamma\, \mathbb{P}_{\vartheta_0}[\rho = c] = \alpha$$

ii) Sei ϕ ein NP-Test mit $\mathbb{E}_{\vartheta_0}[\phi] = \alpha$ und Schwellenwert c und sei ψ ein Test zum Niveau α ~~[illegible]~~

Zu zeigen: $\mathbb{E}_{\vartheta_1}[\phi] - \mathbb{E}_{\vartheta_1}[\psi] = \int (\phi(x) - \psi(x))\, \mathcal{L}_{\vartheta_1}(x)\, \mu(dx) \geq 0$. (bei diskret Summe)

Es gilt ~~falls~~ $\phi(x) > \psi(x) \overset{\psi \in [0,1]}{\Rightarrow} \phi(x) > 0 \underset{\text{zu Schwellenwert } c}{\overset{\phi \text{ NP Test}}{\Rightarrow}} \rho(x) \geq c$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{\vartheta_1}(x) \geq c\, \mathcal{L}_{\vartheta_0}(x)$$

und ~~falls~~ $\phi(x) < \psi(x) \underset{\text{da } \psi \text{ Test}}{\overset{\psi \leq 1}{\Rightarrow}} \phi(x) < 1 \Rightarrow \rho(x) \leq c$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{\vartheta_1}(x) \leq c\, \mathcal{L}_{\vartheta_0}(x)$$

$$\hookrightarrow (\phi(x) - \psi(x))\, \mathcal{L}_{\vartheta_1}(x) \geq (\phi(x) - \psi(x))\, c\, \mathcal{L}_{\vartheta_0}(x) \quad \forall x$$

Integr. bzgl. ~~[illegible]~~ "dx"

$$\Rightarrow \mathbb{E}_{\vartheta_1}[\phi] - \mathbb{E}_{\vartheta_1}[\psi] \overset{(*)}{\geq} c\,(\underbrace{\mathbb{E}_{\vartheta_0}[\phi]}_{=\alpha} - \underbrace{\mathbb{E}_{\vartheta_0}[\psi]}_{\leq \alpha}) \geq 0.$$

ψ Niveau α

$\Rightarrow \phi$ ist UMP zum Niveau α $\square$

Bem 8.8. Der Beweis von Satz 6.3 liefert, dass der NP-Test

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \rho(x) > c \\ \gamma & \text{— } \rho(x) = c \\ 0 & \text{— } \rho(x) < c \end{cases}$$

für c $(1-\alpha)$-Quantil von ~~[illegible]~~ μ (Notation siehe...) und

$$\gamma = \begin{cases} \dfrac{\alpha - \mathbb{P}_{\vartheta_0}[\rho > c]}{\mathbb{P}_{\vartheta_0}[\rho = c]} & \text{falls } \mathbb{P}_{\vartheta_0}[\rho = c] > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

UMP ist.

Prop 8.9 (Eindeutigkeit)

In der Situation aus Satz 8.7 mit ϕ wie in Satz 8.7 sei ψ irgendein UMP Test für $\{\vartheta_0\}$ gegen $\{\vartheta_1\}$ zum Niveau $\alpha = \mathbb{E}_{\vartheta_0}[\phi]$. Dann gilt $\phi(x) = \psi(x)$ für ~~[illegible]~~ f.a. x außer auf der Menge $\{x : \rho(x) = c\}$.

Beweis: Nach dem Bew von Satz 8.7 ii) (Ungl (*)) gilt

$$\mathbb{E}_{\vartheta_1}[\psi] - c\,\mathbb{E}_{\vartheta_0}[\psi] \leq \mathbb{E}_{\vartheta_1}[\phi] - c\,\mathbb{E}_{\vartheta_0}[\phi]$$

Andererseits gilt $\mathbb{E}_{\vartheta_0}[\psi] \leq \alpha = \mathbb{E}_{\vartheta_0}[\phi]$ und

$\mathbb{E}_{\vartheta_1}[\psi] \geq \mathbb{E}_{\vartheta_1}[\phi]$, da ψ UMP ist.

Da $c \geq 0$ folgt somit:

$$\mathbb{E}_{\vartheta_1}[\psi] - c\,\mathbb{E}_{\vartheta_0}[\psi] \geq \mathbb{E}_{\vartheta_1}[\phi] - c\,\mathbb{E}_{\vartheta_0}[\phi]$$

womit Gleichheit gilt. Also

$$(**) \quad \int (\psi(x) - \phi(x))\,(\rho_{\vartheta_1}(x) - c\,\rho_{\vartheta_0}(x))\,\mu(dx) = 0$$

Aus dem Bew von Satz 8.7 wissen wir

$$(\psi(x) - \phi(x))\,(\rho_{\vartheta_1}(x) - c\,\rho_{\vartheta_0}(x)) \leq 0 \quad \forall x$$

Wegen $(**)$ folgt daher

$$(\psi(x) - \phi(x))\,(\rho_{\vartheta_1}(x) - c\,\rho_{\vartheta_0}(x)) = 0 \quad \text{für "f.a. } x\text{"}$$

$\Rightarrow \psi(x) = \phi(x)$ für "f.a. x" auf

$$\{\rho_{\vartheta_1}(x) \neq c\,\rho_{\vartheta_0}(x)\} = \{\rho(x) \neq c\} \quad \square$$

Medikamenten bsp.: Teste

$H_0: \vartheta = \vartheta_0 = 0{,}5$ gegen $H_1: \vartheta = \vartheta_1 = 0{,}6$

$\rho_\vartheta(x) = \vartheta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\vartheta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$ und somit

ist der Likelihood-Quotient

$$\rho(x) = \frac{\rho_{\vartheta_1}(x)}{\rho_{\vartheta_0}(x)} = \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_0}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}\left(\frac{1-\vartheta_1}{1-\vartheta_0}\right)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\vartheta_1\cdot(1-\vartheta_0)}{\vartheta_0\cdot(1-\vartheta_1)}\right)}_{>1,\ \text{da } \vartheta_1 > \vartheta_0}^{\sum_{i=1}^n x_i}\left(\frac{1-\vartheta_1}{1-\vartheta_0}\right)^n$$

$$\Rightarrow y \mapsto \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_0}\,\frac{(1-\vartheta_0)}{(1-\vartheta_1)}\right)^y\left(\frac{1-\vartheta_1}{1-\vartheta_0}\right)^n \text{ wachsend}$$

107

$\Rightarrow$ Kritischer Bereich:

$$K = \{x : \cancel{L(x)} \, \varrho(x) \geq c\} = \{x : \sum_{i=1}^n x_i \geq \tilde{c}\},$$

wobei $\sum_{i=1}^n X_i \sim Bin(n, \vartheta_0)$ unter P_{ϑ_0}.

Wähle nun $\tilde{c}$:

$$P_{\vartheta_0}\left[\sum_{i=1}^n X_i \geq \tilde{c}\right] = \sum_{k=\tilde{c}}^{n} \binom{n}{k} \vartheta_0^{k} (1-\vartheta_0)^{n-k}$$

Für $\vartheta_0 = \frac{1}{2}$, $n = 20$ ergibt das $= \begin{cases} 0{,}0013 & \text{für } \tilde{c} = 17 \\ 0{,}0591 & \text{für } \tilde{c} = 16 \end{cases}$

$\tilde{c} = 16$ ist also $(1-\alpha)$-Quantil von $Bin(20, \frac{1}{2})$ mit $\alpha = 0{,}05$, denn

$$P_{\vartheta_0}\left[\sum_{i=1}^{20} X_i \geq 16\right] \geq \alpha \quad \text{und} \quad P_{\vartheta_0}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > 16\right] < \alpha$$

Wähle nun

$$\gamma = \frac{\alpha - P_{\vartheta_0}\left[\sum_{i=1}^n X_i > \tilde{c}\right]}{P_{\vartheta_0}\left[\sum_{i=1}^n X_i = \tilde{c}\right]} = \frac{0{,}05 - 0{,}0013}{0{,}0591 - 0{,}0013} = 0{,}843$$

$\hookrightarrow$ NP-Test $\quad \phi = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sum_{i=1}^{20} x_i \geq 17 \\ \gamma & \text{—''— } = 16 \\ 0 & \text{—''— } < 16 \end{cases}$

Bem: Im Bsp spielten die konkreten Werte $\vartheta_0 = 0{,}5$ und $\vartheta_1 = 0{,}6$ kaum eine Rolle. Wichtig war nur $\vartheta_0 < \vartheta_1$, was Monotonie implizierte. Dies führt zu den monotonen Likelihood-Tests, was Gegenstand der Statistik-Vorlesung ist.

$\hookrightarrow$ Def 4.6. Sei $\Theta \subset \mathbb{R}$ und T eine Statistik. Die Familie $(P_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}$ mit Likelihoodfkt ϱ_ϑ hat monotones Likelihood-Verhältnis in T, falls für alle $\vartheta_0 < \vartheta_1$

$$\frac{\varrho_{\vartheta_1}(x)}{\varrho_{\vartheta_0}(x)} = f_{\vartheta_1, \vartheta_0}(T(x)) \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

gilt, für eine monoton wachsende Fkt $f_{\vartheta_1, \vartheta_0}$ auf $\mathbb{R}$.