Bem 1.24: Im Bsp 1.10. hatten wir zwei W'räume für den einfachen Münzwurf konstruiert. Mit der ZV $X: \Omega \to \{0,1\}$, $X(K) = 1$, $X(Z) = 0$ ist es klar, dass $\mathbb{P}_X = \tilde{\mathbb{P}}$.

Bsp 1.25. (~~zweimaliger Wurf~~ Zweifacher Würfelwurf):

Sei $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ und $\mathbb{P} = \mathrm{Unif}(\Omega)$ die Gleichvtlg auf $\Omega$.

Sei $X_i: \Omega \to \{1, \dots, 6\}$ geg. durch $X_i(a_1, a_2) = a_i$ für $i = 1,2$. die Augenzahl des i-ten Wurfs.

Dann gilt $p_{X_i}(a) = \mathbb{P}[X_i = a] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $a \in \{1, \dots, 6\}$.

→ gleichvtlg auf $\{1, \dots, 6\}$

Setzt man $Y = X_1 + X_2$. Dann gilt

$$p_Y(a) = \mathbb{P}[X_1 + X_2 = a] = \begin{cases} \frac{1}{36} & a \in \{2, 12\} \\ \frac{2}{36} & a \in \{3, 11\} \\ \vdots & \end{cases}$$

$$= \frac{6 - |7 - a|}{36}, \quad a \in \{2, 3, \dots, 12\}$$

$Y$ nicht gleichverteilt!

Bsp 1.26:

Am 21. Juni 1995 wurde in der 3016. Ausspielung im Lotto „6 aus 49" die Zahlenreihe 15, 25, 27, 30, 42 und 48 gezogen. Die identische Zahlenreihe wurde am 20 Dezember 1986 gezogen. Überraschendes Ereignis?

V4L

Modell: $\Omega = \{(a_1, \dots, a_6) \in \{1, \dots, 49\}^6 : a_1 < a_2 < \dots < a_6\}$

$\mathbb{P} = \mathrm{Unif}(\Omega)$, $|\Omega| = \binom{49}{6} = 13\,983\,816$

Idee/Vorstellung: Ziehen einer Zahlenreihe $\hat{=}$ Besetzen eines Faches

Sei $X_n :=$ Zeitpunkt beim sukzessiven ~~Belegen~~ zufälligen Besetzen von $n$ Fächern, dass das erste Mal zwei Elemente in einem Fach liegen.

(hier $n = \binom{49}{6}$)

20

$X_n$ nimmt Werte $2, 3, \ldots, n+1$ an.

$X_n \geq k+1 \iff$ die ersten $k$ Teilchen fallen in verschiedene Fächer.

$$\mathbb{P}[X_n \geq k+1] = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$

$$= \prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) \qquad k = 1, 2, \ldots, n+1$$

Mittels Satz 1.8 folgt

$$\mathbb{P}[X_n \leq k] = 1 - \prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)$$

$$n = \binom{49}{6} \to \mathbb{P}[X_n \leq 3016] = 0{,}2775\ldots \approx \frac{10}{36}$$

## 1.3.1 Binomialverteilung

Def 1.27: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$. Die W'vtlg auf $\{0, 1, \ldots, n\}$ mit Massenfkt

$$p_{n,p}(k) = b_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

heißt Binomialvtlg mit Parametern $n$ und $p$ (Notation $\mathrm{Bin}(n,p)$).

Woher kommt diese Vtlg?

a) Betrachte $n$-fache Münzwurf mit Erfolgsw'keit $p$, d.h.

$\Omega = \{0,1\}^n$, ~~uU~~ $X_i(\omega) = X_i(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \omega_i \qquad 1 \leq i \leq n$

$\mathbb{P}[X_i = 1] = p$.

Setze $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ = Anzahl von "Kopf" bei $n$-fachen Wurf.

$$\mathbb{P}[Y = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

b) Ziehen mit Zurücklegen: Seien $n$ Kugeln in einer Urne, davon $pn$ weiße und $(1-p)\cdot n$ schwarze.

Wir ziehen eine Kugel, notieren die Farbe, legen sie zurück und mische gut.

Dies machen wir n-Mal.

Stat Modell: $\Omega = \{0,1\}^n = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{0,1\}\}$

$$X_i(\omega) = \omega_i = \begin{cases} 1 & \text{Kugel weiß} \\ 0 & \text{Kugel schwarz} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[X_i(\omega) = 1] = \frac{pm}{m} = p = 1 - \mathbb{P}[X_i = 0]$$

$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ . Wie oben folgt, dass $Y$ die $Bin(n,p)$ Vtlg hat.

c) Merkmalausprägungen einer Stichprobe.

n Stichproben liefern Ausprägungen in einem Raum $S$, i.e.

$\Omega = S^n$. Wir interessieren uns dafür, ob eine gewisse Ausprägung $E \subset S$ auftritt. ⤳ Definiere ZV $X_i(\omega) = \mathbb{1}_E(\omega_i) =$

$$\begin{cases} 1 & \text{Ausprägung } e \text{ tritt in } i\text{-ter Stichprobe auf} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$Y = \sum X_i$ Häufigkeit des Auftretens dieser Merkmale.

**Def 1.28** Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ diskreter W'raum. Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ heißen unabhängig (unter $\mathbb{P}$), falls $\forall$ $2 \le k \le n$, $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ gilt

$$\mathbb{P}[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] = \mathbb{P}[A_{i_1}] \cdots \mathbb{P}[A_{i_k}]$$

(Genaue Diskussion in zweitem Kapitel!)

d) Falls $A_1 \dots A_n$ unabhängig mit $\mathbb{P}[A_i] = p$ für $1 \le i \le n$, dann $(*)$ $\mathbb{P}[\text{genau } k \text{ der Ereignisse } (A_i)_{1 \le i \le n} \text{ treten ein}] = b_{n,p}(k)$

„Beweis": Sei $A_{(i_1, \dots, i_k)} = \{\omega \in \Omega : A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ treten, die anderen $A_j$ nicht$\}$.

$\Rightarrow \bigcup_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} A_{(i_1, \dots, i_k)}$ disjunkte Vereinigung

$$\Rightarrow (*) = \mathbb{P}[\;\;] = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \mathbb{P}[A_{(i_1, \dots, i_k)}] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

folgt, kennen Akkord-Modell
⤳ Akkord-Modell.

## 1.3.2 Poissonvtlg

**Def 1.29.** Die W'vtlg auf $\{0,1,2,\dots\}$ mit Massenfkt

$$p_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,\dots$$

heißt Poisson-vtlg. mit Parameter/Intensität $\lambda$.

Woher kommt diese Vtlg:

a) Warteschlange:

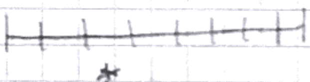
Ziel: Vtlg der Anzahl der Kunden, die im Intervall $[0,t]$ ankommen.

Annahme: Kunden in einer Warteschlange kommen unabhängig voneinander zu zufälligen gleichverteilten Zeiten an

·) Wir nehmen $n$ so groß, dass in $(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ mit großer W'keit höchstens ein Kunde ankommt.

$\rightsquigarrow A_k = \{$dass mindestens ein Kunde kommt in $(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]\}$

·) Wenn ein Kunde in der Zeiteinheit 1 (ganz Intervall $[0,1]$) ankommt $\rightsquigarrow \mathbb{P}[A_k] \approx \frac{1}{n}$



(1 Kunde auf n „Fälle").

Sei $\lambda := \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}[A_k]}{\frac{1}{n}} \in (0,\infty)$

·) Definiere ZV

$N$ = Anzahl der ankommenden Kunden in $[0,t]$

$$\mathbb{P}[N = l] \underset{n \text{ groß}}{\approx} \mathbb{P}[\text{genau } l \text{ der } \lfloor t\cdot n \rfloor \text{ Ereignisse } (A_i) \text{ treten ein}]$$

$$\overset{\text{Unabh.}}{\approx} b_{nt, \frac{\lambda}{n}}(l) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Satz 1.30}} \frac{(\lambda t)^l e^{-\lambda t}}{l!}$$

**Satz 1.30** (Poissonapproximation der Binomialvtlg).

Sei $\lambda \in (0,\infty)$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_{n,\frac{\lambda}{n}}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

Beweis:
$$b_{n,\frac{\lambda}{n}}(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \longrightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \square$$

Bem: Poissonvtlg gut für Modellierung der Häufigkeit seltener Ereignisse und damit zur Approx der Binomialvtlg mit kleiner Erfolgswkeit $p$.
Für größere Erfolgsw'keiten ist die Normalapprox besser geeignet (→ später).

### 1.3.3 Hypergeom. Vtlg.

Def 1.31: Seien $m, r, n \in \mathbb{N}_0$ mit $r \leq m$, $n \leq \min(r, m-r)$.
Die ~~W'keits~~ W'vtlg auf $\{0, 1, \ldots, n\}$ mit Massenfkt

$$h_{m,r,n}(k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{m-r}{n-k}}{\binom{m}{n}}$$

heißt hypergeometrische Vtlg mit Parametern $m, r$ und $n$.

Woher kommt diese Vtlg?

a) Stichproben ohne Zurücklegen.
~~Wald~~ Wald mit $m$ Bäumen, $r$ Laubbäume, $m-r$ Nadelbäume
Wähle zufällig $n$ Bäume aus mit $n \leq \min(r, m-r)$.
$\Omega = \{$ Gruppen von $n$ Bäumen $\}$, $|\Omega| = \binom{m}{n}$
$P = \mathrm{Unif}(\Omega)$
$N: \Omega \to \mathbb{N}$, $N(\omega) = \#$ Laubbäume der Stichprobe $\omega$

$$P\{N = k\} = \frac{|\{\omega \in \Omega : N(\omega) = k\}|}{|\Omega|} = \frac{\binom{r}{k}\binom{m-r}{n-r}}{\binom{m}{n}}$$

b) Texas Hold'em Poker.

## 1.4 Erwartungswert und Varianz

In diesem Abschnitt betrachten wir reelle ZV. Eine erste und wichtige Kenngröße ist der Wert der im Mittel angenommen wird, der Erwartungswert.

**Def 1.32:** Sei $X$ eine reelle ZV auf einem diskreten W'raum $(\Omega, P)$ (mit abzählbarem Wertebereich $S \subset \mathbb{R}$). Der Erwartungswert (bzgl $P$) von $X$ ist definiert durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{s \in S} s \cdot \mathbb{P}[X = s] = \sum_{s \in S} s \, p_X(s) .$$

**Bem 1.33.** •) $\mathbb{E}X$ ist wohldefiniert, falls $X \geq 0$, Damit ist $\mathbb{E}X \in [0, \infty]$.

•) $\mathbb{E}X$ ist wohldefiniert, falls $\sum_{s \in S} |s| \, p_X(s) < \infty$.

**Bem 1.34:** Der Erwartungswert von $X$ hängt nur von der Vtlg $\mathbb{P}_X$ von $X$ auf $\mathbb{R}$ ab.

**Bsp 1.35:** a) (Gleichverteilung) auf Menge $\{a_1, \dots, a_n\}$, hier

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \hat{=} \text{ arithmetischen Mittel}$$

b) (Bernoulli ZV). Sei $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ein Ereignis mit $P[A] = p$ und $X(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega)$.

Dann
$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot P[X=1] + 0 \cdot P[X=0]$$
$$= P[A] = p$$

c) (Poissonvtlg) Sei $X$ eine Poisson-verteilte ZV mit Intensität $\lambda$, kurz $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, dann

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda$$

d) (Binomialvtlg) Sei $X$ eine ZV mit $\mathrm{Bin}(n,p)$-Vtlg; kurz $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$. Dann

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Binomialformel gibt: $(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

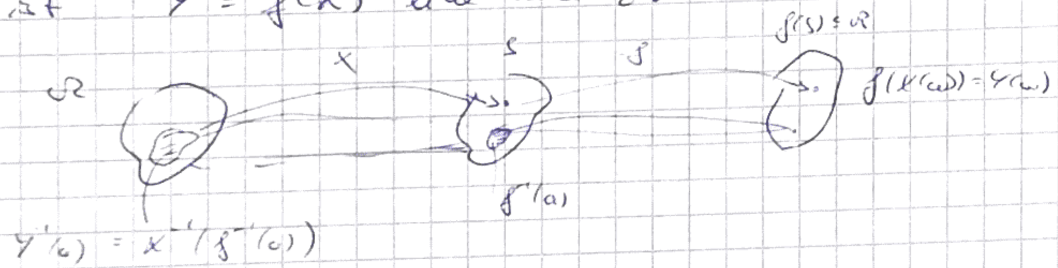
$\hookrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \cdot k = p \frac{d}{dp} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$= p \frac{d}{dp} (p+q)^n = p\, n\, (p+q)^{n-1}$

Setze $q = 1-p \Rightarrow \mathbb{E} X = n \cdot p$.

Geg $X: \Omega \to S \subseteq \mathbb{R}$ und $f: S \to \mathbb{R}$ eine Fkt

so ist $Y = f(X)$ eine neue ZV:




Was ist $\mathbb{E}[f(X)]$ ?

Satz 1.36 (Transformationssatz)

Es gilt $\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{s \in S} f(s)\, \mathbb{P}[X=s]$

[wohldefiniert, falls $f \geq 0$ oder $\sum |f(s)|\, \mathbb{P}[X=s] < \infty$).

Beweis. $\mathbb{E}[f(X)] \overset{\text{Def } 1.32}{=} \sum_{y \in f(S)} y\, \mathbb{P}[f(X) = y]$

$= \sum_{y \in f(S)} y\, \mathbb{P}\Big[\bigcup_{s \in f^{-1}(y)} \{X = s\}\Big]$

$= \sum_{y \in f(S)} y \sum_{s \in f^{-1}(y)} \mathbb{P}[X=s]$

$= \sum_{y \in f(S)} \sum_{s \in f^{-1}(y)} \overbrace{f(s)}^{=y}\, \mathbb{P}[X=s]$

$\bigcup_{y \in f(S)} \{s \in S : f(s) = y\} = \{s \in S\}$

$= \sum_{s \in S} f(s)\, \mathbb{P}[X=s]$ □

(26) Der Erwartungswert hat zwei wichtige Eigenschaft

i) Linearität (-> Satz 1.37)

ii) Monotonie (-> Satz 1.38)

Satz 1.37 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein diskreter W'raum. Seien $X_1 : \Omega \to S_1$, $X_2 : \Omega \to S_2$ zwei reelle ZV. Falls $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, $\mathbb{E}[|X_2|] < \infty$. dann gilt für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2] = \lambda_1 \mathbb{E} X_1 + \lambda_2 \mathbb{E} X_2$$

Beweis. Sei $f : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

$$\mathbb{E}[\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2] = \mathbb{E}[f(X_1, X_2)]$$

$$= \sum_{\substack{x_1 \in S_1 \\ x_2 \in S_2}} f(x_1, x_2) \, \mathbb{P}[X_1 = x_1, X_2 = x_2] = (*)$$

Wegen $|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2| \leq |\lambda_1| |x_1| + |\lambda_2| |x_2|$ folgt

$$|\mathbb{E}[\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2]| \leq |\lambda_1| \mathbb{E}[|X_1|] + |\lambda_2| \mathbb{E}[|X_2|] < \infty$$

nach Voraussetzung so dass die Summe in $(*)$ abs. konv.

$$(*) = \sum_{\substack{x_1 \in S_1 \\ x_2 \in S_2}} (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \, \mathbb{P}[X_1 = x_1, X_2 = x_2]$$

$$= \lambda_1 \sum_{x_1 \in S_1} x_1 \sum_{x_2 \in S_2} \mathbb{P}[X_1 = x_1, X_2 = x_2] + \lambda_2 \sum_{x_2 \in S_2} x_2 \sum_{x_1 \in S_1} \mathbb{P}[X_1 = x_1, X_2 = x_2]$$

$\{X_1 = x_1\} = \bigcup_{x_2 \in S_2} \{X_1 = x_1, X_2 = x_2\}$ disjunkt!

$$= \lambda_1 \sum_{x_1 \in S_1} x_1 \mathbb{P}[X_1 = x_1] + \lambda_2 \sum_{x_2 \in S_2} x_2 \mathbb{P}[X_2 = x_2]$$

$$= \lambda_1 \mathbb{E} X_1 + \lambda_2 \mathbb{E} X_2$$

$\square$

Satz 1.38 Seien $X_1, X_2$ wie in Satz 1.37. Zusätzlich nehmen wir an, dass $\forall \omega \in \Omega$ $X_1(\omega) \leq X_2(\omega)$.
Dann $\mathbb{E}[X_1] \leq \mathbb{E}[X_2]$

Beweis. Da $X_2(\omega) - X_1(\omega) \geq 0$ folgt
$\mathbb{E}[X_2 - X_1] \geq 0$ und Linearität (Satz 1.37)
impliziert $0 \leq \mathbb{E}[X_2 - X_1] = \mathbb{E}X_2 - \mathbb{E}X_1$. □

Bsp 1.39. Seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ Ereignisse mit $\mathbb{P}[A_k] = p$ für $k = 1, \dots, n$. Setze $X_k = \mathbb{1}_{A_k}$, $k = 1, \dots, n$. Dann $X_k \sim$ Bernoulli$(p)$, d.h. $\mathbb{P}[X_k = 1] = p = 1 - \mathbb{P}[X_k = 0]$, und $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$ hat Erwartungswert
$$\mathbb{E}[S_n] \overset{\text{Satz 1.37}}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k] = np$$

Das verallgemeinert den Fall, dass $A_1, \dots, A_n$ unabhängig sind (→ Abschnitt 1.3.1 d)). Gilt $S_n \sim \mathrm{Bin}(n,p)$?

↳ Wie aussagekräftig ist der Erwartungswert für eine Vtlg?

A. Der Erwartungswert ist eine von vielen Kenngrößen. Eine wichtige Größe, um die Streuung um den Erwartungswert zu messen, ist die Varianz:

Def 1.40. Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter W'raum und $X$ eine reelle ZV mit $\mathbb{E}X^2 < \infty$. Dann ist die Varianz von $X$ (bzgl $\mathbb{P}$) definiert als
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$$

Bem 1.41. i) Ist $\mathbb{E}X \in \mathbb{R}$ bekannt, so ist $\mathrm{Var}(X)$ ein Bsp für die Trafo-formel (Satz 1.36) mit $g(x) = (x - \mathbb{E}X)^2$.
ii) Die Varianz hängt genau wie der Erwartungswert nur von der Vtlg $\mathbb{P}_X$ ab.

(28) Bem 1.42: Sei $X$ reelle ZV.

a) $Var(X) \geq 0$ und $Var(X) = 0 \iff P[X = \mathbb{E}X] = 1$,
d.h. $X(\omega)$ ist eine Konstante.

b) Linearität von $\mathbb{E}$ impliziert
$$Var(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$$
und $Var(\lambda X) = \lambda^2 Var(X)$

c) Wenn $X_1, \dots, X_n$ unabhängig, d.h. $\forall\, 2 \leq k \leq n,\ 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$
$P[X_{i_1} \in A_{i_1}, \dots, X_{i_k} \in A_{i_k}] = P[X_{i_1} \in A_{i_1}] \cdot \ldots \cdot P[X_{i_k} \in A_{i_k}]$, $\forall A_i \in S_i$,
dann $Var(X_1 + \dots + X_n) = Var(X_1) + \dots + Var(X_n)$.

Bsp 1.43

a) $X \sim Ber(p)$, $\mathbb{E}X = p$, $Var(X) = p(1-p)$

b) $X \sim Bin(n,p)$, $\mathbb{E}X = np$, $Var(X) = np(1-p)$

c) $X \sim Poi(\lambda)$, $\mathbb{E}X = \lambda$, $Var(X) = \lambda$

Rechnungen:

a) $Var(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 1 \cdot p - p^2 = p(1-p)$

b) Methode 1. $Var(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$ mit $\mathbb{E}X = np$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Strategie wie in Bsp 1.35 d)

$$\sum k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum k(k-1) \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + k \sum k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$= p^2 \frac{d^2}{dp^2}\Big(\underbrace{\sum p^k q^{n-k} \binom{n}{k}}_{=(p+q)^n}\Big) + p \frac{d}{dp} \sum \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$= p^2\, n(n-1)(p+q)^{n-2} + pn(p+q)^{n-1}$$

$$\overset{q=1-p}{=} n^2 p^2 + np(1-p) \Rightarrow Var(X) = np(1-p)$$

Methode 2: $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ , $Y_i \sim Ber(p)$
unabhängig...

Bem 1.42 c)
$\Rightarrow$ $Var(X) = n\, Var(Y_1) = n\, p(1-p)$.

Anwendung: Alternativer Beweis von Vor. 1.9

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \mathbb{P}[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}]$$

Wir berechnen das Gegenereignis:

$$\mathbb{P}[(A_1 \cup \ldots \cup A_n)^c] = \mathbb{P}[A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c}] = \mathbb{E}[\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i^c}]$$

$$= \mathbb{E}[\prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i})]$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_{i_1}} \cdots \mathbb{1}_{A_{i_k}}]$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \mathbb{P}[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}]$$

und $\mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n] = 1 - \mathbb{P}[(A_1 \cup \ldots \cup A_n)^c]$
liefert das Ergebnis.

(50) 2. Bedingte W'keiten und Unabhängigkeit

2.1 Bedingte W'keit

Bsp: In einer fiktiven Statistik über Kleinkinder werden die Merkmale "krabbelt" und "läuft" zeitlich erfasst.

Seien $A = \{$läuft mit 10 Monaten$\}$

$B = \{$krabbelt mit 6 Monaten$\}$

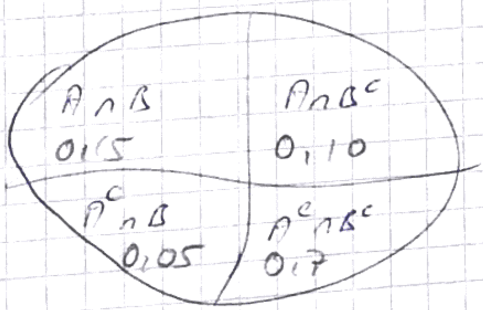
zwei Ereignisse mit

$\mathbb{P}[A] = 0{,}25$, $\mathbb{P}[B] = 0{,}2$

Frage: Wie wahrscheinlich ist es, dass ein Kind, das mit 6 Monaten krabbelte, mit 10 Monaten läuft?

Für eine sinnvolle Antwort sind mehr Infos notwendig, z.B. weitere W'keiten:

$\Omega$




$\mathbb{P}$

Annahme: Kind ist "zufälliges Kind in der Statistik":

Wissen: $B$ tritt ein $\rightsquigarrow$ Schreibe $\Omega = \Omega_B \cup \Omega_B^c$

mit $\Omega_B = \{\omega \in \Omega : B \text{ tritt ein}\}$

Um die Frage zu beantworten definieren wir neue W'keit auf $\Omega$, mit Massenfkt $p(\cdot \mid B)$, die die Information $\omega \in B$ berücksichtigt:

$$p(\omega \mid B) = 0 \qquad \omega \in \Omega_B^c$$

und

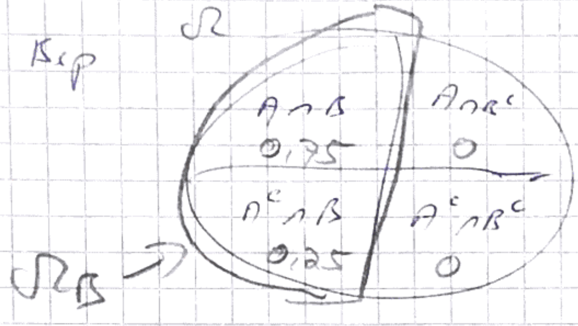
$$p(\omega \mid B) = \text{const} \cdot p(\omega) \qquad \omega \in \Omega_B,$$

da die Info $\omega \in B$ für alle $\omega \in \Omega_B$ identisch ist.

Normierung $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega \mid B) = \sum_{\omega \in \Omega_B} p(\omega \mid B) = 1$

liefert dann $\text{const} = \frac{1}{\mathbb{P}[B]} \rightarrow p(\omega \mid B) = \frac{1}{\mathbb{P}[B]} p(\omega)$

Im Bsp




Antwort: Mit W'keit $0{,}75$ wird das Kind mit 10 Karten laufen.

Def 2.1: Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein W'raum, $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse mit $\mathbb{P}[B] \neq 0$. Dann heißt

$$\mathbb{P}[A \mid B] := \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

die bedingte W'keit von A gegeben B

Bem 2.2: a) $A \mapsto \mathbb{P}[A \mid B]$ ist eine W'vtlg auf $(\Omega, \mathbb{P})$, die bed. Vtlg geg B

b) $\mathbb{P}[\cdot \mid B]$ hat Gewichte

$$p(\omega \mid B) = \begin{cases} \frac{p(\omega)}{\mathbb{P}[B]} & \omega \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

c) Sei $X: \Omega \to S$ reelle ZV mit Vtlg $\mathbb{P}[\cdot \mid B]$. Dann hat X Erwartungswert

$$\mathbb{E}[X \mid B] = \sum_{s \in S} s \, \mathbb{P}[X = s \mid B],$$

die Bed. Erwartung von X geg. B.

(32)

Bsp 2.3

a) $\mathbb{P} = \mathrm{Unif}(\Omega)$ auf endl. $\Omega$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[A \mid B] = \frac{|A\cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{|A\cap B|}{|B|} \quad , A, B \subseteq \Omega, B \neq \emptyset.$$

b) Wir werfen n-Mal eine faire Münze, k mal erhalten wir Kopf. Was ist W'keit, dass bei den ersten $m < k$ Würfen immer Kopf fällt?

Modell: $\Omega = \{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \mid x_k \in \{0,1\}\}$

wobei

$$x_k = \begin{cases} 1 & \text{Ausgang } k\text{-te Wurf Kopf} \\ 0 & \text{Zahl} \end{cases}$$

$\mathbb{P} = \mathrm{Unif}(\Omega)$.

$X_k(\omega) = \omega_k \qquad 1 \le k \le n$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[X_1 = \dots = X_m = 1 \mid \sum_{i}^{n} X_i = k]$$

$$= \mathbb{P}[X_1 = \dots = X_m = 1, \sum_{l=m+1}^{n} X_l = k-m] \Big/ \mathbb{P}[\sum_{i=1}^{n} X_i = k]$$

$$= \frac{2^{-n}\binom{n-m}{k-m}}{2^{-n}\binom{n}{k}} = \frac{(n-k)!}{n!} \frac{k!}{(k-m)!}$$

Der folgende Satz zeigt wie man unbedingte W'keiten aus Bedingten berechnen kann.

Satz 2.4 (Formel der totalen W'keit):

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ diskreter W'raum. $\Omega = \bigcup_{i\in I} H_i$ disjunkte Zerlegung in abzählbar viele Mengen $H_i$ („Hypothesen"). Dann gilt für $A \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{\substack{i\in I \\ \mathbb{P}[H_i]\neq 0}} \mathbb{P}[A \mid H_i] \cdot \mathbb{P}[H_i]$$

Beweis: $A = A \cap \Omega = A \cap (\bigcup_{i\in I} H_i) = \bigcup_{i\in I} (A \cap H_i)$ (disjunkt)

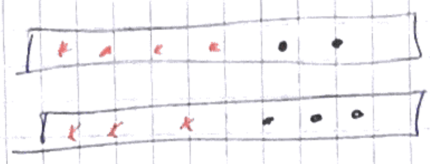
$$\mathbb{P}[A] \overset{\sigma\text{-Add}}{=} \sum_{i\in I} \mathbb{P}[A \cap H_i] = \sum_{i\in I, \mathbb{P}[H_i]\neq 0} \mathbb{P}[A \mid H_i]\, \mathbb{P}[H_i] \,,$$

da aus $\mathbb{P}[A \cap H_k] \leq \mathbb{P}[H_k]$ und $\mathbb{P}[H_k] = 0$ folgt, dass auch $\mathbb{P}[A \cap H_k] = 0$. $\square$

Bsp 2.5. Urne A enthält 2 rote und 3 grüne, Urne B 3 rote und 2 grüne Kegeln.
Wir ziehen einen Kegel ($K_1$) aus A und legen ihn in Urne B. Dann ziehen wir einen Kegel ($K_2$) aus B. $\mathbb{P}[K_2 \text{ ist rot?}]$

Fall 1: $K_1$ rot

Fall 2: $K_1$ grün



Satz 2.4 $\Rightarrow$
$$\mathbb{P}[K_2 \text{ rot}] = \mathbb{P}[K_2 \text{ rot} \mid K_1 \text{ rot}]\, \mathbb{P}[K_1 \text{ rot}] + \mathbb{P}[K_2 \text{ rot} \mid K_1 \text{ grün}]\, \mathbb{P}[K_1 \text{ grün}] = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{17}{30}$$

## 2.1.1 Bayessche Regel

Übernimm Setting wie in Satz 2.4

Interpretation: $H_i$: Hypothesen, a-priori

$\mathbb{P}[H_i]$: a-priori Einschätzung von W'keit (z.B. Schadensklasse gegen gew. Ausprägung)

Angenommen Ereignis $A$ mit $\mathbb{P}[A] \neq 0$ tritt ein (z.B. 10 Jahre unfallfrei) und wir kennen $\mathbb{P}[A \mid H_i]$ für alle $i$ mit $\mathbb{P}[H_i] \neq 0$.
Was ist die a-posteriori W'keit für $H_i$?

Korollar 2.6: Für $A \subset \Omega$ mit $\mathbb{P}[A] \neq 0$ gilt für $i \in I$ mit $\mathbb{P}[H_i] \neq 0$:
$$\mathbb{P}[H_i \mid A] = \frac{\mathbb{P}[A \mid H_i] \cdot \mathbb{P}[H_i]}{\sum\limits_{\substack{k \in I \\ \mathbb{P}[H_k] \neq 0}} \mathbb{P}[A \mid H_k] \cdot \mathbb{P}[H_k]}$$