$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{k,\ell=1}^n \mathrm{Cov}(X_k, X_\ell)$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k) + 2 \sum_{1\le k<\ell\le n} \mathrm{Cov}(X_k, X_\ell) \qquad \square$$

3.1 Gesetz der großen Zahlen.

Seien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ gleichverteilte ZV und $m_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ das arithmetische Mittel. Falls $X_1 = X_2 = \ldots = X_n$ ist $m_n \neq \mathbb{E}[m_n]$. Wann ist $m_n \approx \mathbb{E}[m_n]$?

Satz 3.7: (Schwache Gesetz der großen Zahlen).
Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ mit

i) $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0 \qquad \forall i \neq j$

ii) $v := \sup_{k\ge1} \mathrm{Var}(X_k) < \infty$

Sei $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Dann gilt $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n}\right| \ge \varepsilon\right] \le \frac{v}{\varepsilon^2 \cdot n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Bem 3.8: Falls zusätzlich $\mathbb{E}X_k = m \quad \forall k \ge 1$ so ist $\mathbb{E}S_n = n\,m$ und man sagt, dass $\frac{S_n}{n}$ stochastisch (bzw. in W'keit) gegen m konvergiert, d.h. $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \ge \varepsilon\right] \to 0 .$$

Der Beweis beruht auf der Tchebichev Ungleichung:

Lemma 3.9: Sei $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ und $a > 0$. Dann

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}X| \ge a] \le \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$$

Beweis: $\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}X| \ge a] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{|X-\mathbb{E}X|\ge a\}}\right]$

Wegen $\mathbb{1}_{\{|X-\mathbb{E}X|\ge a\}} \frac{a^2}{a^2} \le \frac{|X-\mathbb{E}X|^2}{a^2}$ folgt

(56) $\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}X| \geq a] \leq \mathbb{E}\left[\frac{|X-\mathbb{E}X|^2}{a^2}\right] = \frac{1}{a^2}\operatorname{Var}(X)$. □

Beweis von Satz 3.7.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right]\right| \geq \varepsilon\right] \overset{\text{Lemma 3.5}}{\leq} \frac{1}{\varepsilon^2}\operatorname{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}\operatorname{Var}(S_n) \overset{i)}{=} \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}\sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(X_i) \overset{ii)}{\leq} \frac{V}{\varepsilon^2 n} \quad □$$

Es gibt noch weitere wichtige Ungleichungen, die wir nennen wollen:

Markov: Falls $\mathbb{E}X$ existiert, gilt $\forall a > 0$ $\mathbb{P}[|X| \geq a] \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}[|X|]$

Jensen: $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und $\mathbb{E}[|\varphi(X)|] < \infty$, dann gilt
$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$ (vgl. Def von konvexer Fkt).

Die Aussage von Satz 3.7 kann signifikant verstärkt werden zu "fast-sicherer Konvergenz" (Einführung i die WT):

Thm 3.10 (Starke Gesetz der großen Zahlen): (Etemadi)
Ist $(X_n)_n$ eine Folge von ZV, die identisch verteilt und paarweise unabhängig sind mit $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ so gilt

$$\mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}X_i) = 0\right] = 1.$$

4. Normalapproximation der Binomialvtlg, Satz von de-Moivre Laplace

Erinnerung: Eine ZV ~~X~~ S_n mit ~~Vtlg auf~~ Werten in $\{0,1,\dots,n\}$ und Vtlg

$$\mathbb{P}[S_n = k] =: b_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0,1,\dots,n$$

heißt binomialverteilt mit Parametern n und p.

Für festes p und moderat große n, k (z.B. $n = 100$, $k = 50$) ist $b_{n,p}(k)$ schwer zu berechnen! In Satz 1.30 haben wir für "seltene Ereignisse" die Poissonapproximation kennen gelernt.

Man wollen wir für "häufige" Ereignisse die Normal-approximation herleiten. Basis ist die Stirling-Formel.

Satz 4.1: $\lim \frac{n!}{(\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n})} = 1$

Beweis: z.B. O. Forster: Analysis I. §20 Satz 6.

Frage: Sinnvoller Grenzwert für $b_{n,p}(k)$?

Dazu: Welche Größenordnung ist $b_{n,p}(k)$?

$$\frac{b_{n,p}(k+1)}{b_{n,p}(k)} = \frac{(n-k)\,p}{(k+1)(1-p)}$$

und daher

$$\frac{b_{n,p}(k+1)}{b_{n,p}(k)} < 1 \iff (n+1)p < (k+1)$$

$\Rightarrow$ $k \mapsto b_{n,p}(k)$ hat Maximum bei $k = [(n+1)p]$

$$\overset{\text{Satz 4.1}}{\Rightarrow} b_{n,p}([(n+1)p]) \simeq b_{n,p}([n p])$$

$$\simeq \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\; p^{np} (1-p)^{n-np}}{\left(\frac{np}{e}\right)^{np} \sqrt{2\pi np} \left(\frac{n-np}{e}\right)^{n-np} \sqrt{2\pi(n-np)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi n p(1-p)}} \quad (\to 0 \quad n\to\infty)$$

wobei ~~für~~ zwei Folgen $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ asymptotisch äquivalent sind $a_n \simeq b_n$ falls $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

$\Rightarrow$ Für einen vernünftigen Grenzwert sollten wir uns ganze Bereiche anschauen, also

$$\sum_{\alpha_n a + c_n \le k \le \alpha_n b + c_n} b_{n,p}(k) \quad , a,b \in \mathbb{R}$$

$(\alpha_n)_n, (c_n)_n$ Folgen.

58

Wir wissen: $\mathbb{E}\, S_n = n \cdot p$

Also können wir erwarten, dass für $c_n = n \cdot p$ obige Summe von einer relevanten Größenordnung ist, d.h. wir betrachten Bereich um den Erwartungswert.

Da $\max_k b_{n,p}(k) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi n p(1-p)}}$ ist ~~da~~ zu erwarten, dass für k nahe bei $n \cdot p$ die Terme ~~ebenfalls~~ $b_{n,p}(k)$ die Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$ haben. $\Rightarrow$ Wähle $\alpha_n = \sqrt{np(1-p)}$.

Satz 4.2 (Lokaler Grenzwertsatz):
Seien $0 < p < 1$, $q = 1-p$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\lim_{n \to \infty} a_n^3 / \sqrt{n} = 0$. Dann gilt mit $x_k := x_k(n,p) := \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{k : |x_k| \le a_n} \left| \frac{\sqrt{2\pi npq}\; b_{n,p}(k)}{e^{-x_k^2/2}} - 1 \right| = 0$$

(! glm. Konvergenz)

Bem 4.3: i) $a_n = A$ ist zulässige Folge in Satz 4.2.

ii) Notation: $\alpha(k,n), \beta(k,n) > 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$, $0 \le k \le n$ so bedeutet (im folgenden Beweis) $\alpha(k,n) \sim \beta(k,n)$, dass für $(a_n)_n$ wie in Satz 4.2

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{k : |x_k| \le a_n} \left| \frac{\alpha(k,n)}{\beta(k,n)} - 1 \right| = 0$$

iii) Damit folgt: $\alpha(k,n) \sim \beta(k,n)$, $\alpha'(k,n) \sim \beta'(k,n)$
$\Rightarrow \alpha(k,n)\, \alpha'(k,n) \sim \beta(k,n) \beta'(k,n)$.

In der Tat:

$$\left| \frac{\alpha \cdot \alpha'}{\beta \cdot \beta'} - 1 \right| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\le} \left| \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right| \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} + \left| \frac{\alpha'}{\beta'} - 1 \right|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\le} \left| \frac{\alpha'}{\beta'} - 1 \right| \left| \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right| + \left| \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right| + \left| \frac{\alpha'}{\beta'} - 1 \right|$$

Beweis von Satz 4.2:

Mit $k = np + \sqrt{npq}\, x_k$, $n-k = nq - \sqrt{npq}\, x_k$

folgt $k \sim np$ und $n-k \sim nq$

Schreibe $\varphi(n,k) = \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}$. Damit folgt

Satz 4.1
$$\Rightarrow \quad b_{n,p}(k) \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}\, \varphi(n,k) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi npq}}\, \varphi(n,k)$$

Mit der relativen Entropie von x bzgl p: ~~$H(x|p)$~~
$$H(x|p) = x \log\left(\frac{x}{p}\right) + (1-x)\log\left(\frac{1-x}{1-p}\right)$$

gilt nun
$$-\log \varphi(n,k) = n\, H(k/n \,|\, p)$$

Taylor-Entwicklung von $H(\cdot\,|p)$ um den Wert p liefert mit $H(p|p) = 0$
$$H'(p|p) = 0 \quad \text{und} \quad H''(p|p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{pq},$$

dass
$$H(x|p) = \frac{(x-p)^2}{2pq} + \psi(x-p),$$

wobei ψ das Restglied der Taylorentwicklung bezeichnet, mit Abschätzung (in jedem endl. Intervall, das p enthält)
$$|\psi(x-p)| \le c\,|x-p|^3, \quad \text{für geeignete Konstante}$$

$$\Rightarrow \left| -\log \varphi(n,k) - \frac{n\left(\frac{k}{n} - p\right)^2}{2pq} \right| \le c\, n \left|\frac{k}{n} - p\right|^3$$

Wegen $x_k = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$ folgt für eine Konstante $c < c' < \infty$

$$\frac{|k-np|^3}{n^2} = c'\, \frac{|x_k|^3}{\sqrt{n}}$$

(60) Wählen wir k mit $|x_k| \le a_n$ liegt wegen der Annahme an $(a_n)_n$ die rechte Seite gegen null. Da aber

$$\frac{n\left(\frac{k}{n}-p\right)^2}{2pq} = \frac{x_k^2}{2}$$ erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k:\,|x_k|\le a_n} \left| \frac{\varphi(n,k)}{e^{-x_k^2/2}} - 1 \right| = 0 \qquad \square$$

Bsp 4.4: Wir werfen 1200 mal einen fairen Würfel. Was ist die W'keit dafür 200-mal / 250-mal eine 6 zu werfen?

$$x_{200} = 0 \;, \quad x_{250} = \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{10}} \approx 3{,}873$$

$$b_{1200,\frac{1}{6}}(200) \approx 0{,}0309019$$

$$b_{1200,\frac{1}{6}}(250) \approx 0{,}0000170913$$

Die Güte der Approximation hängt von der Fehlerabschätzung ab. Dies ist technisch aufwendig und Gegenstand weiterführender Vorlesungen.

Der folgende Satz summiert die Beiträge des lokalen Grenzwertsatzes um eine „Bereichs-W'keiten" zu approximieren.

Satz 4.5: (de Moivre-Laplace 1714, 1812)
Für $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a<b$ gilt mit der obigen Notation

$$\lim_{n\to\infty} P\left[a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\,dx$$

Beweis: Idee: Riemannsummen approximation plus Satz 4.2

Für $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ist $\{S_n = k\} = \{(S_n - np)/\sqrt{npq} = x_k\}$

$$\Rightarrow \quad P\{a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\} = \sum_{k:\, a \le x_k \le b} P\{S_n = k\} = \sum_{k:\, a \le x_k \le b} b_{n,p}(k)$$

~~Mit~~ $\cancel{x_{k+1} - x_k = \frac{1}{\sqrt{npq}}}$ ~~folgt mit Satz~~

Setze
$$R_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k:\, a \le x_k \le b} e^{-x_k^2/2} (x_{k+1} - x_k)$$

$$= \sum_{k:\, a \le x_k \le b} \varphi(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

mit $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Die glm. Kvgz. in Satz 4.2 impliziert, dass der Quotient von $P[a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le b]$ und R_n gegen 1 kvgt, d.h. $\exists$ Nullfolge $(\varepsilon_n)_n$, $\varepsilon_n > 0$, s.d.

$$(*) \qquad R_n(1 - \varepsilon_n) \le P\{a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\} \le R_n(1 + \varepsilon_n).$$

Wenn k von 0 bis n läuft variiert x_k im Intervall $I_n = [-\sqrt{np/q}, \sqrt{nq/p}]$ mit Schrittlänge $x_{k+1} - x_k = \frac{1}{\sqrt{npq}}$.
Für große n umfasst I_n das Intervall $[a, b]$ und die in $[a,b]$ fallende Punkte x_k zerteilt $[a,b]$ in Teilintervalle der Länge $\frac{1}{\sqrt{npq}}$. Ist nun der kleinste bzw. größte Wert von k mit $a \le x_k \le b$ gleich j bzw. l, dann ist $x_{j-1} < a \le x_j \le \dots \le x_l \le b < x_{l+1}$
und
$$R_n = \sum_{k=j}^{l} \varphi(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Das ist also eine Riemann-summe für das Integral $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ und der Satz folgt mit $(*)$.

$\square$

(2)

Mit $\Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} \varphi(x)\,dx$ gilt $\int_a^b \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$

Setze $S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$

Für $a > 0$ gilt $1 = \mathbb{P}[-a \leq S_n^* \leq a] + \mathbb{P}[|S_n^*| > a]$

Mit Lemma 3.9 folgt: $\mathbb{P}[|S_n^*| > a] \leq \frac{1}{a^2} \mathrm{Var}(S_n^*) = \frac{1}{a^2}$

Mit Satz 4.4 folgt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[-a \leq S_n^* \leq a] = \int_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx$

$\Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{a^2} \leq \int_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx \leq 1 \quad \forall a > 0$

$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1.$ (Mit analytischen ~~Metho~~ Methoden oder Polarkoordinaten).

Bemerkung 4.6: Satz 4.5 ist eine Verschärfung (Präzisierung) des schwachen Gesetzes der großen Zahlen (ÜA).

Bemerkung 4.7: In der "Einführung in die WT" wird eine allg. Version von Satz 4.5 bewiesen: Der zentrale Grenzwertsatz:
Seien $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von u.i.v ZV mit ~~Erwartungs~~
$\mathbb{E}X_1 = \mu$, ~~und~~ $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Betrachte

$$S_n^* = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}. \quad (\mathbb{E}S_n^* = 0,\ \mathrm{Var}(S_n^*) = 1)$$

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[S_n^* \leq z] = \Phi(z)$.

Bsp 4.8: (Außersinnliche Wahrnehmung): (1975, Univ California, Davis)
Eine Maschine wählt zufällig die Symbole A, B, C, D und die Versuchsperson soll raten welches. ~~Ein Wissenschaftler~~ C. Tart nahm 15 Personen mit vermuteten "hellseherischen Fähigkeiten" und testet jede 500 mal. Von den entstandenen 7500 Versuchen waren 2006 Treffer. Zufälliges Raten erklärt $\approx 7500/4 = 1875$ Treffer. Sind die restlichen 131 Treffer durch

Zufallsschwankungen zu erklären?

Sei S_n = # Treffer unter Annahme des zufälligen Ratens.
Der Satz von de Moivre Laplace mit

$$n = 7500, \quad p = \frac{1}{4}, \quad q = 1-p = \frac{3}{4}$$

liefert

$$\mathbb{P}[S_n \geq 2006] = \mathbb{P}\left[\frac{S_n - 1875}{\sqrt{7500 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}} \geq \frac{131}{\sqrt{7500 \cdot \frac{3}{16}}}\right]$$

$$\overset{\text{Satz 4.5}}{\approx} \int_{3,5}^{\infty} \varphi(x)\, dx \overset{1-\Phi(3,5)}{=} \approx 0{,}0023 \quad \text{Tabelle}$$

$\Rightarrow$ W'keit sehr klein, dass Schwankung durch Zufall zu Stande kam. (Aber später wurde fest gestellt, dass der Zufallsgenerator sehr schlecht war).

Weitere Anwendung von Satz 4.5 ist die Abschätzung der Größe einer Stichprobe, um Aussagen über den Parameter einer Binomialvtlg mit einer gewissen Genauigkeit machen zu können:

Bsp 4.9: In einer Population will man den Anteil an Linkshändern mit 95% Sicherheit auf 1% Genauigkeit bestimmen. Wie viele Personen sollte man dazu (mit Zurücklegen) befragen?

Sei S_n = # Linkshänder in Stichprobe

$\leadsto \frac{S_n}{n} \mathrel{\hat{=}}$ geschätzter Prozentsatz von Linksh. i. Gesamtpopulation
(siehe Statistikteil warum dies sinnvoll ist!)

Wollen: $\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon = 0{,}01$ mit 95% Sicherheit

also $\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq 0{,}01\right] \geq 0{,}95$.

64

Satz 4.5 $\Rightarrow$ $\mathbb{P}\{ | \frac{S_n}{n} - p | \leq 0{,}01 \}$

$= \mathbb{P}\{ -0{,}01 \leq \frac{S_n}{n} - p \leq 0{,}01 \}$

$= \mathbb{P}\{ -\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\, 0{,}01 \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\, 0{,}01 \} = (*)$

Unglücklicherweise ist p unbekannt, aber es gilt $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$. Damit

$(*) \geq \mathbb{P}\{ -0{,}01 \cdot 2 \cdot \sqrt{n} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq 0{,}01 \cdot 2 \cdot \sqrt{n} \}$

$\overset{\text{Satz 4.5}}{\approx} \phi(z_n) - \phi(-z_n) = 2\phi(z_n) - 1$

mit $z_n = 0{,}02\sqrt{n}$ wegen $\phi(-z) = 1 - \phi(z)$.

$\hookrightarrow$ Bestimme (aus Tabelle) z_n so, dass $2\phi(z_n) - 1 \overset{!}{=} 0{,}95$

$\Leftrightarrow \phi(z_n) = 0{,}975$

$\rightsquigarrow z_n \approx 1{,}96 \approx 2 \overset{!}{=} 0{,}02\sqrt{n} \Rightarrow n = 10.000$

! Zu beachten ist, dass die Stichprobengröße quadratisch von der Genauigkeit ε abhängt!!

5. Allgemeine W'räume und ZV mit Dichten

5.1 Das Maßproblem:

Frage: Gibt es ein W'maß $\mathbb{P}: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ mit

- $\mathbb{P}\{[0,1]\} = 1$
- $\mathbb{P}\{[a,b]\} = b-a \quad \forall\, a,b \in [0,1],\ a \leq b$?

$(\Rightarrow \mathbb{P}\{\{x\}\} = 0 \quad \forall x \in [0,1])$

Antwort: Nein! Warum?

Grund: Grundlegende Frage der Maßtheorie:

Gibt es „Längen-Funktion" $L: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ mit

a) $L(\emptyset) = 0$

b) $L([a,b]) = b-a \quad \forall\, a\leq b$

c) $L(A+x) = L(A) \quad \forall x \in \mathbb{R},\ A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$
(Translationsinvarianz)

d) $L\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} L(A_i)$, $(A_i)_i$ paarweise disjunkt.

Antwort: Nein! Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ zu groß!

Satz 5.1: Es gibt keine Fkt L mit Eig. a) - d).

Beweis: Definiere Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ durch

$x \sim y :\Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$.

$\Rightarrow \exists I \neq \emptyset,\ \exists K_i \subseteq \mathbb{R}$ für $i \in I$ mit $\mathbb{R} = \overset{\text{disjunkt.}}{\bigcup_{i\in I}} K_i$

und $\forall x,y \in \mathbb{R}:\ x\sim y \Leftrightarrow \exists i \in I$ mit $x,y \in K_i$

Auswahlaxiom $\Rightarrow \exists A \subseteq \mathbb{R}$ mit $|A \cap K_i| = 1\ \forall i \in I$

OBdA $A \subseteq [0,1)$, da $x \sim x - \lfloor x \rfloor \in [0,1)$.

Dann gilt $\mathbb{R} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (r+A)$ (disjunkt)

Denn: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists a \in A$ mit $x \sim a \Leftrightarrow x-a \in \mathbb{Q}$.

Andererseits ~~gilt~~ nehme an, dass für $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ mit

$r_1 \neq r_2$ $x \in (r_1+A) \cap (r_2+A) \Rightarrow \exists a_1, a_2 \in A$

mit $x = r_1 + a_1 = r_2 + a_2 \Rightarrow a_1 - a_2 = r_2 - r_1 \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow a_1 \sim a_2 \Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow r_1 = r_2$ ↯.

Mit σ-Add und Translationsinvarianz folgt:

$\infty \overset{b)}{=} L(\mathbb{R}) = L\left(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (r+A)\right) \overset{d)}{=} \sum_{r\in\mathbb{Q}} L(r+A)$

$\overset{c)}{=} \sum_{r\in\mathbb{Q}} L(A) \Rightarrow L(A) > 0.$

Andererseits: $A \subseteq [0,1) \Rightarrow \biguplus_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} (r+A) \subseteq [0,2)$

$$\Rightarrow 2 \overset{b)}{=} \lambda([0,2)) \geq \lambda\Big(\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} (r+A)\Big) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \lambda(r+A)$$

$$\overset{c)}{=} \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \lambda(A) \Rightarrow \lambda(A) = 0 \text{ ↯ } . \ \square$$

5.2. Allg. W'räume.