V1 Stochastik (1)

## 0. Einleitung

Stochastik : Lehre von den Gesetzmäßigkeiten des Zufalls, "Ratekunst"
Wahrscheinlichkeitstheorie → Statistik

Methoden der Stochastik werden bei der mathematischen Modellierung von verschiedenen Anwendungsproblemen eingesetzt:

- Zufallszahlengenerator
- Bewegung von Gasmolekülen
- Informationsübermittlung
- Aktienkurs
- Poker

Vorgehen:

a) Abstraktion und Idealisierung eines Anwendungsproblems liefert stoch. Modell formuliert in der Sprache der WT
b) mathematische Analyse → Folgerung aus Annahmen
c) Folgerung → Vorhersagen für Anwendungsproblem
d) Überprüfen der Vorhersagen mit den Beobachtungen (evtl. Korrektur/Anpassung des Modells).

Fokus der Vorlesung: b)

Wichtig: Folgerungen müssen streng logisch hergeleitet werden
Anwendungsproblem kann Unklarheiten liefern.

Teil I : Wahrscheinlichkeitstheorie

Ziel: Untersuchung von konkret geg. Zufallssituationen

Geg: Modell

Frage: Wie verhält sich eine Stichprobe

②

Mathematische Übersetzung:

Geg: W-raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_N : \Omega \to \mathbb{R}$

Ziel: Verstehe Eigenschaften von $X_1, \dots X_n$ z.B. Korrelation, Varianz Konvergenz

Teil II Statistik:

Ziel: Schlussfolgerung aus geg. Beobachtungen / Daten

Geg: Ergebnis einer Stichprobe

Frage: Was ist das zu Grunde liegende Modell / Gesetz?

Math. Übersetzung

Geg: $N$ Beob. $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ und Familie von W'räumen $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (P_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$

Ziel: Finde das zu Grunde liegende W'maß $P_\vartheta$. Finde das "richtige" Modell.

Organisatorisches: Klausur 31.7.

Übungen: Abgabe Mi: ~~vor~~ der Vorlesung

homepage: wt.iam.uni-bonn.de/huesmann/teaching/stochastik

Fragen: jederzeit vor / während / nach der Vorlesung

email: huesmann@iam.uni-bonn.de

konradlow@ — . —

# I Wahrscheinlichkeitstheorie

## 1. Diskrete Zufallsvariablen

### 1.1 Grundräume, Ereignisse und Wahrscheinlichkeit.

Wahrscheinlichkeitsmodelle besitzen 3 Grundelemente

1) Grundraum $\Omega$
2) Menge von Ereignissen $\mathcal{F}$
3) Wahrscheinlichkeitsmaß / verteilung $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$

Def 1.1: (Grundraum)
Sei $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ eine abzählbare Menge. $\Omega$ heißt (elementarer) Grundraum (Ergebnisraum).
/diskreter

$\Omega$ ist die Menge von möglichen Ergebnissen eines Zufallsexp.
Sprechweise: $\omega \in \Omega$ heißt Ergebnis.

Bsp 1.2 (n-facher Würfelwurf)
$$\Omega := \{(a_1, \dots, a_n) : a_j \in \{1, \dots 6\} \text{ für } j = 1, \dots, n\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n$$
$a_j$ : Ergebnis des j-ten Würfelwurfs.

Bsp 1.3 (n nicht-unterscheidbare Würfel gleichzeitig werfen)
$$\Omega := \{(b_1, \dots, b_n) : 1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \leq 6\}$$
$b_j$: j-kleinste Augenzahl.

Def 1.4 (Ereignis) Sei $\Omega$ ein diskreter Grundraum.
Jede Teilmenge $A$ von $\Omega$ heißt Ereignis.
$\Omega$: sicheres Ereignis
$\emptyset$: unmögliches Ereignis
$\{\omega\}$ für $\omega \in \Omega$ heißt $\{\omega\}$ Elementarereignis.

(4)

Häufige Schreibweise: $A, B, C, D, A_1, A_2, \ldots$

Vorstellung: $\omega \in \Omega$ wird zufällig ausgewählt

Sprechweise: „A tritt ein" $\Leftrightarrow$ $\omega \in A$.

Notation: $A = \{\omega \in \Omega : \omega \in A\} = \{\omega \in A\} = \{$„A tritt ein"$\}$

Bsp 1.5 (n-facher Würfelwurf):

Ereignis verbal: „Es tritt mindestens ein 6 auf"

Also $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^n$, $A = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega : \max\limits_{1 \le j \le n} a_j = 6\}$

Ereignis „Es tritt keine 6 auf"

$B = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega : \max\limits_{1 \le j \le n} a_j \le 5\} = A^c$

↳ Ereignisse $\hat{=}$ Mengen $\Rightarrow$ Kombination von Ereignissen $\hat{=}$ mengentheoret. Operation

Seien $A, B, (A_n)_{n \in I}$ Ereignisse, $I$ abzählbar, dann

$\omega \in A \cup B$ $\Leftrightarrow$ $\omega \in A$ oder $\omega \in B$ (es können auch ~~oder~~ beide eintreten!)

Sprechweise: „$A \cup B$ tritt ein" $\Leftrightarrow$ „A tritt ein oder B tritt ein"

$\omega \in \bigcup\limits_{n \in I} A_n$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ (mindestens) ein $n \in I$ mit $\omega \in A_n$.

Sprechweise „$\bigcup\limits_{n \in I} A_n$ tritt ein" $\Leftrightarrow$ „mindestens eines der Ereignisse $A_n$ tritt ein.

Ähnlich: $A \cap B$ $\Leftrightarrow$ A und B treten ein

$\bigcap\limits_{n \in I} A_n$ $\Leftrightarrow$ jedes der $A_n$ tritt ein

$A^c = \Omega \setminus A$ $\Leftrightarrow$ A tritt nicht ein.

$A \setminus B$ $\Leftrightarrow$ A tritt ein, aber nicht B

Die Menge $\mathcal{F}$ der möglichen Ereignisse, sollte unter diesen Mengenoperationen abgeschlossen sein. Im Falle eines diskreten / elementaren Grundraumes werden wir immer die Potenzmenge $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ wählen. Bei kont. Grundräumen / Zufallsexperimenten werden wir etwas vorsichtiger sein müssen (→ später).

Nach Grundraum und Ereignissen führen wir nun Wahrscheinlichkeitsvtlg ein.

Suchen $\mathbb{P} : \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$

$A \mapsto \mathbb{P}[A]$ „Wahrscheinlichkeit von $A$".

Sinnvolle Eigenschaften:

- $A, B \subset \Omega$, $A \cap B = \emptyset$ „$A$ und $B$ sind disjunkt"

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$ (Additivität)

($\omega \in A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$ heißt $\omega \in A$ oder [aber nicht gleichzeitig] $\omega \in B$).

- $\Omega$ tritt sicher ein $\Rightarrow$ $\mathbb{P}[\Omega] = 1$ (Normierung).

Wir fordern etwas mehr als Additivität:

**Def 1.6** (Axiome von Kolmogorov)

Sei $\Omega$ ein elementarer / diskreter Grundraum. Eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ heißt Wahrscheinlichkeitsvtlg auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, falls gilt:

i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (normiert)

ii) Für Ereignisse $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ gilt: $\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$ ($\sigma$-Additivität)

$\mathbb{P}[A]$ heißt W'keit von $A$ (unter $\mathbb{P}$).

⑥

**Def 1.7** (diskreter W'raum, vorläufig)
Ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ besteht aus einer abzählbaren Menge $\Omega$ und einem W'mass $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Konsequenzen:

**Satz 1.8** (elementare Eigenschaften und erste Rechenregeln)
Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter W'raum. :

(i) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$

(ii) Für $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] \qquad \text{(endliche Additivität)}$$

(iii) Für $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $A \subseteq B$ gilt:

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B \setminus A]$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B] \leq 1 \qquad \text{(Monotonie)}$$

$$\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A] \qquad \text{(Gegenereignis)}$$

(iv) Für beliebige $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B] \leq \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$$

(v) Für $(A_n)_{n \geq 1}$ mit $A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ für alle $n$, $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ (Schreibweise $A_n \nearrow A$, $\lim_{n\to\infty} A_n = A$) gilt

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}[\lim_{n\to\infty} A_n] = \mathbb{P}[A] \qquad (\sigma\text{-Stetigkeit})$$

Beweis:

(i) Wegen $\sigma$-Additivität von $\mathbb{P}$ gilt:

$$1 = \mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}[\Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots] = \underbrace{\mathbb{P}[\Omega]}_{=1} + \underbrace{\mathbb{P}[\emptyset]}_{\geq 0} + \mathbb{P}[\emptyset] + \dots$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}[\emptyset] = 0.$$

V2 (ii)

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots] \overset{A,B \text{ disjunkt}}{=} \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \underbrace{\mathbb{P}[\emptyset]}_{=0} + \underbrace{\mathbb{P}[\emptyset]}_{=0} + \dots$$

$$= \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$$

(iii) $A \subseteq B \Rightarrow B = A \cup (B \setminus A)$ ist eine disjunkte Vereinigung

Dann folgt mit (ii)

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B \setminus A]$$

Da $\mathbb{P}[B \setminus A] \geq 0$ folgt $\mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$

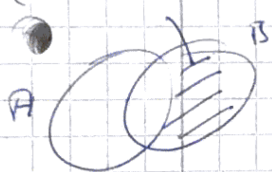
und mit $B = \Omega$ folgt

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[A^c] \geq \mathbb{P}[A].$$

(iv) Mit (iii) folgt

$(A \cup B) \setminus A = B \setminus (A \cap B)$

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[(A \cup B) \setminus A]$$
$$= \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B \setminus (A \cap B)]$$
$$= \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$$




(v) Übung. $\square$

Aussage (iv) von Satz 1.8 lässt sich erweitern auf endlich viele Ereignisse:

**Korollar 1.9:** (Einschluss / Ausschluss Prinzip)

Seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_n] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}]$$

**Beweis:** Wir zeigen die Aussage mittels Induktion.

IV: Aussage gilt für $n = 1$: $\mathbb{P}[A_1] = \mathbb{P}[A_1]$

IA: Die Aussage sei für ein $n$ gültig.

IS: $\mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k] = \mathbb{P}[(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \cup A_{n+1}]$

$$\overset{\text{Satz 1.8 (iv)}}{=} \mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{n} A_k] + \mathbb{P}[A_{n+1}] - \mathbb{P}[(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \cap A_{n+1}]$$

$$= \mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{n} A_k] + \mathbb{P}[A_{n+1}] - \mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{n} \underbrace{(A_k \cap A_{n+1})}_{\tilde{A}_k}]$$

(8) $\overset{\text{IA (2mal)}}{=} \left( \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \mathbb{P}[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] \right)$

$$+ \ \mathbb{P}[A_{n+1}]$$

$$- \left( \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \mathbb{P}[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}] \right)$$

Andererseits:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n+1} \mathbb{P}[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \mathbb{P}[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] \qquad (i_k \le n)$$

$$+ \ \mathbb{P}[A_{n+1}] \qquad (k=1,\ i_k = n+1)$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_{k-1} \le n} \mathbb{P}[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{n+1}]}_{} \qquad \begin{matrix}(i_k = n+1) \\ k \ge 2\end{matrix}$$

$$\overset{l = k-1}{=} - \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_l \le n} \mathbb{P}[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l} \cap A_{n+1}]. \qquad \square$$

Bsp 1.10: (Münzwurf)

$\Omega = \{K, Z\}$ und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\{K\}, \{Z\}, \{K, Z\}, \emptyset\}$.

Eine W'keitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ ist geg. durch:

$\mathbb{P}[\{K\}] = p \qquad \mathbb{P}[\{\emptyset\}] = 0$

$\mathbb{P}[\{Z\}] = 1 - p \qquad \mathbb{P}[\Omega] = 1$

Ein formal anderes Modell für einen einmaligen Münzwurf (später werden wir sehen, dass die Modelle äquivalent sind) ist

$\tilde{\Omega} = \{0, 1\}$, $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{P}(\tilde{\Omega})$

$\mathbb{P}[\{0\}] = 1 - \mathbb{P}[\{1\}] = 1 - p$

**Def 1.11** (Wahrscheinlichkeitsfkt / Zähldichte)
Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter W'raum und

$$p(\omega) := \mathbb{P}[\{\omega\}] \qquad , \omega \in \Omega .$$

Dann heißt die Funktion $p: \Omega \to [0,1]$ Wahrscheinlichkeitsfkt oder Zähldichte oder Massenfkt von $\mathbb{P}$.

**Satz 1.12** ($\mathbb{P}$ ist durch $p$ festgelegt).
Sei $\Omega$ ein diskreter Grundraum.

(i) Sei $p: \Omega \to [0,1]$ mit $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Definiere $\mathbb{P}: \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ durch

$$\mathbb{P}[A] := \sum_{\omega \in A} p(\omega) \qquad , A \in \mathcal{P}(\Omega) \qquad (*)$$

Dann ist $\mathbb{P}$ ein W'vtlg.

(ii) Jede W'vtlg auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ hat die Form $(*)$ mit $p(\omega) = \mathbb{P}[\{\omega\}]$, $\omega \in \Omega$.

Die Summe $\sum_{\omega \in A} p(\omega)$ ist definiert durch $\sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i)$ für eine __beliebige__ Abzählung $\{\omega_1, \omega_2, \dots$ von $A$. Um Satz 1.12 zu zeigen, müssen wir zeigen, dass dies wohldefiniert ist (also unabhängig von der Abzählung) sowie die $\sigma$-Additivität und Normiertheit von $\mathbb{P}$ zeigen (vgl Def 1.6). Dazu zunächst folgendes Lemma

**Lemma 1.13**
In der Situation von Satz 1.12 gilt
(i) unabhängig von der gewählten Abzählung gilt

$$\sum_{\omega \in A} p(\omega) = \sup_{\substack{F \subseteq A, \\ |F| < \infty}} \sum_{\omega \in F} p(\omega).$$

Insbesondere gilt Monotonie, d.h. für $A \subseteq B$ gilt $\sum_{\omega \in A} p(\omega) \leq \sum_{\omega \in B} p(\omega)$

(10) (ii) Ist $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ eine disjunkte Zerlegung, dann gilt:

$$\sum_{\omega\in A} p(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega\in A_i} p(\omega)$$

Beweis:

(i) Sei $\omega_1, \omega_2 \ldots$ beliebige Abzählung von $A$. Da $p(\omega_k) \geq 0, k \in \mathbb{N}$ ist

$$n \mapsto \sum_{k=1}^{n} p(\omega_k) \quad \text{monoton wachsend.}$$

es existiert

$$\Rightarrow \sum_{k\geq 1} p(\omega_k) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} p(\omega_k) \in [0, \infty]$$

Zu zeigen bleibt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} p(\omega_k) = \sup_{\substack{F\subseteq A\\|F|<\infty}} \sum_{\omega\in F} p(\omega) \qquad (**)$$

(und damit $\sum_{\omega\in A} p(\omega)$ unabhängig von der Abzählung).

„$\leq$": Durch Wahl von $F_n = \{\omega_1, \ldots \omega_n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$\sum_{k=1}^{n} p(\omega_k) \leq \sup_{\substack{F\subseteq A\\|F|<\infty}} \sum_{\omega\in F} p(\omega) \Rightarrow \text{„}\leq\text{" in } (**)$$

„$\geq$" Ist $F \subseteq A$ endlich, gibt es $n$ mit $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \supseteq F$

Daher gilt:

$$\sum_{\omega\in F} p(\omega) \leq \sum_{i=1}^{n} p(\omega_i) \leq \sup_n \sum_{i=1}^{n} p(\omega_i)$$

und es folgt „$\geq$" in $(**)$.

Da $F \subseteq A \Rightarrow F \subseteq B$ folgt $\sum_{\omega\in A} p(\omega) \leq \sum_{\omega\in B} p(\omega)$.

(ii) 1. Fall: $|A| < \infty$: und $|A_k| < \infty$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ s.d. $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Dann folgt

$$\sum_{\omega\in A} p(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{|A_k|} p(\omega_\ell) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\omega\in A_\ell} p(\omega)$$

2. Fall $|A| = \infty$:

„$\leq$": Ist $F \subseteq A$ endlich so ist $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} (F \cap A_k)$ eine disjunkte Vereinigung mit nur endlich vielen $k$ s.d. $F \cap A_k \neq \emptyset$.

Damit folgt aus dem Fall $|A| < \infty$:

(Kein σ-Add. benutzt)

$$\sum_{\omega \in F} p(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\omega \in F \cap A_k} p(\omega) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A_k} p(\omega)$$

Aus Teil (i) folgt daher

$$\sum_{\omega \in A} p(\omega) = \sup_{\substack{F \subseteq A \\ |F| < \infty}} \sum_{\omega \in F} p(\omega) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A_k} p(\omega).$$

„$\geq$": Für diese Richtung ~~bestimmen~~ versuchen wir das sup auf jedem $A_i$ einzeln zu bestimmen:

Sei $F_i \subseteq A_i$ endlich. Dann $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ impliziert $F_i \cap F_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\omega \in F_k} p(\omega) \underset{\text{Fall } |A| < \infty}{=} \sum_{\omega \in \bigcup_{k=1}^{n} F_k} p(\omega)$$

$$\overset{\text{Monotonie}}{\leq} \sum_{\omega \in \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k} p(\omega) \overset{\text{Monotonie}}{\leq} \sum_{\omega \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} p(\omega) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \sum_{\omega \in A_k} p(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{\substack{F_k \subseteq A_k \\ |F_k| < \infty}} \sum_{\omega \in F_k} p(\omega) \leq \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A_k} p(\omega) \leq \sum_{\omega \in A} p(\omega). \qquad \square$$

V3

Beweis von Satz 1.12:

(i) Nach Voraussetzung gilt $\mathbb{P}[A] \geq 0$ und $\mathbb{P}[\Omega] = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

Seien nun $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ disjunkt. Dann folgt aus Lemma 1.13

$$\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{\omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} p(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A_i} p(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}$ ist σ-Additiv.

(ii) Aus $\sigma$-Add. von $\mathbb{P}$ folgt für $A \subseteq \Omega$:

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[\underbrace{\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}}_{\text{disjunkt!}}] = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}[\{\omega\}]$$

Bem 1.14: Satz 1.12 (ii) ~~[illegible]~~ gilt nur für diskrete W'räume!

Bsp 1.15:

a) $\Omega = \mathbb{N}_0$, $(p_k)_{k \geq 0}$ reelle Folge mit $p_k \geq 0$, $\sum p_k = 1$

z.B. $p_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$p_k = (1-a)\, a^k$, $a \in (0,1)$

$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $\lambda > 0$. (Poisson Vtlg).

b) Gleichvtlg (Laplace-Modelle)

Sei $\Omega \neq \emptyset$ endlich. Dann existiert eine konstante Zähldichte/Massenfkt $p$, d.h. man kann jedes Elementarereignis gleich gewichten:

$$p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

$\Rightarrow$ Für $A \subset \Omega$ folgt

$$P[A] = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \text{„}\frac{\#\,\omega : A\text{ tritt ein}}{\#\,\omega}\text{“}$$

$$= \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl aller Fälle}} \quad (*)$$

Die Verteilung $\mathbb{P}$ heißt Gleichverteilung auf $\Omega$, wird auch mit $\mathrm{Unif}(\Omega)$ bezeichnet

[ 1814 benutzte Laplace (*) als Definition von Wahrscheinlichkeiten.

Dieser Ansatz erlaubt das Zusammenfassen von mehreren ~~Ereignissen~~ Ergebnissen zu einem neuen (Verlust der Gleichverteilung) setzt aber voraus, dass man eine Zerlegung in gleich wahrscheinliche Fälle findet ]

c) Faire Würfel, n-mal geworfen

~~Gleichvtlg~~ $\mathbb{P}$ $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^n$, $|\Omega| = 6^n$

$\rightarrow$ Gleichvtlg hat Massenfkt / Gewichte $p(\omega) = \frac{1}{6^n}$

d) Zufällige Permutationen

Eine Permutation $\sigma \in S_n$ von $\{1, \dots, n\}$ ist eine bijektive Abbildung von $\{1, \dots, n\}$ nach $\{1, \dots, n\}$.

Sei $\Omega = S_n$ die Menge aller Permutationen von $\{1, \dots, n\}$

$\Rightarrow |\Omega| = n!$ (Der 1 können n Zahlen zugeordnet werden, der 2 die verschiedenen $(n-1)$ Zahlen, der 3 die verschiedenen $(n-2)$ Zahlen ...)

Für die Gleichvtlg $\mathbb{P}$ gilt dann

$$\mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{n!}, \quad A \subseteq S_n$$

~~Anwendung~~ / Bsp für zufällige Permutationen: Vertauschen von Hüten, Anordnung eines gemischten Kartenspiels.

Im ~~letzt genannten~~ Bsp des ~~Kartenspiel~~ Mischens wollen wir die W'keit ~~für~~ zweier Ereignisse berechnen:

Q: i) $A_1 = \{$ Karte $K$ ist auf Position $\ell \}$

ii) $A_2 = \{$ es gibt ein $i$, s.d. Karte $i$ auf Position $i$ ist$\}$

A: i) $\mathbb{P}[A_1] = \mathbb{P}[\omega \in S_n : \omega(K) = \ell] = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$,

da das Ereignis $A_1$ die Position einer Karte festlegt und die verbliebenen $n-1$ Karten beliebig permutiert werden können.

ii) $\mathbb{P}[A_2] = \mathbb{P}[\{\omega \in S_n : \exists K \text{ s.d. } \omega(K) = K\}]$

Setze $B_K = \{\omega : \omega(K) = K\} \rightsquigarrow A = \bigcup_{K=1}^{n} B_K$

Somit folgt mit ~~Satz~~ Korollar 1.9 (Ein-/Ausschluss)

$$\mathbb{P}[A_2] = \mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{n} B_k]$$

$$\overset{\text{Kor 1.9}}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \underbrace{\mathbb{P}[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}]}_{= \frac{(n-k)!}{n!}}$$

(k Karten sind fixiert, n-k sind "frei")

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \underbrace{\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n}}_{\binom{n}{k}} \frac{(n-k)!}{n!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(n-k)!}{n!} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} - \frac{1}{e} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$= 1 - \frac{1}{e} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 - \frac{1}{e}$$

Beobachtung
- Der Grenzwert existiert und ist weder 0 noch 1
- Für große $n$ ist die Abhängigkeit der W'keit von $n$ sehr klein.

## 1.2 Empirische VtLg

~~a) Bsp 1.26 (empirische VtLg)~~

Sei $x_1, \dots, x_n \in \Omega$ eine Liste von Beobachtungsdaten oder Merkmalausprägungen, z.B. die Größe der Studenten einer Vorlesung / der Uni Bonn.

Aus diesen Beobachtungen können wir eine W'vtlg definieren, die empirische VtLg: Für $n \in \mathbb{N}$ (Anzahl der Beobachtungen) ist

$$N_n(A) := |\{ i \in \{1, \dots, n\} : x_i \in A \}|$$

die Häufigkeit der Werte in $A$ unter $x_1, \dots, x_n$ und

$$\mathbb{P}_n[A] := \frac{N_n[A]}{n}$$

die entsprechende relative Häufigkeit von Werten in $A$.
Für jedes feste $n$ ist $\mathbb{P}_n$ eine W'verteilung auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ mit Massenfkt

$$p_n(\omega) = \frac{N_n(\{\omega\})}{n},$$

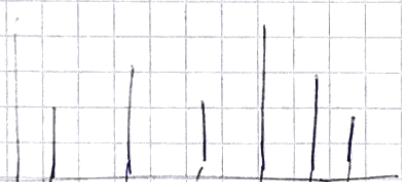
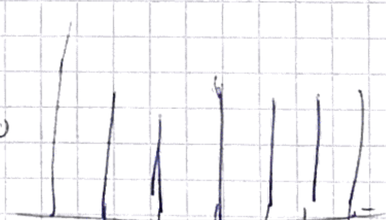
die durch die relativen Häufigkeiten von $\omega \in \Omega$ gegeben ist.

Bsp 1.16

a) Abzählung aller möglichen Fälle
Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Abzählung der Elemente eines endlichen Grundraumes $\Omega$. Dann stimmt die empirische Vtlg $\mathbb{P}_n$ mit der Gleichverteilung auf $\Omega$ überein.

b) Empirische Vtlg von ~~Zufallszahlen~~ $n$ Zufallswürfen eines Würfels:

$x_1, \ldots, x_n$ : $n$ Zufallszahlen aus $\{1, 2, \ldots, 6\}$

$n = 100$  $n = 10.000$ 

(vgl. Empirische Verteilungen.nb → homepage)

Das <u>empirische Gesetz der großen Zahlen</u> besagt, dass sich die emp. Vtlg für $n \to \infty$ der zu Grunde liegenden W'vtlg $\mathbb{P}$ (hier Gleichverteilung auf $\{1, \ldots, 6\}$) annähern:

$$\mathbb{P}_n[A] = \frac{N_n[A]}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}[A]$$

Dies wird als „frequentistische Def" von der W'keit von $A$

in empirischen Wissenschaften verwendet.
Wir werden die Vtlg für unabh., identisch verteilte Zufallsvariablen aus den Kolmogorovschen Axiomen herleiten.

## 1.3. Diskrete Zufallsvariablen und ihre Vtlg

Oft ist man ~~nur~~ nur an bestimmten Größen / reellwertigen Aspekten eines Zufallsexperimentes / stoch. Vorgangs interessiert. Dies kann man mit Zufallsvariablen (ZV) beschreiben:

Def 1.17 (Zufallsvariable):
Sei $(\Omega, ~~\mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}~~)$ ein diskreter Grundraum ~~Wkeitsraum~~. Dann heißt jede Abbildung

$$X : \Omega \to S \qquad (S \text{ abzählbar})$$

S-wertige Zufallsvariable. Gilt $S \subseteq \mathbb{R}$ sagen wir $X$ ist eine reellwertige oder reelle ZV und schreiben manchmal

$X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Übliche ~~...~~ Notation: $X, Y, Z, T, U, V, W$

Bsp 1.18: $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^n$

i) $X_1(a_1, \dots, a_n) = a_1 + \dots + a_n$ (Augensumme n-facher Würfelwurf)

ii) $X_2(a_1, \dots, a_n) = \max\limits_{1 \le j \le n} a_j$ (größte Augenzahl n-facher WW)

iii) $X_3(a_1, \dots, a_n) = a_{42}$ (42-te Augenzahl n-facher WW)

Wichtige Beobachtung: ZV beschreiben Ereignisse!
Sei $X$ eine ZV mit Urbildabb $X^{-1} : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(\Omega)$
Ist $M \subset S$ so ist das Ereignis „X liegt in M"

bzw. „X nimmt Wert in M an" geg. durch

$$X^{-1}(M) := \{\omega\in\Omega : X(\omega)\in M\} =: \{X\in M\} \subseteq \Omega .$$

~~Wichtig~~ Bsp. 1.18 (fortgesetzt)

a) „Augensumme ist 100": $\{X_1 = 100\} = \{X_1 \in \{100\}\}$

b) „Maximum ist $\le 4$": $\{X_2 \le 4\} = \{X_2 \in \{1,2,3,4\}\}$

c) „42. ter Wurf ist gerade" $\{X_3 \in \{2,4,6\}\}$.

~~Wichtige~~ ~~Beob~~ Bem 1.19.

$X^{-1}$ ist verträglich mit mengentheoretische Operationen!

Schreibweise: Für reelle ZV schreiben wir:

$\{X = t\} = X^{-1}(\{t\})$

$\{X\le t\} = X^{-1}((-\infty,t])$ ...

~~analog~~ ähnlich für $\{a\le X< b\}$, $\{X\ne t\}$, $\{X>t\}$, ...

Die Menge der reellen ZV auf $\Omega$ ist ein reeller Vektorraum bzgl. Addition und skalarer Multiplikation.

Die folgenden (insb.) sind ebenfalls ZV

$X\cdot Y(\omega) = X(\omega)\cdot Y(\omega)$, $\max(X,Y)(\omega) := \max(X(\omega),Y(\omega))$

Damit kann man neue Ereignisse darstellen, z.B.

$$\{X\le Y\} = \{\omega\in\Omega : X(\omega)\le Y(\omega)\}$$

Bsp 1.20. Zweifacher Würfelwurf.

$\Omega = \{1,\dots,6\}^2$, $X(a_1,a_2)=a_1$, $Y(a_1,a_2)=a_2$

Dann $\{X>2Y\} = \{(6,1),(6,2),(5,1),(5,2),(4,1),(3,1)\}$

(18) Ereignisse definieren aber auch ZV über die Indikatorfkt

Def 1.21: Sei $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ein Ereignis. Die ZV:

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

heißt Indikatorfkt von A.

Rechenregeln für Mengen induzieren Rechenregeln für Indikatoren, z.B.

$$1_{A^c} = 1 - 1_A \quad , \quad 1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B} \ldots$$

Def: 1.22. (Vtlg einer ZV):

Die Vtlg einer diskreten ZV $X : \Omega \to S$ ist W'vtlg $P_X$ auf $S$ mit Gewichten

$$P_X(a) = \mathbb{P}[\{X = a\}] \quad , a \in S$$

Wir schreiben oft $\mathbb{P}[\{X=a\}] = \mathbb{P}[X=a]$.

Ist $X : \Omega \to \mathbb{R}$ reelle ZV $\Rightarrow$ $X(\Omega) := \{X(\omega) : \omega \in \Omega\} \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar ist. ~~Für $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt~~ Das führt zu folgender praktischen Verallg. eines diskreten W'raumes

Def 1.23 (diskrete W'raum, vollgültig)

Seien $\Omega \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$

Dann heißt $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ diskreter W'raum, falls gilt:

(i) $\mathbb{P}[A] \geq 0 \quad , A \in \mathcal{P}(\Omega)$

(ii) $\mathbb{P}[\Omega] = 1$

(iii) $\mathbb{P}[\Omega_0] = 0$ für eine abzählbare Menge $\Omega_0 \subseteq \Omega$ (Träger von $\mathbb{P}$)

(iv) $\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$ für $A_i \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$