Institut für Angewandte Mathematik
WS 2024/25
Prof. Dr. Anton Bovier,
Manuel Esser

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
13. Übungsblatt

Abgabe bis zum 24.01.2025

Dieser Zettel ist als Wiederholung gedacht. Ihre Abgaben werden wie gewohnt korrigiert, sie zählen allerdings nicht mehr zur Klausurzulassung.

Aufgabe 1

Seien $X_n,\ n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen mit festem Erwartungswert $\mathbb{E}X_n = m,\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{E}X_n^2 < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$. Außerdem nehmen wir an, dass eine Folge endlicher Konstanten $c_k \in (0, \infty),\ k \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $c_k \to 0$, wenn $k \to \infty$, sodass

$$|\mathrm{Cov}(X_i, X_j)| \le c_{|i-j|}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)\right|^2\right] \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty.$$

b) Folgern Sie

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} m, \qquad n \to \infty.$$

Aufgabe 2

Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir definieren die so genannten *Bersteinpolynome*, für $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(p) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad p \in [0, 1].$$

Zeigen Sie mit Mitteln der Wahrscheinlichkeitstheorie, dass $f_n \to f$ gleichmäßig auf $[0, 1]$.

Aufgabe 3

Seien $X_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$ unabhängige Zufallsvariablen und sei $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Nennen Sie (mit Beweis) hinreichende Bedingungen, sodass

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} Y, \qquad n \to \infty.$$

Aufgabe 4

Es seien N weiße und N schwarze Kugeln auf zwei Urnen verteilt, so dass in jeder Urne N Kugeln enthalten sind. Der Zustand des Systems zum Zeitpunkt n wird beschrieben durch eine Zufallsvariable X_n, die die Anzahl der weißen Kugeln in der ersten Urne angibt. Bei jedem Schritt wird zufällig je eine Kugel aus jeder Urne gezogen und die beiden Kugeln werden vertauscht. Dann ist X_n eine Markovkette mit Zustandsraum $\{0, \ldots, N\}$. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix dieser Markovkette.

Aufgabe 5

In dieser Aufgabe betrachten wir das Ehrenfest Modell, das heißt eine Markovkette mit Zustandsraum $S = \{0, \ldots, N\}$, $N \in \mathbb{N}$ und Übergangsmatrix $P = \big(p(i,j)\big)_{i,j \in S}$, wobei

$$p(i,j) = \begin{cases} \frac{i}{N}, & \text{falls } j = i - 1\,, \\ \frac{N-i}{N}, & \text{falls } j = i + 1\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass π mit $\pi(j) = 2^{-N}\binom{N}{j}$ eine invariante Verteilung der Ehrenfest-Markovkette gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass keine der Zeilen der n-Schritt Übergangsmatrix P^n für $n \to \infty$ gegen π konvergiert. Was ist der Grund dafür?

c) Betrachten Sie nun die Markovkette mit Übergangsmatrix $Q := qI_{N+1} + (1-q)P$. Dabei ist P wie oben, $q \in (0,1)$ und I_{N+1} ist die $N + 1 \times N + 1$ Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass π aus 1. die eindeutige invariante Verteilung der Markovkette ist, und dass jede Zeile von Q^n für $n \to \infty$ gegen π konvergiert.

Alle wichtigen Ankündigungen zur Klausur finden Sie auf der Website zur Vorlesung. Insbesondere liegt das Deckblatt zur Klausur dort. Bitte machen Sie sich mit den Regeln vorab vertraut.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg in der anstehenden Prüfungsphase.