Institut für Angewandte Mathematik
WS 2024/25
Prof. Dr. Anton Bovier,
Manuel Esser

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
12. Übungsblatt

Abgabe bis zum 17.01.2025

Bitte denken Sie daran, sich rechtzeitig über BASIS zur **Klausur** anzumelden.

Aufgabe 1 *[3+2 Pkt]*

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine stationäre Markovkette mit endlichem Zustandraum $\mathcal{S}$ und Übergangsmatrix P. Wir definieren die n-Schritt-Übergangsmatrix durch $P(n) = (p_{ij}(n))_{i,j\in\mathcal{S}}$, wobei $p_{ij}(n) = \mathbb{P}(X_n = j|X_0 = i)$.

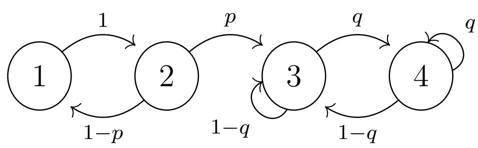
1. Zeigen Sie die **Chapman-Kolmogorov** Gleichungen:

$$p_{ij}(m+n) = \sum_{k\in\mathcal{S}} p_{ik}(m)p_{kj}(n) \text{ für } n, m \in \mathbb{N}.$$

2. Zeigen Sie, dass $P(n) = P^n$, wobei P^n die $n-$te Potenz von P bezeichnet.

Aufgabe 2 *[9 Pkt]*

Sei die folgende Markovkette gegeben:



Geben Sie in Abhängigkeit von $p, q \in [0, 1]$ die wesentlichen und unwesentlichen Klassen der Markovkette an und diskutieren Sie die Existenz und Eindeutigkeit invarianter Verteilungen.

Aufgabe 3 *[6 Pkt]*

Sei $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Bernoulli Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(\beta_n = 1) = p, \quad \mathbb{P}(\beta_n = 0) = q, \text{ wobei } p + q = 1 \text{ für } n = 1, 2, \ldots$$

a) Für $n = 2, 3, \ldots$ definieren wir den stochastischen Prozess X_n durch

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } \beta_{n-1} = \beta_n = 1 \\ 1, & \text{falls } \beta_{n-1} = 1, \beta_n = 0 \\ 2, & \text{falls } \beta_{n-1} = 0, \beta_n = 1 \\ 3, & \text{falls } \beta_{n-1} = \beta_n = 0 \end{cases}$$

   (a) Beweisen Sie, dass der Prozess $\{X_n, n = 2, 3, \ldots\}$ eine Markovkette ist.

   (b) Berechnen Sie die Übergangsmatrix P.

   (c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $p_3(0, 0)$.

b) Für $n = 2, 3, \ldots$ definieren wir den stochastischen Prozess X_n durch

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } \beta_{n-1} = \beta_n = 1 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass der Prozess $\{X_n, n = 2, 3, \ldots\}$ keine Markovkette ist.