Institut für Angewandte Mathematik
WS 2024/25
Prof. Dr. Anton Bovier,
Manuel Esser

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
11. Übungsblatt

Abgabe bis zum 10.01.2025

Dieser Zettel gibt einen kleinen Vorgeschmack auf die Klausur. Versuchen Sie daher, die Aufgaben zunächst alleine zu lösen.

Mit * gekennzeichnet Aufgaben ermöglichen es Zusatzpunkt für die Klausurzulassung zu erwerben.

Aufgabe 1 *[2+2 Pkt]*

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Es seien X, Y und Z unabhängige Zufallsvariablen. Sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ sowohl die Verteilungsfunktion von X als auch die Verteilungsfunktion von Y, und sei Z Bernoulli-verteilt. Bestimmen Sie die Verteilung von $(1-Z)X + ZY$.

b) Sei $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$ gegeben. Zeigen Sie, dass A und ein beliebiges $B \in \mathcal{F}$ unabhängig sind.

Aufgabe 2 *[3 Pkt]*

Eine Münze wird mehrmals (unabhängig) geworfen. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit für Kopf bei jedem Wurf gleich $p \in [0,1]$. Seien H_n und T_n die Anzahl von Kopf bzw. Zahl in n Würfen. Zeigen Sie, dass für alle $\epsilon > 0$ gilt

$$\mathbb{P}\left(2p - 1 - \epsilon \leq \frac{1}{n}(H_n - T_n) \leq 2p - 1 + \epsilon\right) \to 1, \text{ wenn } n \to \infty.$$

Aufgabe 3 *[4 Pkt]*

Beweisen Sie mit Hilfe von charakteristischen Funktionen das schwache Gesetz der großen Zahlen in der folgenden Form: Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$, dann konvergiert $n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$ für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen $\mathbb{E}(X_1)$.

Aufgabe 4 [*3 Pkt*]

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass für ein Poisson verteilte Zufallsvariablen $Y_{n\cdot\lambda}$ mit Parameter $n \cdot \lambda$ gilt:

$$\frac{Y_{n\cdot\lambda} - n \cdot \lambda}{\sqrt{n \cdot \lambda}} \xrightarrow{d} X, \quad \text{für } \lambda \to \infty,$$

wobei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist.
Tipp: Faltungsabgeschlossenheit der Poissonverteilung.

Aufgabe 5 [*2+2+2 Pkt*]

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen und X eine Zufallsvariable. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Aus $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^2] = 0$ folgt $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit.

b) Aus $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit folgt $X_n \to X$ fast sicher.

c) Falls $X_n \to X$ in Verteilung, und X ist $\mathbb{P}$-f.s. konstant, so gilt auch $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit.

Hinweis: Es reicht nicht, nur ein Gegenbeispiel anzugeben. Bitte führen Sie Ihr Gegenbeispiel auch aus!

Aufgabe 6 [*1*+2*+2*+3*+2* Pkt*]

Es sei $X_0, X_1, \ldots$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_k = -1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = 1/2$. Außerdem gelte $\{X_k \neq \pm 1\} = \emptyset$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $\beta \in (0,1)$, setzen wir

$$Z_{\beta,n} = (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n} \beta^k X_k \quad \text{und} \quad Z_\beta = \lim_{n\to\infty} Z_{\beta,n}.$$

a) Zeigen Sie, dass Z_β <u>sicher</u> endlich ist.

b) Bestimmen Sie die charakteristischen Funktionen von $Z_{\beta,n}$ und Z_β.

c) Zeigen Sie, dass Z_β für $\beta \to 1$ in Verteilung gegen eine standardnormalverteilte Zufallsvariable konvergiert.

d) Ersetzen Sie nun die X_k durch unabhängige Gaußverteilte $Y_k \sim \mathcal{N}(0,1)$. Zeigen Sie, das in diesem Fall Z_β zwar *fast sicher* aber nicht mehr *sicher* endlich ist.

e) Bestimmen Sie für den Fall d) die Verteilung von Z_β.

Tipp zu c): Betrachten Sie zunächst eine Approximation von $\phi_{Z_{\beta,n}}(t)$ für festes β. Nehmen Sie dann den Grenzwert $n \to \infty$, um eine Approximation von $\phi_{Z_\beta}(t)$ zu erhalten. Bestimmen Sie schließlich den Grenzwert $\beta \to 1$.

Aufgabe 7 *[5* Pkt]*

Es seien X und Y unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Varianz 1. Zeigen Sie mit Hilfe der charakteristischen Funktionen: Stimmt die Verteilung der Zufallsvariablen $(X+Y)/\sqrt{2}$ mit der von X und Y überein, dann sind X und Y normal verteilt.

Tipp: Leiten Sie zunächst eine aus den obigen Annahmen eine Funktionalgleichung für die charakteristische Funktion ϕ her. Betrachten Sie dann Iterationen dieser Gleichung zusammen mit der Taylorentwicklung von ϕ.

Wir wünschen Ihnen Frohe Weihnachten
und einen Guten Rutsch ins neue Jahr!