Institut für Angewandte Mathematik
WS 2024/25
Prof. Dr. Anton Bovier,
Manuel Esser

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
10. Übungsblatt

Abgabe bis zum 20.12.2024

Aufgabe 1 *[3 Pkt]*

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge identisch verteilter Zufallsvariablen mit $E[X_1^2] < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max_{i=1}^n |X_i|}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0 \quad \text{in Wahrscheinlichkeit.}$$

Aufgabe 2 *[5 Pkt]*

Seien X und Y zwei Zufallsvariablen auf $\mathbb{R}$ mit charakteristischen Funktionen ϕ_1 und ϕ_2. Die gemeinsame Verteilung von (X, Y) sei gegeben durch $dP_{X,Y}(x, y) = p(x, y)\, dx\, dy$, wobei

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}[1 + xy(x^2 - y^2)], & \text{falls } |x| \le 1 \text{ und } |y| \le 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion ϕ von $X + Y$ durch

$$\phi(t) = \phi_1(t)\phi_2(t),$$

gegeben ist, aber dass X und Y keine unabhängigen Zufallsvariablen sind.

Aufgabe 3 *[2+1 Pkt]*

Sein $T_n, n \in \mathbb{N}$ iid. Zufallsvariablen mit $T_n \sim \mathrm{Exp}(1)$.

a) Zeigen Sie

$$\mathbb{P}\left(T_n \ge \ln n + c \ln\ln n \quad \text{u.o.}\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } c > 1, \\ 1 & \text{falls } c \le 1. \end{cases}$$

b) Welche Konvergenzaussage wird dadurch impliziert?

Aufgabe 4 *[2+2+1+2+2 Pkt]*

Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Rademachervariablen. In der Vorlesung hat man gezeigt, dass

$$\mathbb{P}\left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq x\right) \leq \exp(-nI(x)),$$

wobei $I(x) = \frac{1}{2}(1-x)\ln(1-x) + \frac{1}{2}(1+x)\ln(1+x)$. Ziel dieser Übung ist, zu zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ und $x \in [0,1)$ und für n groß genug, gilt

$$\mathbb{P}\left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq x - \varepsilon\right) \geq \exp(-nI(x))\exp(-c\,n\,\varepsilon)\left(1 - 1/(n\varepsilon^2)\right), \tag{1}$$

für eine Konstante $c > 0$, die von x abhängig sein darf. Wir teilen die Übung in mehrere einfachere Schritte ein.

a) Sei $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i - nx$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq n(x-\varepsilon)\right) \geq \tilde{E}_t(f(S_n))\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right),$$

wobei $f(z) := e^{-tz}\mathbb{1}_{\{|z| \leq \varepsilon n\}}$, und $\tilde{E}_t(Y) := \mathbb{E}(Ye^{tS_n})/\mathbb{E}(e^{tS_n})$.

b) Zeigen Sie, dass

$$\tilde{E}_t(S_n) = 0 \quad \text{für } t = t^* := \operatorname{arctanh}(x).$$

c) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}\left(e^{t^* S_n}\right) = e^{-nI(x)}.$$

d) Zeigen Sie, mit Hilfe von Chebyshev's Ungleichung, dass

$$\widetilde{E}_{t^*}(f(S_n)) \geq e^{-nt^*\varepsilon}\left(1 - \frac{\widetilde{\mathrm{Var}}_{t^*}(S_n)}{\varepsilon^2 n^2}\right)$$

e) Zeigen Sie, dass

$$\widetilde{\mathrm{Var}}_{t^*}(S_n) = (1-x^2)n.$$

f) Die oberen Ergebnisse zusammengefasst ergeben (1) für n groß genug.