Institut für Angewandte Mathematik
WS 2024/25
Prof. Dr. Anton Bovier,
Manuel Esser

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
9. Übungsblatt

Abgabe bis zum 13.12.2024

Information der Fachschaft: Dieses Jahr findet die Mathe-Weihnachtsfeier am Donnerstag, den 12.12., ab 18 s.t. statt. Alle aktuellen Informationen sind auf der **Website** zu finden. Eine vorherige **Anmeldung per Email** ist zwingend notwendig. Schaut vorbei!

Notation

Für eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Zufallsvariable X schreiben wir

- $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, falls $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in Verteilung* gegen X konvergiert,
- $X_n \xrightarrow{P} X$, falls $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in Wahrscheinlichkeit* gegen X konvergiert,
- $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$, falls $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *fast sicher* gegen X konvergiert.

Aufgabe 1 [*5 Pkt*]

Es sei $(X_n)_{n\geq 2}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n\log n} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(X_i - \mathbb{E}(X_i))$$

zwar in Wahrscheinlichkeit gegen Null konvergiert, aber nicht fast sicher.

Aufgabe 2 [*5 Pkt*]

Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger exponentialverteilter Zufallsvariablen mit Parameter α (d.h. $\mathbb{P}(X_n \geq s) = e^{-\alpha s}$ für $s \geq 0$). Beweisen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} = \frac{1}{\alpha} \quad \text{fast sicher.}$$

Aufgabe 3 *[3+2 Pkt]*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, X_1, X_2, \ldots : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k), k \in \mathbb{N}$ messbar. Man sagt, dass die Folge (X_n) in Wahrscheinlichkeit gegen X konvergiert und schreibt $X_n \xrightarrow{P} X$, falls für jedes $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty,$$

wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^k$ ist. Beweisen Sie:

a) Sei $c \in \mathbb{R}^k$ und $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ stetig an der Stelle c. Gilt $X_n \xrightarrow{P} c$, so gilt auch $f(X_n) \xrightarrow{P} f(c)$.

b) Es seien $X_n = (X_n^1, \ldots, X_n^k)$ und $X = (X^1, \ldots, X^k)$. Die Aussage $(X_n^1, \ldots, X_n^k) \xrightarrow{P} (X^1, \ldots, X^k)$ gilt genau dann, wenn $X_n^i \xrightarrow{P} X^i$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Bemerkung: Aussage a) bleibt erfüllt, wenn man c durch einen Zufallsvektor X ersetzt und die Menge der Unstetigkeitsstellen der Funktion f eine P_X-Nullmenge darstellt.

Aufgabe 4 *[2+1+2 Pkt]*

Es seien $X, X_1, X_2, \ldots$ reellwertige Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

a) Ist X P-f.s. konstant, so gilt: $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ impliziert $X_n \xrightarrow{P} X$.

b) Aus $(X_n - X)^2 \xrightarrow{P} 0$ folgt $X_n \xrightarrow{P} X$.

c) Aus $X_n \longrightarrow X$ f.s. folgt $n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i \longrightarrow X$ f.s.