Institut für Angewandte Mathematik
WS 2024/25
Prof. Dr. Anton Bovier,
Manuel Esser

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
8. Übungsblatt

Abgabe bis zum 06.12.2024

Aufgabe 1 (Cauchy) *[3+2 Pkt]*

a) Es seien X und Y unabhängige, standard Gauss-verteilte (d.h. $\mathcal{N}(0,1)$) Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable

$$Z = \begin{cases} \frac{X}{Y} & : Y \neq 0 \\ 0 & : Y = 0 \end{cases}$$

Cauchy verteilt ist mit Parameter 1.

b) Es sei U eine auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gleichverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass $\tan(U)$ Cauchy verteilt ist mit Parameter 1.

Aufgabe 2 (Leibnitz) *[5 Pkt]*

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $E \subset \mathbb{R}$ offen. Sei $f : E \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

(i) Die Funktion $\sup_{z\in E} |f(z,\cdot)| : \Omega \to \mathbb{R}$ absolut integrierbar bezüglich μ,

(ii) für μ-fast alle $\omega \in \Omega$ ist $f(\cdot,\omega)$ in E stetig differenzierbar und

(iii) die Funktion $\sup_{z\in E} \left|\frac{\partial}{\partial z} f(z,\cdot)\right|$ ist absolut integrierbar bezüglich μ.

Zeigen Sie, dass dann $z \mapsto F(z) := \int_\Omega f(z,\omega)\mu(\mathrm{d}\omega)$ stetig differenzierbar in E ist und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} F(z) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial z} f(z,\omega)\mu(\mathrm{d}\omega).$$

Aufgabe 3 (Laplace) *[1+2+2 Pkt]*

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf dem Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Für $z \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\psi(z) := \mathbb{E}\left[\exp(zX)\right] \in [0, +\infty] .$$

Angenommen es gibt ein $h > 0$, sodass $\psi(\pm h) < \infty$. Zeigen Sie:

a) $\psi(z) < \infty$ für alle $z \in [-h, h]$,

b) ψ ist unendlich oft differenzierbar in $(-h, h)$,

c) für alle $p \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}z^p}\psi(z)\Big|_{z=0} = \mathbb{E}\left[X^p\right] .$$

Bemerkung: Man nennt die Funktion ψ daher *Momenten erzeugende Funktion* oder auch *Laplace Transformierte*.

Aufgabe 4 *[3+2 Pkt]*

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann bezeichnen wir mit

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad x \in \mathbb{R}$$

die zugehörige Potenzreihe. Ferner nehmen wir an dass die Reihe absolut konvergiert, d.h.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|x|^n < \infty, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Außerdem sei X ein reellwertige Zufallsvariable, sodass

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|X|^n\right) < \infty.$$

Beweisen Sie:

a)

$$\mathbb{E}\left[f(X)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathbb{E}\left[X^n\right],$$

b)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \cos(tx)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-t^2/2}.$$