Institut für Angewandte Mathematik
WS 2024/25
Prof. Dr. Anton Bovier,
Manuel Esser

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
7. Übungsblatt

Abgabe bis zum 29.11.2024

Aufgabe 1 *[3 Pkt]*

Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, zum Parameter λ exponentialverteilten Zufallsvariablen. Sei für $t \geq 0$

$$N_t = \sup\left\{ n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=1}^{n} X_k \leq t \right\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $t > 0$, N_t Poisson-verteilt ist zum Parameter λt.

Bemerkung: Die Familie $(N_t)_{t\geq 0}$ nennt man auch *Poisson-Prozess mit Intensität* λ.

Aufgabe 2 *[3+4 Pkt]*

Sei X eine zentrierte Gauss'sche Zufallsvariable mit Varianz $\sigma^2 > 0$:

a) Sei $g \in C^1(\mathbb{R})$ so, dass $|g(x)|e^{-x^2/(2a)} \to 0$ und $|g'(x)|e^{-x^2/(2a)} \to 0$, wenn $x \to \pm\infty$ für ein $a > \mathrm{Var}(X)$. Beweisen Sie, dass

$$\mathbb{E}(Xg(X)) = \mathrm{Var}(X)\mathbb{E}(g'(X))$$

gilt.

b) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 *[4 Pkt]*

Sei X eine positive Zufallsvariable (diskret oder kontinuierlich) auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, und sei $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ stetig differenzierbar und streng monoton wachsend mit $g(0) = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_0^\infty g'(x)\mathbb{P}[X \geq x]dx.$$

Hinweis: Es darf ohne Beweis vorausgesetzt werden, dass Fubini-Tonelli für $\sigma-$endliche Maße gilt.

Aufgabe 4 *[2+3 Pkt]*

Sei $p \in (0,1)$ und seien $(X_i)_i$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = -1)$. Es sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ und $K(n) = K(0) + S_n$. Wir definieren

$$h(x) = \mathbb{P}\Big(\inf\{n : K(n) = 0\} < \inf\{n : K(n) = 100\} \Big| K(0) = x \Big),$$

für $x \in \{1, \dots, 98, 99\}$, $h(0) = 1$ und $h(100) = 0$.

a) Zeigen Sie, dass

$$h(x) = ph(x+1) + (1-p)h(x-1), \qquad x \in \{1, \dots, 99\},$$

b) Berechnen Sie $h(x)$.

Tipp zu Punkt 2: Leiten Sie eine rekursive Gleichung für $g(x) := h(x+1) - h(x)$ her!

Aufgabe 5 *[1 Pkt]*

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und exponentialverteilt mit jeweiligem Parameter $\alpha_i > 0$. Bestimmen Sie die Verteilung von $\min_{1 \le i \le n} X_i$.