**Institut für Angewandte Mathematik**
**WS 2024/25**
Prof. Dr. Anton Bovier,
Manuel Esser

# Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
# 6. Übungsblatt

**Abgabe bis zum 22.11.2024**

---

**Aufgabe 1** *[3 Pkt]*

$X$ und $Y$ seien zwei unabhängige Zufallsvariablen, wobei das Wahrscheinlichkeitsmaß von $X$ absolut stetig und das von $Y$ diskret ist. Zeigen Sie, dass das Wahrscheinlichkeitsmaß von $X+Y$ absolut stetig ist.

**Aufgabe 2** *[3+1+2+3 Pkt]*

Im folgenden Problem möchte man $n$ (unterscheidbare) Kugeln auf $r \geq 2$ Kästchen verteilen. Sei $X_i$ die Anzahl Kugeln im $i$-ten Kästchen. $X = (X_1, \ldots, X_r)$ ist dann eine Zufallsvariable mit Werten in $\{0, 1, \ldots, n\}^r$. Für $(k_1, \ldots, k_r) \in \{0, 1, \ldots, n\}^r$ definiert man den *Multinomialkoeffizienten* durch

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}.$$

Falls jede der $r^n$ Möglichkeiten die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, so ist die Verteilug von $X$ gegeben durch

$$P[X_1 = k_1, \ldots, X_r = k_r] = \begin{cases} \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} \frac{1}{r^n}, & \text{falls } k_1 + \ldots + k_r = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Verteilung auf $\{0, 1, \ldots, n\}^r$ nennt man *Multinomialverteilung.*

a) Zeigen Sie: für paarweise verschiedene $i_1, \ldots, i_j \in \{1, \ldots r\}$ gilt

$$P[X_{i_1} = k_1, \ldots, X_{i_j} = k_j] = \frac{n!}{k_1! \cdots k_j!(n - \sum_{i=1}^j k_i)!} \left(\frac{1}{r}\right)^{\sum_{i=1}^j k_i} \left(\frac{r-j}{r}\right)^{n - \sum_{i=1}^j k_i}.$$

*Tipp:* Induktion über $j$ (absteigend).

b) Zeigen Sie: für die Anzahl Kugeln in *einem* Kästchen gilt

$$p_{n,r,k} := P[X_i = k] = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{r}\right)^k \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{n-k}.$$

(Die Randverteilungen sind also Binomialverteilungen mit Parametern $(n, \frac{1}{r})$.)

c) Wir wollen die Anzahl der Kugeln und die der Kästchen gleichmäßig gegen unendlich streben lassen, wobei wir entsprechend reskalieren und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{r_n} = \lambda \tag{1}$$

gelten soll. Zeigen Sie, dass die $p_{n,r_n,k}$ dann gegen die Einzelwahrscheinlichkeiten einer Poisson-Verteilung konvergieren, also

$$\lim_{n\to\infty} p_{n,r_n,k} = p_\lambda(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

d) Zeigen Sie, dass für $k_1, k_2 \in \{1, \ldots, n\}$ die Ereignisse $\{X_1 = k_1\}$ und $\{X_2 = k_2\}$ nicht unabhängig, aber *asymptotisch unabhängig* sind, dass also gilt

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \frac{n}{r}=\lambda}} P[\{X_1 = k_1\} \cap \{X_2 = k_2\}] = p_\lambda(k_1)p_\lambda(k_2).$$

**Aufgabe 3** *[2 Pkt]*

Sei $m < n$. Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}$ beschränkte stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass $Y_1 := f(X_1, \ldots, X_m)$ und $Y_2 := g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ unabhängige Zufallsvariablen sind.

**Aufgabe 4** *[6 Pkt]*

Seien $X$ und $Y$ zwei Zufallsvariablen auf $\mathbb{R}$ mit gemeinsamer Verteilung von $(X, Y)$ gegeben durch $dP_{X,Y}(x, y) = p(x, y)\,dx\,dy$, wobei

$$p(x,y) = \begin{cases} \pi^{-1}e^{-2x^2-y^2/2}, & \text{falls } xy \geq 0, \\ \pi^{-1}e^{-x^2/2-2y^2}, & \text{falls } xy < 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $X$ und $Y$ unkorreliert, aber nicht unabhängig sind.