Institut für Angewandte Mathematik
WS 2024/25
Prof. Dr. Anton Bovier,
Manuel Esser

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
5. Übungsblatt

Abgabe bis zum 15.11.2024

Definition. Sei X eine reellwertige Zufallsvariable. Wir sagen, dass

a) X gleich verteilt ist auf dem Interval (a, b), und schreiben $X \sim \mathrm{Unif}((a, b))$, falls die Verteilung von X absolut stetig ist mit dazugehöriger Dichte

$$\rho(x) \;=\; \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{(a,b)}(x),$$

b) X exponential verteilt ist mit Parameter $\lambda > 0$, und schreiben $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, falls die Verteilung von X absolut stetig ist mit dazugehöriger Dichte

$$\rho(x) \;=\; \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x),$$

c) X binomial verteilt ist mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$, und schreiben $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, falls für alle $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\mathbb{P}\left(X = k\right) \;=\; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

d) X Poisson verteilt ist mit Parameter $\rho > 0$, und schreiben $X \sim \mathrm{Poi}(\rho)$, falls für alle $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(X = k\right) \;=\; e^{-\rho}\, \frac{\rho^k}{k!}.$$

Aufgabe 1 (Gedächtnislosigkeit) [*4 Pkt*]

Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $(0, \infty)$, sodass

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \mathbb{P}(X > s), \quad \text{für alle } t, s > 0.$$

Wir nennen diese Eigenschaft *Gedächtnislosigkeit* von X. Sei ferner $\mathbb{P}\left(X > 1\right) = c \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass die Verteilung von X dadurch eindeutig festgelegt ist und bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion F_X.

Aufgabe 2 (Bedingte Wahrscheinlichkeiten) *[1+2 Pkt]*

Der Vorlesungsassistent kennt die Arbeitsgruppe der Studentinnen Anette, Berta und Cornelia schon seit längerem und weiß, dass Anette 80%, Berta 15% und Cornelia nur 5% der Aufgaben bearbeitet und sie es so einteilen, dass keine Aufgabe doppelt bearbeitet wird. Aufgrund ihrer unterschiedlichen Erfahrung können sie eine Aufgabe mit 90%, 50% und 10% Wahrscheinlichkeit richtig lösen.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Lösung richtig?
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt eine fehlerhafte Lösung von Anette, Berta beziehungsweise Cornelia?

Aufgabe 3 (Extremwerttheorie) *[1+1+1+1 Pkt]*

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F.

a) Drücken Sie die Verteilungsfunktionen von $M_n := \max\limits_{1\leq i\leq n} X_i$ durch F aus.

b) Sei $F^{(n)}$ die Verteilungsfunktion von M_n. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} F^{(n)}(x) \in \{0, 1\}$.

c) Gesucht ist eine Folge $x_n \in \mathbb{R}$, so dass $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \leq x_n) \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass dies äquivalent ist zu der Forderung $\lim_{n\to\infty} n(1 - F(x_n)) = \tau \in (0, \infty)$ ist.

d) Seien nun $X_1, ..., X_n$ exponentialverteilt mit Parameter 1. Finden Sie hierzu eine geeignete Folge x_n wie in Aufgabenteil c). und bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} F^{(n)}(x_n)$.

Aufgabe 4 ((kein) Fubini) *[2+3 Pkt]*

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$, und sei ν das Gauss'sche Maß auf $\mathbb{R}$, mit Mittelwert 0 und Varianz 1, d.h. $\nu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$. Zeigen Sie:

a) Die beiden iterierten Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\nu(x) \right) d\nu(y) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\nu(y) \right) d\nu(x)$$

existieren und sind gleich.

b) Das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, d(\nu \otimes \nu)(x, y)$$

existiert nicht.

Aufgabe 5 (Summen von Zufallsvariablen) *[4 Pkt]*

Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$ falls

a) $X \sim \mathrm{Bin}(n_1, p)$ und $Y \sim \mathrm{Bin}(n_2, p)$, wobei $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$,

b) $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ und $Y \sim \mathrm{Pois}(\mu)$, wobei $\lambda, \mu > 0$,

c) X und Y gleichverteilt auf $[0, 1]$ sind.

d) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ und $Y \sim \mathrm{Exp}(\mu)$, wobei $\lambda, \mu > 0$.