Institut für Angewandte Mathematik
WS 2024/25
Prof. Dr. Anton Bovier,
Manuel Esser

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
4. Übungsblatt

Abgabe bis zum 08.11.2024

Definition. Sei $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann ist $\mathbb{E}[Y]$ - der *Erwartungswert* von Y - definiert durch

$$\mathbb{E}[Y] \;=\; \int_\Omega Y(\omega)\,\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

Aufgabe 1 *[6 Pkt]*

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Nehmen Sie an, dass die Verteilung von X absolut stetig ist, und sei ρ die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte. Des Weiteren sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion mit der Eigenschaft, dass $g \circ X$ integrierbar ist. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[g(X)] \;=\; \int_\mathbb{R} g(x)\,\rho(x)\,dx.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Konzept der **Maßtheoretischen Induktion**, basierend auf den zentralen Schritten aus Kapitel 2.2.2 im Skript.

Aufgabe 2 *[4 Pkt]*

Sei X_p geometrisch verteilt mit Parameter p, d.h. für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $P[X_p = k] = (1-p)p^k$. Betrachten Sie die Zufallsvariable

$$Y_p := (1-p)X_p.$$

Beweisen Sie, dass im Limes $p \to 1$ die Verteilungsfunktion von Y_p punktweise gegen die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung mit Rate $\lambda = 1$ konvergiert. Für $\lambda > 0$ ist die Verteilungsfunktion $F(x)$ der Exponentialverteilung gegeben durch

$$F(x) := \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Aufgabe 3 *[4 Pkt]*

Es sei U eine auf dem offenen Intervall $(0,1)$ uniform verteilte Zufallsvariable, d.h. mit Dichte $g_U(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x), x \in \mathbb{R}$. Sei ferner $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine rechtsstetige und monoton wachsende Funktion mit $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ und $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$. Wir definieren die *linksstetige verallgemeinerte Inverse* von F, für alle $u \in (0,1)$, durch

$$F^{-1}(u) := \inf\{t \in \mathbb{R} : \ F(t) \geq u\} = \sup\{t \in \mathbb{R} : \ F(t) < u\}.$$

Zeigen Sie, dass F die Verteilungsfunktion der durch $X := F^{-1}(U)$ definierten Zufallsvariablen ist.

Aufgabe 4 *[6 Pkt]*

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f Lebesgue-integrierbar ist, und dass das Riemann- und das Lebesgue-Integral übereinstimmen:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int \mathbb{1}_{[a,b]} f(x)\lambda(\mathrm{d}x).$$

Hinweis: Diese Aussage gilt für alle Riemann-integrierbaren Funktionen, der Beweis ist im Wesentlichen identisch. Eine Funktion ist Riemann-integrierbar, wenn das Infimum der Obersummen und das Supremum der Untersummen übereinstimmen.