**Institut für Angewandte Mathematik**
**WS 2024/25**
Prof. Dr. Anton Bovier,
Manuel Esser

# Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
# 3. Übungsblatt

**Abgabe bis zum 01.11.2024**

---

## Aufgabe 1 (Operationen auf Zufallsvariablen) *[4+2 Pkt]*

(a) Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reellwertige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\text{(i)}\, X_1 \cdot X_2, \qquad \text{(ii)} \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n, \qquad \text{(iii)} \liminf_{n\to\infty} X_n$$

messbar sind.
Folgern Sie, dass die Menge $M := \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \text{ existiert}\}$ messbar ist.

(b) Sei $X$ eine Zufallsvariable mit Verteilungfunktion $F_X$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Man bestimme die Verteilungsfunktionen der folgenden Zufallsvariablen:

$$Y_1 = aX + b, \qquad Y_2 = |X|, \qquad Y_3 = e^X.$$

*Hinweise:*
Alle Operationen dieser Aufgabe sind punktweise für jedes $\omega \in \Omega$ zu verstehen. Insbesondere werden das Supremum und der Limes inferior in Teil (a) punktweise gebildet.

## Aufgabe 2 (Teufelstreppe) *[3+2+2+1 Pkt]*

Sei $(C_n)_n$ die selbe Mengenfolge wie in der Aufgabe 5 des vorherige Übungszettels. Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir eine nichtfallende, stetige Funktion $F_n$ auf $[0,1]$ wie folgt:

1. $F_n(0) = 0$ und $F_n(1) = 1$;
2. Die Funktion $F_n$ ist in jedem Teilintervall von $[0,1] \setminus C_n$ konstant und nimmt die Werte $\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, \frac{2^n-1}{2^n}$ in aufsteigender Reihenfolge an.
3. In allen Intervallen von $C_n$ ist $F_n$ linear.

Zeigen Sie:

(a) Die Funktionenfolge $F_n$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $F$.

(b) $F$ ist eine stetige Verteilungsfunktion auf $[0,1]$.

(c) Das durch $F$ eindeutig bestimmte Wahrscheinlichkeitsmaß hat keine Dichte.

(d) Das durch $F$ eindeutig bestimmte Wahrscheinlichkeitsmaß hat keine Atome.

*Hinweise:*

- Betrachten Sie den vollständigen, normierten Raum $C([0,1])$ der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ mit der Norm $\|f\|_\infty = \max_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$.
- Ein Atom ist ein Punkt mit positivem Maß.

**Aufgabe 3 (Limiten von Mengen)** *[2+1+2+1 Pkt]*

Es seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von Teilmengen einer beliebigen nichtleeren Menge $\Omega$. Der *obere* und der *untere Limes* der Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ werden definiert durch

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{bzw.} \quad \liminf_n A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Stimmen beide Mengen überein, so schreibt man

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \limsup_n A_n = \liminf_n A_n.$$

Zeigen Sie:

(a) Mit dem Ereignis $\liminf_n A_n$ tritt auch das Ereignis $\limsup_n A_n$ ein, d.h. es gilt

$$\liminf_n A_n \subseteq \limsup_n A_n.$$

Geben Sie ein Beispiel für strikte Inklusion an,

(b) $\limsup_n A_n^c = \left(\liminf_n A_n\right)^c$,

(c) $\limsup_n \big(A_n \cap B_n\big) \subset \big(\limsup_n A_n \cap \limsup_n B_n\big)$; geben Sie ein Beispiel für strikte Inklusion an,

(d) Für *monotone* Mengenfolgen (d.h. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ oder $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$) sind der obere und der untere Limes gleich.