Institut für Angewandte Mathematik
WS 2024/25
Prof. Dr. Anton Bovier,
Manuel Esser

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
2. Übungsblatt

Abgabe bis zum 25.10.2024

Aufgabe 1 *[2+1+3 Pkt]*

Sei Ω eine endliche Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra.

a) Zeigen Sie, dass eine einzige Partition $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ von Ω existiert, so dass (i) alle $\pi_i \in \mathcal{A}$, (ii) für alle $B \in \mathcal{A}$ und für alle $\ell \in \{1, \dots, n\}$, $\pi_\ell \cap B \in \{\emptyset, \pi_\ell\}$.

   Bemerkung: Man nennt $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ eine Partition von Ω, falls $\pi_i \neq \emptyset$ für alle i, $\Omega = \cup_{i=1}^n \pi_i$ und $\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$, falls $i \neq j$.

b) Zeigen Sie, dass es für alle $B \in \mathcal{A}$ ein $J_B \subset \{1, \dots, n\}$ gibt, sodass $B = \cup_{j \in J_B} \pi_j$. Folgern Sie, dass $\mathcal{A}$ die von $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ erzeugte σ-Algebra ist, d.h. dass $\mathcal{A} = \sigma(\pi_1, \dots, \pi_n)$.

c) Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\Omega, \mathcal{A})$ und $p_k := \mathrm{P}(\pi_k)$. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^n p_k = 1$. Umgekehrt, seien p_k, $k = 1, \dots, n$, mit der Eigenschaft $\sum_{k=1}^n p_k = 1$. Zeigen Sie, dass dann ein einziges Wahrscheinlichkeitsmaß P über $(\Omega, \mathcal{A})$ existiert so dass $\mathrm{P}(\pi_k) = p_k$.

Bemerkung: Die Elemente $\pi_1, \dots, \pi_n$ nennt man auch *Atome*.

Aufgabe 2 *[2+1 Pkt]*

Es sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Indexmenge, und seien $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathcal{I}}$ σ-Algebren auf einer Menge Ω.

a) Beweisen Sie, dass $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i = \{A : A \in \mathcal{F}_i \text{ für alle } i \in \mathcal{I}\}$ eine σ-Algebra ist.

b) Zeigen Sie, dass die Vereinigung zweier σ-Algebren auf derselben Menge Ω im Allgemeinen keine σ-Algebra ist.

Aufgabe 3 *[2 Pkt]*

Sei X eine reelle Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$. Zeigen Sie, dass F genau dann in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist, wenn $\mathbb{P}[X = x] = 0$.

Aufgabe 4 *[3+2+2 Pkt]*

a) Zeigen Sie, dass jede nichtfallende Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ höchstens abzählbar viele Unstetigkeitstellen besitzt.

b) Zeigen Sie, dass jede nichtfallende Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *rechtsstetige Modifikation* besitzt, d.h. es existiert eine nichtfallende rechtsstetige Funktion $\widetilde{F}$, die sich an höchstens abzählbar vielen Stellen von F unterscheidet.

c) Es sei D eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und sei $F : D \to \mathbb{R}$ eine nichtfallende Funktion mit

$$F(x) = F(x+) = \lim_{y \in D, y \downarrow x} F(y).$$

Zeigen Sie, dass es genau eine nichtfallende rechtsstetige *Fortsetzung von F auf* $\mathbb{R}$ gibt. Dabei wird eine Funktion $\widehat{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Fortsetzung von F genannt, falls $\widehat{F}(x) = F(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Hinweis zu a): Beweisen Sie zuerst, dass $F(x-) = \lim_{y \uparrow x} F(y)$ und $F(x+) = \lim_{y \downarrow x} F(y)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ existieren und betrachten Sie dann Intervalle $I(x) = \big(F(x-), F(x+)\big)$.

Aufgabe 5 [*2 Pkt*]

Sei λ das Lebesgue-Maß auf $[0, 1]$. Betrachten Sie den zugehörigen Wahrscheinlickeitsraum $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$. Wir konstruieren eine Folge $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Mengen nach folgendem Muster:

$$\begin{aligned} C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\ C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \end{aligned}$$

Die Menge C_n ist die Vereinigung von 2^n disjunkten, abgeschlossenen Intervallen der Länge 3^{-n}. Die Menge C_{n+1} konstruieren wir aus der Menge C_n, indem wir das mittlere Drittel jedes Intervals aus C_n entfernen.

Sei $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$. Man nennt C die *Cantormenge*. Zeigen Sie, dass die Cantormenge eine nichtleere, abgeschlossene Menge vom Lebesgue-Maß 0 ist.