Institut für Angewandte Mathematik
WS 2024/25
Prof. Dr. Anton Bovier,
Manuel Esser

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
1. Übungsblatt

Abgabe bis zum 18.10.2024

Aufgabe 1 (Subadditivität) *[5 Pkt]*

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie, dass

a) Für $A,\, B \in \mathcal{F}$ mit $A \subseteq B$ gilt $\mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$.

b) Falls $A \in \mathcal{F}$ und (A_n) eine Folge von (nicht notwendigerweise disjunkten) Megen in $\mathcal{F}$ mit $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ist, so gilt

$$\mathbb{P}[A] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n].$$

Aufgabe 2 (Monotone Stetigkeit) *[5 Pkt]*

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Sei $(A_n)_n$ eine Folge von Mengen in $\mathcal{A}$ so dass $A_n \uparrow A$, d.h. $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}[A] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n]$.

b) Sei $(B_n)_n$ eine Folge von Mengen in $\mathcal{A}$ so dass $B_n \downarrow B$, d.h. $B_{n+1} \subseteq B_n$ und $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}[B] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[B_n]$

Aufgabe 3 (Einschluss-Ausschluss-Prinzip) *[5 Pkt]*

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie das sog. *Einschluss-Ausschluss-Prinzip*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = &\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &+ \cdots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n).\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (σ-Algebren) *[5 Pkt]*

a) Seien A und B Teilmengen von Ω. Bestimmen Sie $\sigma(\{A,B\})$, d.h. die kleinste σ-Algebra über der Menge Ω, in der die Mengen A und B enthalten sind.

b) Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ Elemente der Borel-σ-Algebra sind:

$$\text{(i) } (-\infty, x],\ x \in \mathbb{R}, \quad \text{(ii) } (x,y],\ x,y \in \mathbb{R}, \quad \text{(iii) } \pi + \mathbb{Q} = \{\pi + q : q \in \mathbb{Q}\}\,.$$