Institut für Angewandte Mathematik
WS 2024/25
Prof. Dr. Anton Bovier,
Manuel Esser

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
0. Übungsblatt

Diese Aufgaben werden im ersten Tutorium besprochen. Wir empfehlen Ihnen sie im vorhinein zu bearbeiten, aber Sie müssen keine Abgaben einreichen.

Aufgabe 1

Bitte stellen Sie sicher, dass Sie auf **eCampus** zur Vorlesung registriert sind. Dort findet auch die Anmeldung zu den Übungsgruppen statt. Um an der Prüfung teilzunehmen und Ihren Übungserfolg zu verbuchen, vergessen Sie nicht, sich rechtzeitig auf BASIS dafür anzumelden
Alle **Fragen** zur Organisation der Vorlesung und des Übungsbetriebs können Sie gerne an manuel.esser@uni-bonn.de richten.

Aufgabe 2

Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Teilmengen von Ω, so dass für alle $A, B \in \mathcal{A}$, auch $A^c \in \mathcal{A}$ und $A \cup B \in \mathcal{A}$.

1. Zeigen Sie, dass
$$A \cap B \in \mathcal{A} \quad A \setminus B \in \mathcal{A}.$$

2. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{A}$ mit den Operationen $\cap$, $\cup$ eine Boolesche Algebra bildet. (Kommutativität, Assoziativität, doppelte Distributivität, Existenz neutraler Elemente, Existenz von Inversen)

3. Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt
$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B \quad \text{und} \quad \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}.$$

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und sei $f_k : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ die Abbildung der Frequenzen der Ausgänge eines Spiels:
$$f_k(A) \equiv \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{\omega_i \in A},$$

wobei ω_i der Ausgang des i-ten Spiels ist, und $A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass für eine gegebene Folge $\{\omega_i\}_{i=1,\ldots,k}$ die Abbildung $f_k : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Aufgabe 4

Ist es wahrscheinlicher bei vier Würfen mit einem Würfel mindestens eine Sechs zu werfen oder bei 24 Würfen mit jeweils zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs zu erhalten? Geben Sie **jeweils** einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ an.

Aufgabe 5

Spieler A und B vereinbaren ein faires Spiel über 7 Runden. Jeder Spieler zahlt zu Beginn 5 Euro als Einsatz, wer mindestens vier Runden gewinnt erhält die gesamten 10 Euro. Nach fünf Runden muss das Spiel beim Stand von $2:3$ abgebrochen werden. Wäre es fair, den Gewinn in diesem Verhältnis aufzuteilen? Berechnen Sie dazu die Gewinnwahrscheinlichkeiten der beiden Spieler.

Aufgabe 6

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A_n \in \mathcal{F}$ eine Folge von Ereignissen, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$. Zeigen sie, dass

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A_n\right) = 0.$$