Stochastische Versicherungs– und Finanzmodelle

SS 2003

Manfred Schäl

Stochastische Versicherungs– und Finanzmodelle

§1 Erneuerungsprozesse und Poissonprozeß.

1.0 Definition. Ein **stochastischer Prozeß** ist eine Familie $(X_t,\ t\in I)$ von Zufallsvariablen (Zva) auf einem W–Raum $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit Werten in einem Meßraum $(S,\mathfrak{S})$. Dabei ist t der **Zeitparameter**, I die Parametermenge und S der **Zustandsraum**. Ist $I \subset \mathbb{N}_0$ (z.B. $I = \{0,1,...,T\}$), so spricht man von einem **zeitdiskreten Prozeß**. Ist $I \subset \mathbb{R}$ (z.B. $I = [0,\infty)$), so spricht man von einem **zeitstetigen Prozeß**. Für jedes feste ω heißt die Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ ein **Pfad** (eine Trajektorie).

<u>Erneuerungsprozesse</u>

1.1 Def. a) Sei $(Z_n, n\in\mathbb{N})$ eine Folge von iid Zva (iid $\hat{=}$ independent, identically distributed) auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit Werten in $[0,\infty)$ und $P[Z_n=0]<1$ und $\frac{1}{\lambda} := E[Z_n]$. Ist $T_n := Z_1+...+Z_n$ mit $T_0:=0$, so heißt (T_n) **Erneuerungsprozeß** zur Folge (Z_n). Ist $N_t := |\{n\in\mathbb{N};\ T_n\le t\}|$, so heißt $(N_t, t\ge 0)$ **Zählprozeß** mit **Intensität** λ **.** $H(t) := E[N_t]$ heißt **Erneuerungsfunktion**.

b) Sei $(Y_n,\ n\in\mathbb{N})$ eine Folge von reellen iid Zva auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit $E[Y_n] =: \mu \in\mathbb{R}$, sodaß auch $Z_1,Y_1,Z_2,Y_2,...$ unabhängig sind. Dann heißt

$X_t := \sum_1^{N_t} Y_n$ (=: ∞ auf $\{N_t=\infty\}$) **zusammengesetzter Zählprozeß**.

Dabei ist $(t,\omega) \mapsto N_t(\omega)$ mb (vgl. W.th. 8.11), insbesondere sind N_t und X_t Zva für $t\ge 0$ auf Grund von

(1.2) $$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{T_n\le t\}},\quad X_t = \sum_{n=1} Y_n \cdot 1_{\{T_n\le t\}},\quad H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P[T_n\le t]\ ,\ \forall\ t\ge 0.$$

Interpretation: N_t ist die Anzahl der Schadensfälle in $[0,t]$, Y_k ist die Höhe des k–ten Schadens und Z_k die Wartezeit bis zum k–ten Schaden (als nächsten Schaden). Dann gibt X_t den Gesamtschaden in $[0,t]$ an und H(t) die mittlere Anzahl von Schäden in $[0,t]$. Der Name Erneuerungsprozeß rührt von der folgenden Interpretation her: N_t ist die Anzahl von Erneuerungen etwa einer Maschine in $[0,t]$.

1.3 Lemma. (a) $0 \le \lambda < \infty$; (b) $N_t \to \infty$ für $t \to \infty$;

(c) $H(t) < \infty$, $N_t < \infty$ f.s. $\forall\ t \ge 0$.

Bew. a) Aus $\lambda=\infty$ würde folgen (W.th. 9.16a): $Z_1=0$ f.s. b) $\lim_{m\to\infty} N_m = \sum 1_{\{T_n<\infty\}} = \infty$.

c) Es genügt z.z. (W.th. 9.16c): $H(t)<\infty$. Wegen $\lim_k P[Z_1 \ge \frac{t}{k}] = P[Z_1 > 0] > 0$ existiert ein m mit

$P[Z_1 \ge \frac{t}{m}] > 0$. Dann folgt: $P[T_m > t] \ge P[Z_n > \frac{t}{m}, \forall n \le m] = \Pi_{n=1}^m P[Z_n > \frac{t}{m}] > 0$.

Setze $S_k := Z_{km+1} + ... + Z_{km+m}$, dann sind die S_k, $k \in \mathbb{N}_0$, iid Zva (W.th. 13.6) mit $S_0 = T_m$, und es folgt für $n \in \mathbb{N}_0$, $1 \le j \le m$:

$$P[T_{nm+j} \le t] \le P[T_{nm} \le t] \le P[\cap_{k=0}^{n-1} \{S_k \le t\}] = P[T_m \le t]^n$$

und somit $H(t) \le \Sigma_{n=0}^{\infty} mP[T_{nm} \le t] < \infty$ (geometrische Reihe !). []

1.4 Starkes Gesetz der großen Zahlen. $\frac{1}{t} N_t \to \lambda$ f.s., $\frac{1}{t} X_t \to \lambda\mu$ $(t \to \infty)$ f.s., $\frac{1}{T_n} X_{T_n} \to \lambda\mu$ f.s. $(n \to \infty)$.

Bew. Sei $\Omega_0 := \cap_{n \in \mathbb{N}} \{N_n < \infty\} = \cap_{t \ge 0} \{N_t < \infty\}$, dann folgt $P[\Omega_0] = 1$ wegen 1.3c. Auf Ω_0 gilt:

(1.5) $\quad T_{N_t} \le t < T_{N_t+1}$, d.h. $N_t = n \Leftrightarrow T_n \le t < T_{n+1}$ und $N_t \ge n \Leftrightarrow T_n \le t$,

und somit $T_{N_t}/N_t \le t/N_t \le T_{N_t+1}/N_t$.

Sei $\Omega_1 := \{T_n/n \to \frac{1}{\lambda}\} = \{T_{n+1}/n+1 \to \frac{1}{\lambda}\}) = \{T_{n+1}/n \to \frac{1}{\lambda}\}$ mit $P[\Omega_1] = 1$ nach dem klassischen starken Gesetz der großen Zahlen.

Auf $\Omega_0 \cap \Omega_1$ gilt nun mit 1.3b: $T_{N_t}/N_t \to \frac{1}{\lambda}$, $T_{N_t+1}/N_t \to \frac{1}{\lambda}$ und damit auch $t/N_t \to \frac{1}{\lambda}$.

Sei $\Omega_2 := \{\frac{1}{n} \Sigma_1^n Y_k \to \mu\}$. Dann gilt ebenso $P[\Omega_2] = 1$. Auf $\Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \Omega_2$ gilt:

$X_t/t = (N_t/t) \cdot (\Sigma_1^{N_t} Y_k/N_t) \to \lambda\mu$ und damit $X_{T_n}/T_n \to \mu/a$, denn auf Ω_1 wissen wir, daß $T_n \to \infty$. []

1.6 Lemma von A.Wald. (a) Es gilt $E[T_{N_t+1}] = \frac{1}{\lambda} \cdot E[N_t+1] = \frac{1}{\lambda} \cdot (H(t)+1)$ und allgemeiner

für eine meßbare Funktion $c : [0,\infty) \times \mathbb{R} \mapsto [0,\infty)$:

$$E[\sum_{n=1}^{N_t+1} c(Z_n, Y_n)] = E[N_t+1] \cdot E[c(Z_1, Y_1)] .$$

(b) $\quad E[X_t] = \mu \cdot E[N_t]$.

Interpretation: $E[\sum_{n=1}^{N_t+1} c(Z_n, Y_n)]$ sind die Kosten bis zum Zeitpunkt t, genauer T_{N_t+1}. $E[X_t]$ ist der erwartete Gesamtschaden in $[0,t]$.

In 1.6a darf N_t+1 nicht durch N_t ersetzt werden.

Bew. a) In Hinblick auf (1.5) ist

$E[\Sigma_1^{N_t} c(Z_n, Y_n)] = E[\Sigma_1^{\infty} c(Z_n, Y_n) \cdot 1_{\{T_{n-1} \le t\}}] = \Sigma_1^{\infty} E[c(Z_n, Y_n)] \cdot P[T_{n-1} \le t] =$

$E[c(Z_1, Y_1)] \cdot (P[T_0 \le t] + \Sigma_1^{\infty} \cdot P[T_n \le t])$, denn (Z_n, Y_n) und T_{n-1} sind unabhängig (W.th. 14.10).

Mit (1.2) folgt die zweite Behauptung. Setzt man $c(Z_n, Y_n)$ Z_n, so erhält man die erste Behauptung.

b) Es sind Y_n und T_n unabhängig. Mit (1.2) ergibt sich:

$E[X_t] = \Sigma_1^\infty E[Y_n] \cdot P[T_n \le t] = \mu \cdot H(t)$. []

1.7 Elementarer Erneuerungssatz. $\frac{H(t)}{t} \to \lambda$ $(t\to\infty)$.

Bew. Die Aussage folgt aus 1.4 für den Fall, daß $P[Z_1 \ge \varepsilon] = 1$ für ein $\varepsilon > 0$; denn dann liegt wegen $N_t/t \le 1/\varepsilon$ majorisierte Konvergenz vor. Ein elementarer Beweis für den allgem. Fall geht wie folgt:

(i) Ist $M := \sup_{n,\omega} Z_n(\omega) \le \infty$ die maximale Lebens–/Wartezeit, so gilt: $t \le T_{N_t+1} \le t + M$.

(ii) Aus 1.6a und (i) folgt zunächst $\frac{1}{\lambda} \cdot (H(t)+1) \ge t$, also $\frac{H(t)}{t} \ge \lambda - \frac{1}{t}$ und damit $\underline{\lim} \frac{H(t)}{t} \ge \lambda$.

(iii) Die iid Zva $Z_n^L := \min(Z_n, L)$, $n \in \mathbb{N}$, definieren einen Erneuerungsprozeß (T_n^L) mit Erneuerungsfunktion $H^L \ge H$ und $M^L \le L$.

(Interpretation: Spätestens nach einer Lebenszeit L wird eine Maschine erneuert.)

Dann gilt wegen 1.6a und (i) zum andern: $\frac{H(t)}{t} \le \frac{H^L(t)}{t} \le (1 + \frac{L}{t})\lambda^L - \frac{1}{t}$.

Damit folgt: $\overline{\lim}\, H(t)/t \le \lambda^L$.

Dabei gilt schließlich: $1/\lambda^L = E[\min(Z_1, L)] \uparrow 1/\lambda$ wegen monotoner Konvergenz. []

<u>Poissonprozeß.</u>

1.8 Lemma. Aus $Z_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ folgt: $N_t \sim \pi(\lambda t)$.

Dabei ist $\mathrm{Exp}(\lambda)$ die Exponentialverteilung und $\pi(\lambda)$ die Poissonverteilung jeweils mit Parameter λ. Ist $\Gamma_{\lambda,n}$ die Γ–Verteilung (Erlang–Verteilung) mit den Parametern λ und n, so gilt $\mathrm{Exp}(\lambda) = \Gamma_{\lambda,1}$. Aus $Z_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ folgt $EZ_n = 1/\lambda$.

Beweis von 1.8. Aus $Z_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ folgt : $T_n \sim \Gamma_{\lambda,n}$ (W.th. 12.17f), also

$P[T_n \le t] = {}_0\!\int^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx$. Mit partieller Integration folgt nun für $n \in \mathbb{N}$:

$P[T_n \le t] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} + P[T_{n+1} \le t]$, also mit (1.3): $P[N_t = n] = P[T_n \le t] - P[T_{n+1} \le t] = \pi(\lambda t; n)$.

Für n=0 ergibt sich insbesondere: $P[N_t = 0] = P[T_1 > t] = e^{-\lambda t} = \pi(\lambda t; 0)$. []

Aus der Annahme, daß die Z_n iid Zva sind, und der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung wird eine **zeitliche Homogenität** und die **Unabhängigkeit der Zukunft von der Vorgeschichte** folgen. Sei dazu

(1.9) $\mathfrak{B}_\infty := \otimes_{k=1}^\infty \mathfrak{B}_1 = \sigma(\mathfrak{C}_\infty)$ mit $\mathfrak{C}_\infty := \{B = B_1 \times \ldots \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$ mit $n \in \mathbb{N}$, $B_i \in \mathfrak{B}_1$, $1 \le i \le n\}$

die Borel–σ–Algebra auf $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$.

1.10 Lemma. Sei $Z_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $t \geq 0$. Mit $B \in \mathfrak{B}_{2n}$ und $C \in \mathfrak{B}_\infty$ sind

$A_{t-} := \{N_t = n, (T_1, Y_1, \ldots, T_n, Y_n) \in B\}$ ein Ereignis der Vorgeschichte und

$A_{t+} := \{(T_{N_t+1} - t, Y_{N_t+1}, Z_{N_t+m}, Y_{N_t+m}, m \geq 2) \in C\}$ ein Ereignis der Zukunft.

Dann gilt:

(a) $P[A_{t-} \cap A_{t+}] = P[A_{t+}] \cdot P[A_{t-}]$ (Unabhängigkeit von Vorgeschichte und Zukunft)

(b) $P[A_{t+}] = P[A_{0+}]$ (zeitliche Homogenität).

Bew. Es genügt z.z.: $P[A_{t-} \cap A_{t+}] = P[A_{t-}] \cdot P[A_{0+}]$;

denn mit $B = \mathbb{R}^{2n}$ und Summation über n folgt dann $P[A_{t+}] = P[A_{0+}]$.

Es genügt den Fall $C = D \times C'$ mit $D \in \mathfrak{B}_1$, $C' \in \mathfrak{B}_\infty$ (sogar den Fall $C \in \mathfrak{C}_\infty$) zu betrachten; der allgemeine Fall folgt mit einem Dynkinargument (W.th. 6.25) wegen $\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_\infty = \mathfrak{B}_\infty$. Dabei sei hier o.E. $D \subset [0, \infty)$.

Zunächst der Spezialfall: $n=0$, $C' = \mathbb{R}^\infty$, dann hat man :

$$P[A_{t-} \cap A_{t+}] = P[N_t = 0, T_1 - t \in D] = P[Z_1 - t > 0, Z_1 - t \in D].$$

Nun hat $Z_1 - t$ die Dichte $\lambda e^{-\lambda(s+t)}$ (W.th. 12.9), also ergibt sich: $P[N_t = 0, T_1 - t \in D]$

$= \int_{D \cap (0,\infty)} \lambda e^{-\lambda(s+t)} ds = e^{-\lambda t} \int_D \lambda e^{-\lambda s} ds = P[Z_1 > t] \cdot P[Z_1 \in D] = P[N_t = 0] \cdot P[Z_1 \in D]$, d.h.

$P[Z_1 - t \in D \mid Z_1 > t] = P[Z_1 \in D]$ (**Gedächtnislosigkeit** der Exponentialverteilung).

Für den allgemeinen Fall ergibt sich:

$$P[A_{t-} \cap A_{t+}] = P[T_n \leq t < T_{n+1}, (T_1, Y_1, \ldots, T_n, Y_n) \in B, T_{n+1} - t \in D, (Y_{n+1}, Z_{n+2}, Y_{n+2}, \ldots) \in C']$$
$$= P[\ldots] \cdot P[(Y_{n+1}, Z_{n+2}, Y_{n+2}, \ldots) \in C'],$$

denn es sind $(T_1, Y_1, \ldots, T_n, Y_n, T_{n+1})$ und $(Y_{n+1}, Z_{n+2}, Y_{n+2}, \ldots)$ unabh. (W.th. 13.6); ebenso $(T_1, Y_1, \ldots, T_n, Y_n)$ und Z_{n+1}. Somit folgt mit dem Satz von Fubini (W.th. 13.4) und $T_{n+1} = T_n + Z_{n+1}$:

$P[\ldots] = P[T_n \leq t, (T_1, Y_1, \ldots, T_n, Y_n) \in B, Z_{n+1} - (t - T_n) > 0, Z_{n+1} - (t - T_n) \in D]$

$= E[\mathbf{1}_B(T_1, Y_1, \ldots, T_n, Y_n) \cdot \mathbf{1}_{[0,t]}(T_n) \cdot h(T_n)]$

mit $h(t_n) := P[Z_{n+1} - (t - t_n) > 0, Z_{n+1} - (t - t_n) \in D] = P[Z_{n+1} > t - t_n] \cdot P[Z_{n+1} \in D]$

nach dem obigen Spezialfall. Geht man jetzt wieder rückwärts, erhält man:

$P[\ldots] = P[A_{t-}] \cdot P[Z_{n+1} \in D]$. Da die (Z_n, Y_n) iid Zva sind, folgt schließlich: $P[A_{t-} \cap A_{t+}]$

$= P[A_{t-}] \cdot P[Z_{n+1} \in D] \cdot P[(Y_{n+1}, Z_{n+2}, Y_{n+2}, \ldots) \in C'] = P[A_{t-}] \cdot P[Z_{n+1} \in D,$

$(Y_{n+1}, Z_{n+2}, Y_{n+2}, \ldots) \in C'] = P[A_{t-}] \cdot P[Z_1 \in D, (Y_1, Z_2, Y_2, \ldots) \in C'] = P[A_{t-}] \cdot P[A_{0+}]$. []

1.11 Satz. Für den (zusammengesetzten) Zählprozeß eines Erneuerungsprozesses mit Z_n~Exp(λ) gilt:

(a) $N_t \sim \pi(\lambda t)$, $t>0$, $N_0=0$ f.s., $H(t) = \lambda t$, $E[X_t] = \lambda\mu t$, $t\geq 0$.

(b) $\{(X_t,N_t),t\geq 0\}$ hat **unabhängige Zuwächse**, d.h. für $k\in\mathbb{N}$, $0:=t_0<t_1<...<t_k$ sind die Zva $(X_{t_1}-X_{t_0},N_{t_1}-N_{t_0})$, $(X_{t_2}-X_{t_1},N_{t_2}-N_{t_1})$,...,$(X_{t_k}-X_{t_{k-1}},N_{t_k}-N_{t_{k-1}})$ unabhängig.

(c) $\{(X_t,N_t),t\geq 0\}$ hat **stationäre Zuwächse**,
d.h. für $h>0$ ist die Verteilung von $(X_{t+h}-X_t,N_{t+h}-N_t)$ unabhängig von $t\geq 0$.

(d) $(X_t,t\geq 0)$ und $(N_t,t\geq 0)$ haben unabhängige und stationäre Zuwächse.

Bew. a) folgt aus 1.6 und 1.8. Teil d) folgt sofort aus b,c).
c) Es ist $\{X_{t+h}-X_t \in B, N_{t+h}-N_t = m\}=A_{t+}$ für ein gewisses C; damit folgt (c) aus 1.10b.
b) Es ist $\cap_{j=1}^{k} \{X_{t_j}-X_{t_{j-1}} \in B_j, N_{t_j}-N_{t_{j-1}} = m_j\} = A_{t-}$ für $n=m_1+...+m_n$, $t=t_k$ und ein gewisses B.
Mit 1.10a folgt: $P[\cap_{j=1}^{k+1} \{X_{t_j}-X_{t_{j-1}} \in B_j, N_{t_j}-N_{t_{j-1}} = m_j\}] =$

$$P[\cap_{j=1}^{k} \{X_{t_j}-X_{t_{j-1}} \in B_j, N_{t_j}-N_{t_{j-1}} = m_j\}] \cdot P[X_{t_{k+1}}-X_{t_k} \in B_{k+1}, N_{t_{k+1}}-N_{t_k} = m_{k+1}].$$

Jetzt führt vollständige Induktion nach k zur Behauptung. $\square$

1.12 Def. In der Situation von 1.11 heißen $(N_t,t\geq 0)$ **Poisson–Prozeß** mit Intensität λ und $(X_t,t\geq 0)$ **zusammengesetzter Poissonprozeß**.

Wichtige Größen sind:
die Wartezeit $T_{N_t+1}-t$ (in t) bis zum nächsten Schadensfall,

die Zeit $t-T_{N_t}$ (in t) seit dem letzten Schadensfall und

die Zeit $T_{N_t+1}-T_{N_t}$ (in t) zwischen dem nächsten und dem letzten Schadensfall.

1.13 Paradoxon. In der Situation von 1.11 hat $(t-T_{N_t},T_{N_t+1}-t)$ die gleiche Verteilung wie $(\min(Z_1,t),Z_2)$ und somit $T_{N_t+1}-T_{N_t}$ die gleiche Verteilung wie $\min(t,Z_1)+Z_2$.

Beweis. Es gilt mit 1.11 für $s\leq t$: $P[t-T_{N_t} < s, T_{N_t+1}- t \leq u] = P[N_t-N_{t-s} \neq 0, N_{t+u}-N_t \neq 0]$

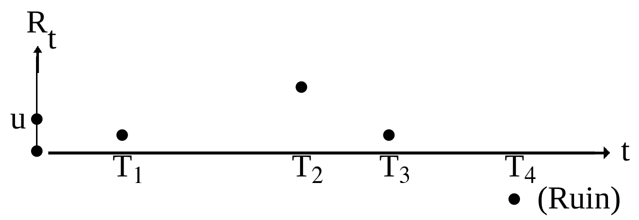
$= P[N_s-N_0 \neq 0] \cdot P[N_u-N_0 \neq 0] = P[Z_1 \leq s] \cdot P[Z_2 \leq u] = P[Z_1 \leq s,Z_2 \leq u]$. Für $s\downarrow v$ erhält man: $P[t-T_{N_t} \leq v, T_{N_t+1} - t \leq u] = P[Z_1 \leq v, Z_2 \leq u]$. Für $s>t$ geht man analog vor. Nach dem Maßeindeutigkeitssatz folgt jetzt die Behauptung (W.th. 7.7b). $\square$

§ 2 Das Cramér–Lundberg–Modell

In diesem Abschnitt betrachten wir ein Versicherungsunternehmen bei dem zu den Zeiten T_n Schäden der Höhe Y_n gemeldet werden. Dabei soll die Situation aus Def. 1.1 vorliegen. Dann können $(N_t, t\geq 0)$ als **Schadenanzahlprozeß** und $(X_t, t\geq 0)$ als **Gesamtschadenprozeß** bezeichnet werden. Dann gibt H(t) die mittlere Anzahl von Schäden in $[0,t]$.

Annahme: Ab jetzt sei $Y_n \geq 0$, $Y := Y_1$, $Z := Z_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $Y \sim Q$ (beliebig).

Unter dieser Annahme ist also $(N_t, t\geq 0)$ ein Poisson–Prozeß mit Intensität λ und $(X_t, t\geq 0)$ ein zusammengesetzter Poissonprozeß. Dem Gesamtschadenprozeß steht ein Input gegenüber, der durch den Prämienzufluß beschrieben wird. Dabei gehen wir von der vereinfachenden Annahme aus, daß wir uns diesen als deterministisch und sogar linear in der Zeit vorstellen. Genauer soll die **Gesamtprämieneinnahme** in $[0,t]$ gerade $c \cdot t$ sein mit der **Prämienrate** $c>0$.



Berechnet man die Prämienrate nach dem **Erwartungswertprinzip**, so setzt man:

$$ct = (1+\eta)\cdot E[X_t] = (1+\eta)\cdot\lambda\mu t, \text{ also } c = (1+\eta)\cdot\lambda\mu$$

in Hinblick auf 1.6 und 1.11a. Dabei heißt $\eta > 0$ (relativer) **Schwankungs–/ Sicherheitszuschlag**. Dann ergibt sich

$$E[R_t] := E[u + ct - X_t] = u + \eta\cdot\lambda\mu t.$$

2.1 Def. (a) $(R_t, t\geq 0)$ mit $R_t := u + ct - X_t$ heißt **Reserveprozeß** oder **Risikoprozeß**

(b) $\Psi(u) := P[R_t < 0 \text{ für ein } t>0] = P[X_{T_n} > u + cT_n \text{ für ein } n]$

ist die **Ruin–W.**(Wahrscheinlichkeit) bei einem **Anfangskapital** u. Die **Überlebens–W.** ist

$$\Phi(u) := 1 - \Psi(u) = P[R_t \geq 0 \ \forall t] = P[X_{T_n} \leq u + cT_n \ \forall n] .$$

Für die Größen Ψ und Φ sollen vier grundlegende Resultate [(I) – (IV)] (basic results [Grandell 1991]) hergeleitet werden, die auf Filip Lundberg und Harald Cramér zurückgehen. Zunächst soll dazu eine Integralgleichung für Φ hergeleitet werden. Es ist

$\Phi(u) = P[\sum_1^n Y_k \leq u + c\cdot\sum_1^n Z_k \ \forall n] = E[h(Z_1,Y_1)]$ nach Fubini (W.th. 14.9) mit

$$h(z,y) =: P[y + \sum_2^n Y_k \leq u + c\cdot(z + \sum_2^n Z_k) \ \forall n\geq 1].$$

Für $y > u + cz$ ist $h(z,y)=0$ und für $y \le u + cz$ ist

$h(z,y) = P[\sum_2^n Y_k \le u - y + c\cdot z + c\cdot \sum_2^n Z_k) \ \ \forall\, n\ge 2]$

$\quad = P[\sum_2^n Y_{k-1} \le u - y + c\cdot z + c\cdot \sum_2^n Z_{k-1}) \ \ \forall\, n\ge 2]$,

wegen $P[(Z_2,Y_2,Z_3,Y_3,\ldots) \in \Gamma] = P[(Z_1,Y_1,Z_2,Y_2,\ldots) \in \Gamma]$, $\Gamma \in \mathfrak{B}_\infty$.

Setzt man noch $\Phi(u) := 0$ für $u<0$, so haben wir:

$h(z,y) = \Phi(u + cz - y)$ und somit $\Phi(u) = E[\Phi(u + cZ - Y)]$. Die Zva $u+cZ$ hat die Dichte (W.th. 12.9)

$x \mapsto \frac{\lambda}{c}\, e^{-\lambda(x-u)/c} \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}((x-u)/c)$, also ergibt sich mit Fubini:

$\Phi(u) = \int_u^\infty \frac{\lambda}{c}\, e^{-\lambda(x-u)/c}\, E[\Phi(x - Y)]\, dx.$

2.2 Lemma. $\Phi(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\lambda u/c} \cdot \int_u^\infty e^{-\lambda x/c}\, E[\Phi(x - Y)]\, dx.$

Φ ist unstetig in 0; somit kann der Integrand unstetig sein. Trotzdem gilt die folgende Aussage:

2.3 Lemma. Mit $\gamma := \frac{\lambda}{c} > 0$, $f(x) := \gamma\cdot E[\Phi(x - Y)]$ ist $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mb und beschränkt, und es gilt:

$\Phi(u) := e^{\gamma u} \int_u^\infty e^{-\gamma x} f(x)\, dx$ sowie $\Phi(u) - \Phi(0) = \int_0^u [\gamma\cdot\Phi(s) - f(s)]\, ds$.

Die erste Gleichung ist gerade 2.2. Wäre $f(x)$ stetig, so würde aus 2.2 direkt folgen:

$\Phi'(u) = \gamma\cdot\Phi(u) - e^{\gamma u} e^{-\gamma u} f(x) = \gamma\cdot\Phi(u) - f(x).$

Beweis von 2.3 (zweite Gleichung). Es ist einerseits

$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = [e^{\gamma\beta} - e^{\gamma\alpha}] \cdot \int_\beta^\infty e^{-\gamma x} f(x)\, dx - e^{\gamma\alpha} \cdot \int_\alpha^\beta e^{-\gamma x} f(x)\, dx$.

Andererseits erhält man mit Fubini

$$\int_\alpha^\beta [\gamma\cdot\Phi(s) - f(s)]\, ds = \int_\alpha^\beta \gamma e^{\gamma s}\cdot \left[\int_s^\infty e^{-\gamma x} f(x)\, dx\right] ds - \int_\alpha^\beta f(s)\, ds$$
$$= \int \gamma e^{\gamma s}\cdot \mathbf{1}_{(\alpha,\beta)}(s) \left[\int \mathbf{1}_{(s,\infty)}(x)\, e^{-\gamma x} f(x)\, dx\right] ds - \ldots$$
$$= \int e^{-\gamma x} f(x) \left[\int \mathbf{1}_{(\alpha,\beta)}(s)\cdot \mathbf{1}_{(s,\infty)}(x)\, \gamma e^{\gamma s}\, ds\right] dx - \ldots$$
$$= \int_\alpha^\infty e^{-\gamma x} f(x) \left[\int_\alpha^{\beta\wedge x} \gamma e^{\gamma s}\, ds\right] dx - \ldots$$
$$= \int_\alpha^\infty e^{-\gamma x} f(x)\, [e^{\gamma\cdot \beta\wedge x} - e^{\gamma\alpha}]\, dx - \ldots$$
$$= \int_\alpha^\beta e^{-\gamma x} f(x)\, [e^{\gamma\cdot x} - e^{\gamma\alpha}]\, dx + \int_\beta^\infty e^{-\gamma x} f(x)\, [e^{\gamma\cdot\beta} - e^{\gamma\alpha}]\, dx - \ldots$$
$$= \int_\alpha^\beta f(x)\, dx - e^{\gamma\alpha} \int_\alpha^\beta e^{-\gamma x} f(x)\, dx + [e^{\gamma\cdot\beta} - e^{\gamma\alpha}]\cdot \int_\beta^\infty e^{-\gamma x} f(x)\, dx - \ldots$$
$$= [e^{\gamma\cdot\beta} - e^{\gamma\alpha}]\cdot \int_\beta^\infty e^{-\gamma x} f(x)\, dx - e^{\gamma\alpha} \int_\alpha^\beta e^{-\gamma x} f(x)\, dx. \ \Box$$

2.4 Proposition. $\Phi(u) = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\cdot \int_0^u \Phi(u-z)\, P[Y>z]\, dz$.

Bew. Mit Fubini erhält man: ${}_0\!\int^u \Phi(u-z)\, P[Y>z]\, dz$

$$= {}_0\!\int^u \Phi(u-z) \left[{}_{(z,\infty)}\!\int 1\, Q[ds]\right] dz \;=\; {}_0\!\int^\infty \mathbf{1}_{[0,u]}(z)\, \Phi(u-z) \left[\int \mathbf{1}_{(z,\infty)}(s)\, Q[ds]\right] dz$$

$$= \int \left[{}_0\!\int^{u\wedge s} \Phi(u-z)\, dz\right] Q[ds]$$

$$= {}_{[0,u]}\!\int \left[{}_0\!\int^s \Phi(u-z)\, dz\right] Q[ds] \;+\; {}_{(u,\infty)}\!\int \left[{}_0\!\int^u \Phi(u-z)\, dz\right] Q[ds]$$

$$= \ldots \;+\; {}_0\!\int^u \Phi(u-z)\, dz \;\cdot (1 - {}_{[0,u]}\!\int Q[ds])$$

$$= {}_0\!\int^u \Phi(u-z)\, dz - {}_{[0,u]}\!\int \left[{}_s\!\int^u \Phi(u-z)\, dz\right] Q[ds] \qquad t := s+u-z$$

$$= {}_0\!\int^u \Phi(v)\, dv \;-\; {}_{[0,u]}\!\int \left[{}_s\!\int^u \Phi(t-s)\, dt\right] Q[ds] \qquad v := u-z$$

$$= {}_0\!\int^u \Phi(t)\, dt \;-\; {}_0\!\int^u \left[{}_{[0,t]}\!\int \Phi(t-s)\, Q[ds]\right] dt \qquad 0 \le s \le t \le u$$

$$= {}_0\!\int^u \{\Phi(t) - {}_{[0,t]}\!\int \Phi(t-s)\, Q[ds]\}\, dt$$

$$= {}_0\!\int^u \{\Phi(t) - E[\Phi(t-Y)]\}\, dt \quad \text{wegen } \Phi(t)=0\,,\ t<0.$$

Dann haben wir also

$$\gamma\cdot {}_0\!\int^u \Phi(u-z)\, P[Y>z]\, dz = {}_0\!\int^0 [\gamma\cdot\Phi(t) - f(t)]\, dt = \Phi(u) - \Phi(0) \;\text{ gemäß 2.3. } []$$

2.5 Satz. (a) Φ ist isoton;

(b) $E[R_t] = u + (c - \lambda\mu)\cdot t$;

Für $c > \lambda\mu$ gilt:

(c) $\Phi(\infty) = 1$, $\psi(\infty) = 0$;

(d) $\Phi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}$, $\Psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}$. **(I)**

Die Aussage (d) ist auch Stabilitätsresultat in dem Sinne, daß $\Psi(0)$ nur über den Erwartungswert μ von der Verteilung von Y abhängt.

Bew. a) ist klar. b) ergibt sich aus 1.11a.

c) Gemäß 1.4 existiert Ω_o mit $P[\Omega_o]=1$, sodaß $X_{T_n}/T_n \to \lambda\mu$ $(n\to\infty)$ [auch $T_n \to \infty$] auf Ω_o. Also gilt

$(cT_n - X_{T_n})/T_n \to c - \lambda\mu > 0$ auf Ω_o. Es folgt $0 < \underline{\lim}\, (cT_n - X_{T_n}) \le \infty$ [sogar $= \infty$] und somit

$\inf_n (cT_n - X_{T_n}) > -\infty$ auf Ω_o. Damit gilt:

$$1 = P[\cup_k \{cT_n - X_{T_n} \ge -k\ \forall\, n\}] = \lim_k P[cT_n - X_{T_n} \ge -k\ \ \forall\, n]$$

$$= \lim_k P[X_{T_n} \le k + cT_n\ \ \forall\, n] = \lim_k \Phi(k)\,.$$

d) Wegen $\Phi(t)=0$ für $t<0$ besagt 2.4:

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\cdot {}_0\!\int^\infty \Phi(u-z)\, P[Y>z]\, dz\,.$$

Wegen ${}_0\!\int^{\infty} P[Y>z]\ dz = \mu <\infty$ [W.th. 14.7a oder Beweis von 3.2a unten] folgt mit majorisierter Konvergenz:

$$\Phi(\infty) = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\cdot {}_0\!\int^{\infty} \Phi(\infty)\, P[Y>z]\ dz = \Phi(0) + \Phi(\infty)\cdot\frac{\lambda}{c}\,\mu\ ,$$

also mit (c): $\Phi(0) = \Phi(\infty)(1-\frac{\lambda}{c}\mu) = 1-\frac{\lambda}{c}\,\mu$. []

In einem Spezialfall kann Ψ berechnet werden.

2.6 Beispiel. Exponentialverteilte Schäden.

Sei $Y \sim \mathrm{Exp}(1/\mu) = Q$. Dann besagt 2.4:

$\Phi(u) = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\cdot {}_0\!\int^{u} \Phi(u-z)\, e^{-z/\mu}\, dz = \Phi(0) + \frac{\lambda}{\mu}\, e^{-u/\mu}\ {}_0\!\int^{u}\Phi(t)\, e^{t/\mu} dt$ (mit $t=u-z$).

Also ist Φ stetig in $[0,\infty)$ und damit hier zugleich differenzierbar, und es ergibt sich:

$\Phi'(u) = -\frac{1}{\mu}(\Phi(u)-\Phi(0)) + \frac{\lambda}{c}\, e^{-u/\mu}\, \Phi(u)\, e^{u/\mu} = -(\frac{1}{\mu}-\frac{\lambda}{c})\Phi(u) + \frac{1}{\mu}\Phi(0) = -\frac{1}{\mu}[1-\frac{\lambda c}{\mu}]\,\Phi(u) + \frac{1}{\mu}[1-\frac{\lambda c}{\mu}]$.

Somit gilt mit 2.5d: $\Psi'(u) = -\frac{1}{\mu}\,(1-\frac{\lambda\mu}{c})\cdot\Psi(u)$ mit $\Psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}$. Es folgt:

2.7 Satz. Für den Fall $Y_k \sim \mathrm{Exp}(1/\mu)$ gilt:

$$\Psi(u) = \Psi(0)\cdot e^{-[1-\Psi(0)]\cdot u/\mu} \quad \text{mit } \Psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}\ . \qquad \textbf{(II)}$$

§3 Die Cramér–Lundberg–Approximation.

Jetzt soll eine Approximation von $\Psi(u)$ für große u gefunden werden. Die Voraussetzung $Y_k \sim \mathrm{Exp}(1/\mu)$ wird dabei abgeschwächt werden zu $P[Y>t] = O(e^{-Rt})$. Dann stellt sich insbesondere die Frage: Gilt dann auch: $\Psi(t) = O(e^{-Rt})$?

Schreibt man 2.4 mit Hilfe von 2.5d um auf $\Psi = 1-\Phi$, so erhält man mit $\int_0^\infty P[Y>z]\, dz = \mu$:

3.1 Lemma. $\Psi(u) = \frac{\lambda}{c} \cdot \left[\int_u^\infty P[Y>t]\, dt + \int_0^u \Psi(u-t)\, P[Y>t]\, dt \right]$ und

$$e^{Ru} \cdot \Psi(u) = g(u) + \int_0^u e^{R(u-t)} \cdot \Psi(u-t)\, f(t)\, dt \,\Big] .$$

mit $g(u) := \frac{\lambda}{c} \cdot e^{Ru} \cdot \int_u^\infty P[Y>t]\, dt$ und $f(t) = \frac{\lambda}{c} \cdot e^{Rt} \cdot P[Y>t] \cdot 1_{(0,\infty)}(t)$.

Dies ist eine Integralgleichung für $e^{Ru} \cdot \Psi(u)$. Ist f die Dichte eines W–Maßes, so ist eine sogenannte Erneuerungsgleichung. Dann weiß man etwas über das asymtotische Verhalten der Lösung, also hier von $e^{Ru} \cdot \Psi(u)$. Wir suchen jetzt also ein R, sodaß f eine Dichte ist.

3.2 Lemma. Sei $q(r) : E[e^{-rY}]$, $r \in \mathbb{R}$, die Laplace–Transformierte von Y sowie

$r_\infty := \inf \{r;\, q(r) < \infty\}$. Dann gilt $-\infty \le r_\infty \le 0$ und:

(a) $\int_0^\infty e^{-rt}\, P[Y > t]\, dt = \frac{1}{r}\, [1 - q(r)]$ für $r \ne 0$;

(b) für $c > \lambda\mu$ und

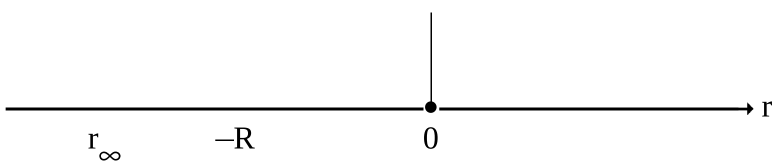
(3.3) $\qquad q(r_\infty+0) = \infty$

existiert ein R>0 mit

(3.4) $\qquad \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^\infty e^{Rt} \cdot P[Y>t]\, dt = 1 \iff q(-R) = 1 + R \cdot \frac{c}{\lambda}.$

R heißt dann **Lundberg–Exponent**.

Wegen $q(0) = 1$ gilt $r_\infty \le 0$. somit impliziert die Regularitätsbedingung (3.3) insbesondere: $r_\infty < 0$, d.h. es existiert ein $r = -\varepsilon$ mit $\varepsilon>0$, sodaß das sogenannte exponentielle Moment $E[e^{\varepsilon Y}] = q(-\varepsilon)$ endlich ist. Die Verteilung von Y darf also nicht zu viel Masse "bei ∞" haben. Für solche Verteilungen ist die Regularitätsbedingung dann wiederum sehr schwach.



Beweis von 3.2. Teil (a) folgt aus Fubini: $\int_0^\infty e^{-rt}\, P[Y>t]\, dt = \int_{[0,\infty)} e^{-rt} \int_{(t,\infty)} 1\, Q[ds]\, dt$

$= \int_{(0,\infty)} \int_{[0,s)} e^{-rt}\, dt\;\; Q[ds] = \int_{[0,\infty)} \frac{1}{r}\,(1 - e^{-rs})\, Q[ds] = \frac{1}{r}\, [1 - q(r)]$.

b) Wir wissen (vgl. W.th. 15.6b):

(3.5) $\qquad q'(r) = -\,E[Y \cdot e^{-rY}] \quad$ für $r > r_\infty$.

Für die Gerade $y(r) = 1 - r \cdot \frac{c}{\lambda}$ gilt dagegen $y(0) = q(0)$, $y' < q'(0) = -\mu$.

Ist $r_\infty > -\infty$, so folgt aus $q(r_\infty{+}0) = \infty$ und $y(r_\infty) < \infty$, daß sich q und y auch links von 0 noch einmal schneiden in einem Punkt –R.

Ist $r_\infty = -\infty$, so zeigen wir: $q'(r_\infty{+}0) = -\infty$. Wegen monotoner Konvergenz gilt nämlich:

$$-q'(r_\infty{+}0) = -\,q'(-\infty) = E[Y \cdot e^{\infty \cdot Y}] = \infty.$$

Dann müssen sich q und y ebenfalls links von 0 noch einmal schneiden in einem Punkt –R. $\square$

Sei nun R wie in (3.4), dann ist f(t) Lebesgue–Dichte eines W–Maßes. Sei ferner

$$\Psi_R(u) := e^{Ru} \cdot \Psi(u),$$

dann gilt 3.1 die

Erneuerungsgleichung $\;\Psi_R(u) = g(u) + {}_0\!\int^u \Psi_R(u-t)\, f(t)\, dt =: g(u) + f\star\Psi_R(u).$

Durch Iteration folgt:

$\Psi_R = g + f\star(g + f\star\Psi_R) = g + f\star g + f\star(f\star\Psi_R) = g + f\star g + (f\star f)\star\Psi_R$

[vgl. W.th. 13.11 für den Fall Ψ_R eine Dichte ist]. Durch Induktion ergibt sich:

$$\Psi_R = g + \textstyle\sum_{k=1}^\infty f^{\star k}\star g + f^{\star n}\star\Psi_R \quad \text{mit} \quad f^{\star n} = f\star \overset{n\ \text{mal}}{\ldots} \star f.$$

Sei $(\tilde T_n)$ Erneuerungsprozeß zur Folge $(\tilde Z_n)$ auf $(\tilde\Omega, \tilde{\mathfrak{F}}, \tilde P)$, wobei $\tilde Z_n$ die Dichte f hat; dann hat $\tilde T_n$ die Dichte $f^{\star n}$ (W.th. 13.12). Es folgt $f^{\star n}\star\Psi_R(u) \le \sup_{[0,u]} \Psi_R \cdot \tilde P[\tilde T_n \le u] \to 0$ für $n\to\infty$ nach 1.3c.

Damit erhalten wir eine Darstellung der Lösung Ψ_R der Erneuerungsgleichung und damit auch für Ψ.

3.6 Lemma. (a) $\Psi_R = g + \sum_{n=1}^\infty f^{\star n}\star g$;

(b) $\quad 1/\tilde\lambda := {}_0\!\int^\infty t f(t)\, dt = \frac{1}{R}\,[-\frac{\lambda}{c}\, q'(-R) - 1]$;

(c) $\quad \frac{1}{t}\sum_1^\infty {}_0\!\int^t f^{\star n}(s)\, ds =: \frac{1}{t}\tilde H(t) \to \tilde\lambda$;

(d) $\quad {}_0\!\int^\infty g(t)\, dt = \frac{1}{R} \cdot (1 - \frac{\lambda\mu}{c})$.

Beweis. Teil (a) wurde oben gezeigt. b) Mit Fubini folgt wie bei 3.2a:

$${}_0\!\int^\infty t\, e^{-rt}\, P[Y>t]\, dt = {}_{[0,\infty)}\!\int {}_{[0,s)}\!\int e^{-rt}\, dt\, Q[ds].$$

Nutzt man nun aus, daß $\frac{1}{R} \cdot (t - \frac{1}{R}) \cdot e^{Rt}$ Stammfunktion zu te^{Rt} ist und daß $-q'(r) = E[Y \cdot e^{-rY}] = \int s\, e^{-rs}\, Q[ds]$ gilt, so erhält man: $1/\tilde\lambda = \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{1}{R}\,[-\,q'(-R) + \frac{1}{R}(1 - q(-R))]$.

Mit $1 - q(-R) = -R\,\frac{c}{\lambda}$ [vgl. (3.4)] folgt die Behauptung.

Teil (c) ist der elementare Erneuerungssatz 1.7 für den Erneuerungsprozeß $(\tilde{T}_n)$.

Teil (d) folgt wieder mit Fubini. □

3.7 Lemma. Für die Lösung Ψ_R der Erneuerungsgleichung gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Psi_R(u)\,du = \tilde{\lambda} \cdot \int_0^\infty g(u)\,du.$$

Beweis. Sei $G(t) := \int_0^t g(s)\,ds$, $\bar{G}(t) := G(\infty) - G(t)$, $\bar{G}(t) \le \varepsilon \ \forall\, t \ge t_\varepsilon$; dann folgt mit Fubini:

$$\int_0^t f^{\star n} \star g(s)\,ds = f^{\star n} \star G(t) \quad \text{und deshalb mit 3.5a:}$$

$$\int_0^t \Psi_R(u)\,du = G(t) + \Sigma_1^\infty \int_0^t f^{\star n} \star g(u)\,du = G(t) + \Sigma_1^\infty f^{\star n} \star G(t) = G(t) + \Sigma_1^\infty f^{\star n} \star (G(\infty) - \bar{G})(t).$$

Also erhät man:

$$\frac{1}{t} \int_0^t \Psi_R(u)\,du = \frac{1}{t} G(t) + G(\infty) \cdot \frac{1}{t} \tilde{H}(t) - \frac{1}{t} \Sigma_1^\infty f^{\star n} \star \bar{G}(t) =: A + B + C$$

mit $A = o(1)$, $B \to \tilde{\lambda} \cdot G(\infty)$ nach 3.5c und

$$0 \le C = \frac{1}{t} \Sigma_1^\infty \int_{t-t_\varepsilon}^t f^{\star n}(u) \cdot \bar{G}(t-u)\,du + \frac{1}{t} \Sigma_1^\infty \int_0^{t-t_\varepsilon} f^{\star n}(u) \cdot \bar{G}(t-u)\,du$$

$$\le \bar{G}(0) \cdot \frac{1}{t} [\tilde{H}(t) - \tilde{H}(t-t_\varepsilon)] + \frac{\varepsilon}{t} \cdot \tilde{H}(t-t_\varepsilon) \to \tilde{\lambda}\varepsilon\,. \ \square$$

3.8 Cramér–Lundberg–Approximation.

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru} \Psi(u) = [1 - \tfrac{\lambda\mu}{c}] \,/\, [-\tfrac{\lambda}{c} q'(-R) - 1]. \qquad \textbf{(III)}$$

Beweis. Es kann hier nur die Konvergenz im Integral–Mittel gezeigt werden, d.h.

$$\frac{1}{t} \int_0^t \Psi_R(u)\,du \to [1 - \tfrac{\lambda\mu}{c}] \,/\, [-\tfrac{\lambda}{c} q'(-R) - 1]$$

Diese folgt aber unmittelbar aus 3.6 und 3.7. Für die stärkere Aussage braucht man die stärkere Form des Erneuerungssatzes [Blackwell]:

(3.9) $\qquad \tilde{H}(t) - \tilde{H}(t-h) \to \tilde{\lambda} h\,.$

Beispiel. Die Cramér–Lundberg–Approximation ist exakt, wenn Y exponentialverteil ist.
Für $Y \sim \mathrm{Exp}(1/\mu)$ gilt nämlich: $q(r) := E[e^{-rY}] = \frac{1}{1+\mu r}$. Damit ist $r_\infty = -\frac{1}{\mu}$.
Die Gleichung (3.4) führt zu: $\frac{1}{1-\mu R} = 1 + R \cdot \frac{c}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{1-\mu R} = \lambda + R \cdot c \Leftrightarrow \lambda = (\lambda + R \cdot c) \cdot (1-\mu R)$
$\Leftrightarrow \lambda = \lambda + R \cdot c - (\lambda + R \cdot c) \cdot \mu R \Leftrightarrow Rc = \lambda\mu R + c\mu R^2 \Leftrightarrow R = \frac{c-\lambda\mu}{c\mu}$ oder $R = 0$. Also:

$$R = \frac{1}{\mu}(1 - \frac{\lambda\mu}{c}) = [1 - \Psi(0)]/\mu, \quad 1 - \mu R = \frac{\lambda\mu}{c}.$$

Ferner gilt für $[1 - \frac{\lambda\mu}{c}] \,/\, [-\frac{\lambda}{c} q'(-R) - 1]$: $q'(r) = -\mu\,(\frac{1}{1+\mu r})^2$, also: $q'(-R) = -\mu\,(\frac{c}{\lambda\mu})^2$ und damit
$-\frac{\lambda}{c} q'(-R) - 1 = \frac{\lambda}{c}\mu\,(\frac{c}{\lambda\mu})^2 - 1 = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 = \frac{c-\lambda\mu}{\lambda\mu}$ schließlich
$\frac{c-\lambda\mu}{c} \,/\, [-\frac{\lambda}{c} q'(-R) - 1] = \frac{\lambda\mu}{c} = \Psi(0)$. □

§4 Die Lundberg Ungleichung

Es sei wieder die Voraussetzung (3.3) erfüllt, so daß $r_\infty < 0$ und R existiert.

4.1 Lemma. Für $r > r_\infty$ gilt: $E[e^{-r\cdot X_t}] = e^{[q(r)-1]\cdot\lambda t}$.

Beweis. Da N_t von den Y_n unabhängig ist haben wir:

$E[e^{-r\cdot X_t}] = \Sigma_{n=0}^{\infty} E[\mathbf{1}_{\{N_t=n\}}\cdot\exp\{-r\,\Sigma_{k=1}^{n} Y_k\}]$

$= \Sigma_{n=0}^{\infty} P[N_t=n]\cdot E[\Pi_{k=1}^{n}\exp\{-rY_k\}] = \Sigma_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\cdot q(r)^n = e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda t\cdot q(r)}$. []

4.2 Definition. Die **Filterung** $\{\mathfrak{F}_t, t\ge 0\}$ sei definiert durch

$$\mathfrak{F}_t := \sigma(X_s,N_s, s\le t) = \sigma(\cup_{s\le t}(X_s,N_s)^{-1}(\mathfrak{B}_2)).$$

Dabei bedeutet Filterung, daß $\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t$ für s < t gilt.

4.3 Lemma. Für $s \le t$ is jede $\mathfrak{F}_s$–meßbare Zva unabhängig von $X_t - X_s$.

Beweis. Zu zeigen ist offenbar:

(4.4) $\qquad P[\Gamma\cap\{X_t - X_s \in B\}] = P[\Gamma]\cdot P[X_t - X_s \in B]$ für $B \in \mathfrak{B}_1$.

Sei dazu $Y_t := (X_t,N_t)$ und $\mathfrak{C} := \cup_n \cup_{0<t_1<...<t_n\le s} \mathfrak{C}(\{t_1,...t_n\})$ mit

$\mathfrak{C}(\{t_1,...t_n\}) := \sigma(Y_{t_1}-Y_0, Y_{t_2}-Y_{t_1},...,Y_{t_n}-Y_{t_{n-1}}) = \sigma(Y_{t_1},Y_{t_2},...,Y_{t_n})$.

Dann gilt $\mathfrak{F}_s = \sigma(\mathfrak{C})$. Nach Satz 1.11b wissen wir: (4.4) gilt für $\Gamma \in \mathfrak{C}$. Andererseits ist $\mathfrak{C}$ ∩–stabil; denn mit $\Gamma_1 \in \mathfrak{C}(\{t_1,...t_n\})$ und $\Gamma_2 \in \mathfrak{C}(\{s_1,...s_m\})$ haben wir offenbar $\Gamma_1\cap\Gamma_2 \in \mathfrak{C}(\{t_1,...t_n\}\cup\{s_1,...s_m\})$. Somit folgt mit einem Dynkinsystem auch, daß (4.4) für $\Gamma \in \mathfrak{F}_s = \sigma(\mathfrak{C})$ gilt. []

4.5 Lemma. Mit $M_t := e^{-r\cdot X_t - (q(r)-1)\lambda t}$ ist $\{M_t, t\ge 0\}$ ein **Martingal** bzgl. $\{\mathfrak{F}_t\}$, d.h. es gilt:

(4.6) $\qquad {}_A\!\int M_s\,dP = {}_A\!\int M_t\,dP$ für $A \in \mathfrak{F}_s$ und s < t.

4.7 Bemerkung. Die Beziehung (4.4) bedeutet gerade: $E[M_t|\mathfrak{F}_s] = M_s$ für s < t.

Beweis von 4.5. Für $A \in \mathfrak{F}_s$ und $s \le t$ gilt:

${}_A\!\int M_t\,dP = E[\mathbf{1}_A\cdot e^{-r\cdot X_t-[q(r)-1]\lambda t}] = e^{-[q(r)-1]\lambda t}\,E[\mathbf{1}_A\cdot e^{-rX_s}\cdot e^{-r(X_t-X_s)}]$

$= e^{-[q(r)-1]\lambda t}\,E[\mathbf{1}_A\cdot e^{-rX_s}]\cdot E[e^{-r(X_t-X_s)}] = e^{-[q(r)-1]\lambda t}\,E[\mathbf{1}_A\cdot e^{-rX_s}]\cdot E[e^{-rX_{t-s}}]$

nach Satz 1.11 mit $X_0 = 0$. Nun gilt $E[e^{-rX_{t-s}}] = e^{[q(r)-1]\lambda(t-s)}$ und damit

${}_A\!\int M_t\,dP = e^{-[q(r)-1]\lambda t}\,E[\mathbf{1}_A\cdot e^{-rX_s}]\cdot e^{[q(r)-1]\lambda(t-s)} = E[\mathbf{1}_A\cdot e^{-r\cdot X_s - [q(r)-1]\lambda s}] = {}_A\!\int M_s\,dP$.

4.8 Definition. $\tau := \tau_u := \inf\{t \geq 0;\, R_t < 0\} = \inf\{t \geq 0;\, u + ct < X_t\}$ ist der **Ruinzeitpunkt.**

4.9 Lemma. τ ist eine **Stoppzeit** bzgl. $\{\mathfrak{F}_t\}$, d.h. es gilt:

$$\{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t \text{ für } t \leq 0.$$

Beweis. $\{\tau \leq t\} = \{u + ct < X_t\} \cup \{u + ct < X_s \text{ für ein } s \in \mathbb{Q}, s<t\} \in \mathfrak{F}_t$. []

4.10 Lemma. Die Filterung $\{\mathfrak{F}_t\}$ ist rechtsstetig, d.h. es gilt:

$$\mathfrak{F}_{t+} := \cap_{s > 0} \mathfrak{F}_{t+s} = \mathfrak{F}_t \text{ für } t \geq 0.$$

Beweis. Sicherlich gilt: $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_{t+}$. Für die Umkehrung setzen wir wieder $Y_t := (X_t,N_t)$ und werden die folgende Eigenschaft benötigen:

(4.11) $\quad \forall\, \omega, t \geq 0\ \exists\, \varepsilon = \varepsilon(t,\omega)$ mit: $Y_{t+s}(\omega) = Y_t(\omega)$, $0 \leq s \leq \varepsilon$.

Setzt man nun $A_h = A_h(t) := \{Y_{t+s}= Y_t,\, s \in [0,h]\} = \{Y_{t+s}= Y_t,\, s \in \mathbb{Q}\cap[0,h]\}$, $h \in \{1,1/2,1/3,...\}$ so gilt

(4.11)' $\quad A_h \uparrow \Omega$ für $h \downarrow 0$.

Wir zeigen nun für die folgenden Spur–σ–Algebren:

(4.12) $\quad A_h \cap \mathfrak{F}_{t+h} \subset A_h \cap \mathfrak{F}_t$.

Ein Erzeugendensystem von $A_h \cap \mathfrak{F}_{t+h}$ ist $A_h \cap \mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{C} := \cup_{u\leq t+h} Y_u^{-1}(\mathfrak{B}_2)$. Dabei gilt:

$$A_h \cap \{Y_{t+s} \in B\} = A_h \cap \{Y_t \in B\} \subset A_h \cap \mathfrak{F}_t \quad \text{für } s \leq h,$$

und somit $A_h \cap \mathfrak{C} \subset A_h \cap \mathfrak{F}_t$. Damit ist (4.12) gezeigt.

Sei nun $\Gamma \in \cap_{h\in\{1,1/2,\, 1/3,...\}} \mathfrak{F}_{t+h} = \mathfrak{F}_{t+}$ beliebig gewählt.

Aus (4.12) folgt $A_h \cap \Gamma \subset A_h \cap \mathfrak{F}_t$. Also existiert ein $\Gamma_h \in \mathfrak{F}_t$ mit $A_h \cap \Gamma = A_h \cap \Gamma_h$.

Es ergibt sich nun für die symmetrische Differenz: $\Gamma_h \,\Delta\, \Gamma = \Gamma_h\cap\Gamma^c \cup \Gamma_h^c \,\Delta\, \Gamma \subset A_h^c \downarrow \emptyset$.

Damit haben wir $\Gamma = \lim_{h\downarrow 0} \Gamma_h \in \mathfrak{F}_t$. []

Aus der Martingaltheorie erhält man nun:

4.13 Stoppsatz. $E[M_{\tau\wedge t}] = M_0 = 1$ für alle $t\geq 0$.

Damit erhalten wir: $1 = E[M_{\tau\wedge t}] \geq E[M_{\tau\wedge t} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}] = E[M_\tau \cdot \mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}]$.

Wir setzen nun speziell $r = -R$ (R Lundberg–Exponent), dann haben wir mit (3.4):

(4.14) $\quad M_t = e^{R\cdot(X_t - ct)}$.

Dabei gilt auf $\{\tau\le t\} \subset \{\tau<\infty\}$: $u + c\tau < X_\tau$ und damit:

$$M_\tau = \exp\{R\cdot(X_\tau - c\tau)\} \ge \exp\{R\cdot(u+c\tau - c\tau)\} = e^{Ru}.$$

Es folgt: $1 \ge E\left[M_\tau \cdot \mathbf{1}_{\{\tau\le t\}}\right] \ge e^{Ru}\cdot E\left[\mathbf{1}_{\{\tau\le t\}}\right] = e^{Ru}\cdot P\left[\tau \le t\right]$.

Mit $\Psi(u) = P\left[\tau < \infty\right] = \lim_{t\to\infty} P\left[\tau \le t\right]$ führt dies zu

4.15 Lundberg–Ungleichung. Ist R der Lundberg–Koeffizient, so gilt:

$$\Psi(u) \le e^{-Ru} \quad \text{für } u \ge 0. \qquad \textbf{(IV)}$$

§5 Finanzmärkte

Es werden zeitdiskrete Modelle zugrundegelegt mit einem endlichen **Zeithorizont** $T^* \in \mathbb{N}$. Der Markt wird durch die folgende **Situation** beschrieben:

Es bestehen 1 + d Anlagemöglichkeiten jeweils zu den Zeitpunkten $t = 0,1,...,T^*-1$:

Eine der Anlagemöglichkeiten ist das *Sparbuch* / *Bankkonto* (saving / bank account), das durch die *Zinssätze* i_t jeweils für die Periode $[t,t+1)$ beschrieben wird. Um die Schreibweise zu vereinfachen, wird hier angenommen, daß eine Periode die Länge 1 hat. Ist die Länge h, so muß t durch $t \cdot h$ ersetzt werden. Dabei wird angenommen, daß der gleiche Zinssatz i_t gilt, wenn man Geld anlegt und wenn man Geld leiht. Dies ist natürlich eine Modelleinschränkung. Eine Anlage von η Euro hat in t den Wert $\eta \cdot B_t$ mit

(5.1) $$B_t := \Pi_{m=0}^{t-1} (1+i_m), \quad B_0 \equiv 1.$$

Dabei ist i_m der Zinssatz für kurzfristige Anlagen *(kurzfristiger Zinssatz)*. Oft empfiehlt sich, die Darstellung für zeitstetige Modelle zu übernehmen, indem man mit der *kurzfristigen Zinsrate* (short rate) r_t arbeitet mit:

(5.2) $$1 + i_t =: e^{r_t} \text{ mit } t \geq 0.$$

Dann hat man

(5.3) $$B_t := \exp\{\Sigma_{m=0}^{t-1} r_m\}.$$

Die anderen Anlagemöglichkeiten sind d risikobehaftete *Wertpapiere* (*stocks*) [z.B. Aktien oder Devisen]; ihre Preise / Kurse werden durch stochastische Prozesse beschrieben, die sogenannten *Preisprozesse* $\{S_t^k, t=0,1,...,T^*\}$. Eine Anlage von $\xi^k \in \mathbb{R}$ Anteilen in das kursabhängige Wertpapier mit Index $k \in \{1,...,d\}$ und dem Kurs $S_t^k>0$ kostet z.Zt. t=0 $\xi^k \cdot S_0^k$ Euro und hat z.Zt. t den Wert $\xi^k \cdot S_t^k$. Die Anlage $(\eta,\xi) = (\eta,\xi^1,...,\xi^d)$ kostet also z.Zt. t=0 $\eta \cdot B_0 + \xi^\top S_0 = \eta + \Sigma_{k=1}^d \xi^k \cdot S_0^k$ Euro und hat z.Zt t den Wert $\eta \cdot B_t + \xi^\top \cdot S_t$ mit $S_t = (S_t^1,...,S_t^d)$. $\{S_0,...,S_T\}$ heißt der *Preisprozeß* der risikobehafteten Wertpapiere.

Dabei schreiben wir $x^\top y = x^\top \cdot y$ für das übliche Skalarprodukt in $\mathbb{R}^d$.

Negative Anteile ξ^k entsprechen sogenannten *Wertpapierleerverkäufen*. D.h. etwa, daß man Aktien verkauft, die man noch nicht besitzt, die man also einem anderen Investor schuldet. Das Sparbuch wird eine Sonderrolle spielen, nämlich die Rolle eines *Numeraires*. Die Preisentwicklung des k–ten Wertpapiers wird in Beziehung zu ihm gesetzt, d.h. durch $\{B_t\}$ diskontiert. Die Zva S_t^k werden stets als positiv angenommen.

Die Unsicherheit über die Marktentwicklung wird durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ modelliert. Wir machen die folgende Generalvoraussetzung:

5.4a Annahme. Es existiert eine Filterung $\{\mathfrak{F}_t,\ 0 \le t \le T^*\}$ von aufsteigenden σ–Algebren, also $\mathfrak{F}_{t-1} \subset \mathfrak{F}_t$. Dabei ist $\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset,\Omega\}$ die triviale σ–Algebra und o.E. $\mathfrak{F}_{T^*} = \mathfrak{F}$.

Dabei beschreibt $\mathfrak{F}_t$ die bis zum Zeitpunkt t beobachtbaren Ereignisse, also den Informationsstand in t. Ein wichtiges **Beispiel** ist

$$\mathfrak{F}_t = \sigma(r_m, S_m,\ m \le t).$$

Die $\mathfrak{F}_t$–meßbaren Zva sind die zum Zeitpunkt t bekannten/beobachtbaren (Markt–) Größen, wie Preise und Kurse. Die Annahme $\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset,\Omega\}$ bedeutet gerade, daß in t=0 alle Größen bekannt sind. Vorangehende Informationen über den Markt werden nicht vergessen; dies sagt die Beziehung: $\mathfrak{F}_{t-1} \subset \mathfrak{F}_t$. Wir sagen, ein stochastischer Prozeß $\{Z_t\}$ ist *adaptiert* (an die Filterung $\{\mathfrak{F}_t\}$), wenn Z_t $\mathfrak{F}_t$–meßbar ist. Dies impliziert, daß Z_0 determistisch ist. Die folgende **Annahme** ist natürlich:

5.4b Annahme. $\{r_t\}$ (und damit $\{B_t\}$) sowie $\{S_t\}$ sind adaptiert.

In obigem Beispiel ist diese Annahme per definitionem erfüllt. Ein Investor kann also stets die Kursentwicklungen bis z.Z. t beobachten. Für $\{B_t\}$ gilt noch eine Besonderheit; denn B_t ist sogar $\mathfrak{F}_{t-1}$–meßbar. Man sagt auch $\{B_t\}$ ist *vorhersehbar*. Man kann eine Anlage in das Sparbuch auch als Wertpapier auffassen mit dem Preisprozeß $\{B_t\}$. Für den Preisprozeß des k–ten Wertpapiers heißt $(S^k_{t+1} - S^k_t)/S^k_t$ die (*einfache*) *Rendite* und $\ln(S^k_{t+1}/S^k_t)$ die *log-Rendite* in $[t,t+1)$. Dann ist also i_t die (einfache) Rendite und r_t die log–Rendite des Sparbuchs. Im Gegensatz zum Kurs einer Aktie soll die Rendite beim Sparbuch in t für die kommende Periode $[t,t+1)$ bekannt sein.

Investitionen können gemäß eines Portfolioplanes vorgenommen werden:

5.5 Definition. Ein **Portfolioplan** ξ ist gegeben durch einen adaptierten $\mathbb{R}^d$–wertigen Prozeß $\xi = \{\xi_0,\ldots,\xi_{T^*-1}\}$ mit $\xi_t = (\xi^1_t,\ldots,\xi^d_t)$. Ein **Sparplan** η ist gegeben durch einen adaptierten reellwertigen Prozeß $\eta = \{\eta_0,\ldots,\eta_{T^*-1}\}$.

Dabei bezeichnet $\xi^k_t \in \mathbb{R}$ die Anteile, die der Investor z.Zt. t hält (nach einer möglichen Umschichtung). Für das Sparbuch bezeichnet η_t den *Gegenwartswert* (mit 0 als Gegenwart), d.h. den auf den Zeitpunkt t=0 diskontierten Euro–Betrag (der tatsächliche Wert ist dann $\eta_t B_t$); dadurch erreicht man für das Sparbuch eine parallele Beschreibung zu den risikobehafteten Anlagen 1,....,d. Die Adaptiertheit bedeutet, daß die Wahl von ξ_t und η_t nur auf der Basis der vorliegenden Information erfolgen kann. Der Investor kann also nach Beobachtung des Marktes bis zur Zeit t über die Umschichtung seines

Portfolios entscheiden. Einerseits kann er also alle verfügbaren Informationen ausnutzen, andererseits ist er kein Hellseher und kann keine zukünftigen Entwicklungen für seine Entscheidung benutzen. Gibt man den *Startwert /–kapital* oder die *Anfangsinvestition* x vor, so sollen die folgenden *Budgetgleichungen* gelten:

(5.6) $\quad \eta_0 + \xi_0^\top \cdot S_0 = x, \quad \eta_t B_t + \xi_t^\top \cdot S_t = \eta_{t-1} B_t + \xi_{t-1}^\top \cdot S_t, \ 1 \le t < T.$

In (5.6) beschreibt $\eta_{t-1}B_t + \xi_{t-1}^\top S_{t-1}$ den Wert des Portfolios vor einer Umschichtung und $\eta_t B_t + \xi_t^\top S_t$ den Wert nach der Umschichtung. Offenbar ist η dann durch x und ξ bestimmt.

5.7 Definition. Gilt (5.6), so heißen (η,ξ) oder ξ **selbstfinanzierender Plan** oder **kurz Plan**. $\{V_t^\xi(x)\ , 0 \le t \le T\}$ ist der Wertprozeß zum Plan ξ bei einem Startwert x mit

(5.8) $\quad V_t^\xi(x) := \eta_{t-1}B_t + \xi_{t-1}^\top \cdot S_t\ , \ 1 \le t \le T^*, \ V_0^\xi(x) = x$, also:

$\quad V_t^\xi(x) := \eta_t B_t + \xi_t^\top \cdot S_t, \ 0 \le t < T.$

wobei η_t jeweils durch (5.6) festgelegt wird.

Wir werden uns auf selbstfinanzierende Pläne beschränken. Für einen vektorwertigen Prozeß $\{Z_t\}$ schreiben wir $\Delta Z_t := Z_t - Z_{t-1}$.

5.9 Lemma. $\Delta V_t^\xi(x) = \eta_{t-1} \cdot \Delta B_t + \xi_{t-1}^\top \cdot \Delta S_t$.

Beweis. $\eta_{t-1} \cdot \Delta B_t + \xi_{t-1}^\top \cdot \Delta S_t = (\eta_{t-1} \cdot B_t + \xi_{t-1}^\top \cdot S_t) - (\eta_{t-1} \cdot B_{t-1} + \xi_{t-1}^\top \cdot S_{t-1}) = \Delta V_t^\xi(x)$. □

5.10 Definition Es heißen $\breve{S}_t = (S_t^1/B_t, \ldots, S_t^d/B_t)$ der **diskontierte Preisprozeß** und $\breve{V}_t^\xi(x) := V_t^\xi(x)/B_t$ der **diskontierte Wertprozeß**, $t \ge 0$. Im Fall d=1 können wir S_t und S_t^1 wowie ξ_t und ξ_t^1 identifizieren.

Es wird hier also eine Diskontierung durch den Preisprozeß des Sparbuchs vorgenommen; d.h. das Sparbuch wird als sogenannter *Numeraire* benutzt. Dies ist die gewohnte Diskontierung. Wegen $B_0 = 1$ gilt: $\breve{V}_0^\xi(x) = x$, $\breve{S}_0 = S_0$.

5.11 Reduktionslemma. Für x,ξ, $0 < t \le T$ gilt:

$$\Delta\breve{V}_t^\xi(x) = \xi_{t-1}^\top \cdot \Delta\breve{S}_t, \ \text{d.h.}, \ \breve{V}_t^\xi(x) = x + \sum_{m=1}^t \xi_{m-1}^\top \cdot \Delta\breve{S}_m.$$

Beweis. Mit $\breve{V}_t := \breve{V}_t^{\xi}(x)$ gilt:

$\breve{V}_t = [\eta_{t-1} \cdot B_t + \xi_{t-1}^{\top} \cdot S_t]/B_t = \eta_{t-1} + \xi_{t-1}^{\top} \cdot \breve{S}_t$ und

$\breve{V}_{t-1} = [\eta_{t-1} \cdot B_{t-1} + \xi_{t-1}^{\top} \cdot S_{t-1}]/B_{t-1} = \eta_{t-1} + \xi_{t-1}^{\top} \cdot \breve{S}_{t-1}$,

also: $\breve{V}_t - \breve{V}_{t-1} = \xi_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\breve{S}_t$. □

Offenbar hat $\Delta\breve{V}_t^{\xi}(x)$ die gleiche Gestalt wie $\Delta V_t^{\xi}(x)$ in 5.9 mit $\Delta\breve{S}$ anstelle von ΔS und $\Delta\breve{B} \equiv 0$ anstelle von ΔB. Ist man also an dem diskontierten Wertprozeß interessiert, so kann man auch mit $\breve{S}_t$ und $\breve{B}_t \equiv 1$ arbeiten. Aufgrund dieses Reduktionslemmas wird in vielen Arbeiten von vornherein angenommen, daß die Zinssätze/raten gleich 0 sind, also das (eventuell negative) Guthaben auf dem Sparbuch nicht verzinst wird.

Der Ausdruck $\sum_{m=1}^{t} \xi_{m-1}^{\top} \cdot \Delta\breve{S}_m$ kann als ein zeitdiskretes stochastisches Integral $\int_0^t \xi \, d\breve{S}$ angesehen werden.

5.12 Beispiel. Nullkuponanlagen

Eine *Nullkuponanleihe mit Fälligkeitsdatum* T *(*T*-Bond)* ist ein Titel/Vertrag, der das Recht auf 1 Euro z.Zt. T gibt. Der Preis dafür z.Zt. t sei p(t,T). Die *Zinsstruktur (term structure)* z.Zt. 0 ist gegeben durch die *initiale Zinskurve* $T \mapsto p(0,T)$. Dabei können die p(0,T) als Diskontierungsfaktoren aufgefaßt werden. Kauft man z.Zt. t etwa x T–Bonds, $t<T\le T^*$, zu einem Preis $x \cdot p(t,T)$ bei einem Kurs p(t,T), so erhält man z.Zt. T gerade x Euro; dabei ist

(5.12a) $\qquad p(t,t) = 1,\ p(t,t+1) = e^{-r_t} = \dfrac{1}{1 + i_t}.$

Der Einfachheit nehmen wir an, daß Anlagen mit einem Fälligkeitstermin $T<T^*$ nach T mit der kurzfristigen Zinsrate weiterverzinst werden.

Wir fassen einen T–Bond als Wertpapier auf mit Index T und setzen

(5.12b) $\qquad S_t^T := p(t,T)\ ,\ 0\le t\le T,\ \left[S_t^T := \exp\{\sum_{m=T}^{t-1} r_m\}\ ,\ T\le t\le T^*,\right]$

(5.12c) $\qquad S_t := (S_t^1,\dots,S_t^{T^*}).$

Kauft man also z.Zt. t etwa x T–Bonds, so zahlt man $x \cdot S_t^T$ und hat z.Zt. n>t dann ein Wert von $x \cdot S_n^T$ Euro. Anders als bei Aktien / Devisen muß man also bei der Modellierung des Preisprozesses p(t,T) durch einen stochastischen Prozeß einen "Brückenprozeß" konstruieren, bei dem der Anfangswert p(0,T) und der Endwert p(T,T) = 1 vorgegeben sind. Die Endbedingung p(T,T) = 1 schafft auch eine Kopplung zwischen den Preisprozessen $\{p(t,T)\}$, $1 \le T \le T^*$. Darauf soll später eingegangen werden. □

Ein zentrales Problem wird die *Bewertung von Derivaten* sein. Dies sind Verträge, die einen *Zahlungsstrom* $\{X_t,\ 1 \le t \le T^*\}$ zusichern, der sich aus der Kursentwicklung $\{r_t, S_t\}$ herleiten läßt in der Weise, daß etwa $X_t = \psi_t(S_0, r_1, S_1, \ldots, r_t, S_t)$ gilt. Dabei sei ΔX_t die Zahlung in t und X_t die Gesamtzahlung in 1,...,t. Allgemeiner und einfacher soll der Zahlungsstrom durch einen adaptierten reellwertigen Prozeß $\{X_t,\ 1 \le t \le T^*\}$ beschrieben werden.

Für diesen Vertrag muß z. Zt. 0 eine *Prämie* (ein *Preis*) bezahlt werden, die gerade die Bewertung des Finanztitels darstellt. In der Regel setzt sich diese Prämie additiv aus Prämien für die einzelnen Zahlungen X_t zusammen. Deshalb genügt es für einen großen Teil der Theorie, sich auf eine einzige Zahlung zu beschränken, also auf den Fall:

$$X_t = 0 \ \text{ für } t < T,\ X_T =: X.$$

5.13 Definition. Ein ***Zahlungsanspruch*** *(contingent claim)* in T ist eine $\mathfrak{F}_T$–meßbare Zva X.

Bei Optionen z.B. wird dieser Zahlungsanspruch X in jedem Fall nichtnegativ sein, sodaß der Vertragsunterzeichner (Käufer) also ohne die Prämie in jedem Fall einen Gewinn erzielen würde.
Im *klassischen Fall* würde $E[X/B_T]$ als faire Prämie angesehen werden – unabhängig von der hier vorliegenden Situation eines Finanzmarktes.
Hier wird aber eine andere Antwort gegeben werden. Dazu betrachten wir die folgende Situation:
Es sei d=1. Wenn der Verkäufer z.Zt. 0 durch einen Vertrag eine Zahlung $X = a \cdot S_T$ in T zusichert, so ist $a \cdot S_0$ eine **faire Prämie**; denn offenbar kann der Verkäufer die Prämie von $a \cdot S_0$ sofort in das Wertpapier investieren und hat dann z. Zt. T den auszuzahlenden Betrag $X = a \cdot S_T$ zur Verfügung. Das gleiche könnte der Käufer tun. In dem Sinn sind also die Prämie und der Vertrag gleichwertig. Ein höherer bzw. niedrigerer Preis würde also einen sicheren Gewinn für Verkäufer bzw. Käufer bedeuten.
Wir können auch 1.11 heranziehen. Mit $x = a \cdot S_0 = a \cdot \breve{S}_0$, $\xi_t \equiv a$ gilt gerade:

$$\breve{V}^{\xi}_{T}(x) = a \cdot S_0 + \Sigma_{m=1}^{T}\, a \cdot \Delta\breve{S}_m = a \cdot \breve{S}_T = X/B_T, \quad \text{also} \quad V^{\xi}_{T}(x) = X.$$

Dies gilt noch in allgemeineren Situationen.

5.14 Definition. Ein Zahlungsanspruch X in T heißt ***erreichbar*** *(attainable)* oder duplizierbar [durch x, ξ], wenn gilt: $V^{\xi}_{T}(x) = X$ f.s. [$\Leftrightarrow$ $\breve{V}^{\xi}_{T}(x) = \breve{X} := X/B_T$ f.s.]

5.15 Definition. In der Situation $V^{\xi}_{T}(x) = X$ (f.s.) ist x eine **faire Prämie** für den Zahlungsanspruch X in T.

In der Situation von 5.15 kann sich der Verkäufer nämlich gegen den Zahlungsanspruch X *absichern (hedging)*, indem sie die Prämie x benutzt, um gemäß ξ zu investieren. Dann hat er z. Zt T den Betrag $V^{\xi}_{T}(x) = X$ zur Verfügung. Das gleiche kann jeder andere Marktteilnehmer tun.

Im nächsten Paragraphen wird in einem speziellen Modell gezeigt, daß jeder Zahlungsanspruch erreichbar ist und somit vollständig abgesichert werden kann.

5.16 Beispiel. Bewertung von Optionen. Es sei d=1. Eine *europäische (Kauf-) Option* $[$*call option*$]$ ist ein Vertrag, der dem Käufer das Recht einräumt, zum *Fälligkeitstermin* T *(maturity time, exercise time)* für einen festen *Wahrnehmungs- / Basispreis* K *(exercise/striking price)*, unabhängig von dem vorliegenden Kurs S_T, a Anteile des Wertpapiers zu kaufen, z.B. $K = a \cdot S_0$. Dann ist der Gewinn des Käufers und damit der Verlust des Verkäufers

$$X := [a \cdot S_T - K]^+.$$

Es ist also günstig für den Käufer, wenn der Kurs steigt; es ist günstig für die Bank, wenn der Kurs fällt. Um den Verlust bei steigendem Kurs abzusichern (hedging), kann die Bank selbst Wertpapiere kaufen . Dadurch kann es auch günstig für den Verkäufer werden, wenn der Kurs steigt. $[]$

Eine naheliegende Forderung an den Markt ist der Ausschluß von sogenannten Arbitragemöglichkeiten; nur so kann eine Stabilität des Marktes vorliegen.

5.17 Definition. Eine ***Arbitragemöglichkeit*** ist gegeben, falls ein ξ und ein T existieren mit:

$$P[V_T^\xi(0) \geq 0] = 1, \quad P[V_T^\xi(0) > 0] > 0 \quad \left(P[\breve{V}_T^\xi(0) \geq 0] = 1, \quad P[\breve{V}_T^\xi(0) > 0] > 0\right).$$

Liegt keine Arbitragemöglichieit vor, so heißt der Markt ***arbitragefrei***.

Bei Arbitragefreihiet hat kein Marktteilnehmer die Möglichkeit, Gewinne zu realisieren, ohne ein Risiko einzugehen. Wenn für ξ die Chance besteht, daß $V_T^\xi(0) > 0$ ist $(P[V_T^\xi(0) > 0] > 0)$, so muß auch die Chance bestehen, daß $V_T^\xi(0) < 0$ ist $(P[V_T^\xi(0) < 0] > 0)$. Andernfalls würde jeder Marktteilnehmer eine solche Arbitragemöglichkeit ergreifen, und der Markt könnte nicht mehr im Gleichgewicht bleiben.

5.18 Beispiel. Eine Arbitragemöglichkeit liegt vor, wenn die Rendite einer Anlage in einem Zeitpunkt stets über der des Sparbuchs liegt. Dazu betrachten wir den Fall d=1, T=1.

$$P[S_1 \geq e^{r_0} \cdot S_0] = P[\breve{S}_1 \geq S_0] = 1 \qquad [\text{bzw "}\leq\text{"}]$$

$$P[S_1 > e^{r_0} \cdot S_0] = P[\breve{S}_1 > S_0] > 0 \qquad [\text{bzw. "}<\text{"}].$$

Einen Plan kann man nun so wählen, daß man z.Zt. 0 einen Anteil des Wertpapiers kauft und dafür Geld (Euro) leiht. Setze also $\xi_0 := 1$, $\eta_0 := -S_0$, also $x = \eta_0 + \xi_0 \cdot S_0 = 0$. Dann gilt mit 5.11:

$\breve{V}_1^\xi(0) = \xi_0 \cdot \Delta\breve{S}_1$, also $P[\breve{V}_1^\xi(0) \geq 0] = 1$ und $P[\breve{V}_1^\xi(0) > 0] > 0$.

Nach 5.17 liegt also eine Arbitragemöglichkeit vor. $[]$

5.19 Gesetz des einen Preises. Der Markt sei arbitragefrei.
(a) Dann ist die faire Prämie für erreichbare Zahlungsansprüche eindeutig bestimmt, d.h. unabhängig von der Wahl des (duplizierenden) Plans.
(b) Gilt $X = V_T^{\xi}(x) = V_T^{\tilde{\xi}}(\tilde{x})$, so folgt auch $V_t^{\xi}(x) = V_t^{\tilde{\xi}}(\tilde{x})$ f.s. $\forall\ 0 \le t \le T$. Dann heißt $V_t^{\xi}(x)$ auch **faire Prämie in t** für den Zahlungsanspruch X in T.

Beweis: Es genügt offenbar (b) zu zeigen. Sei $X/B_T = V_T^{\xi}(x)/B_T = \breve{V}_T^{\xi}(x) = \breve{V}_T^{\tilde{\xi}}(\tilde{x})$ und

$\Gamma := \{\breve{V}_t^{\tilde{\xi}}(\tilde{x}) > \breve{V}_t^{\xi}(x)\}$. Es genügt z.z.: $P[\Gamma] = 0$. Es folgt mit 5.11:

$0 = \breve{V}_t^{\xi}(x) - \breve{V}_t^{\tilde{\xi}}(\tilde{x}) + \sum_{m=t+1}^{T} \xi_{m-1}^{\top} \cdot \Delta\breve{S}_m - \sum_{m=t+1}^{T} \tilde{\xi}_{m-1}^{\top} \cdot \Delta\breve{S}_m$, also:

$\sum_{m=t+1}^{T} (\mathbf{1}_{\Gamma} \cdot (\xi_{m-1} - \tilde{\xi}_{m-1}))^{\top} \cdot \Delta\breve{S}_m = (\breve{V}_t^{\tilde{\xi}}(\tilde{x}) - \breve{V}_t^{\xi}(x)) \cdot \mathbf{1}_{\Gamma} \ge 0$ und "> 0" auf Γ.
Wäre also $P[\Gamma] > 0$, so würde ξ^* mit $\xi_m^* = 0$ für $m < t$, $\xi_m^* = \mathbf{1}_{\Gamma} \cdot (\xi_m - \tilde{\xi}_m)$ für $m \ge t$ eine Arbitragemöglichkeit bieten. []

Im nächsten Paragraphen betrachten wir die folgende Situation:

5.20 Definition. Ein Markt heißt **vollständig**, wenn jeder Zahlungsanspruch erreichbar ist.

In einem arbitragefreien und vollständigen Markt existiert also nach 5.15 und 5.19 zu jedem Derivat mit einem beliebigen Zahlungsanspruch ein eindeutiger fairer Preis.

§6 Das Binomialmodell (von Cox, Ross & Rubinstein 1979)**.**
Es sei hier r_t = r konstant sowie d = 1, $S_t := S_t^1$. Zunächst soll eine Beschränkung auf die diskontierten Größen vorgenommen werden. Dann beschreibt $\breve{S}$ die diskontierte Preisentwicklung des Wertpapiers.
Als erste Verallgemeinerung des deterministischen Falles sieht die **Modellannahme** vor, daß die Renditen durch Zahlen $0 < d < 1 < u < \infty$ beschrieben wird, so daß gilt:

$$\breve{S}_t \in \{d \cdot \breve{S}_{t-1}, u \cdot \breve{S}_{t-1}\}, \text{ [d wie "down", u wie "up"]}.$$

Es soll also ein Modell betrachtet werden, in dem sich der (diskontierte) Kurs nur um einen Faktor d nach unten oder um einen Faktor u noch oben bewegen kann. In den Fällen "$1 \le d < u$" und "$d < u \le 1$" ergäben sich Arbitragemöglichkeiten gemäß 5.18.

***D*as 1–Perioden–Modell:**

Es sei T*=1, $\Omega = \{d,u\}$, $S_0>0$ gegeben, $\breve{S}_1(\omega) = \omega \cdot S_0$, $\omega \in \Omega$. Es wird kein W–Maß vorausgesetzt. $\breve{X}$ sei der diskontierte Zahlungsanspruch zu einem Derivat; setze zur Abkürzung:

$$x_\omega := \breve{X}(\omega) \text{ für } \omega \in \{d,u\}.$$

Es soll gezeigt werden, daß im vorliegenden Fall X stets erreichbar ist.

6.1 Lemma. Das Gleichungssystem $x + \xi \cdot [\omega \cdot S_0 - S_0] = x_\omega$, $\omega \in \{d,u\}$, in x, ξ hat eine eindeutige Lösung; dabei ist*:*

$$x = p_d x_d + p_u x_u , \quad \xi \cdot S_0 = (x_u - x_d)/(u-d) \text{ , d.h.}$$

$$\xi = \delta := \delta\breve{X}/\delta\breve{S}_1 \text{ mit } \delta\breve{X} := \breve{X}(u) - \breve{X}(d), \ \delta\breve{S}_1 := \breve{S}_1(u) - \breve{S}_1(d),$$

$$p_d := \frac{u-1}{u-d}, \ p_u := \frac{1-d}{u-d}, \text{ und } 0 < p_\omega < 1, \ p_d + p_u = 1.$$

Dabei heißt $\xi = \delta$ auch *Hedge-Ratio* und wird bei Optionen als *Delta* bezeichnet. Dieser Wert ist offenbar unabhängig von der Diskontierung wegen $\delta X := X(u) - X(d) = e^{r_0} \cdot \delta\breve{X}$ und $\delta S_1 := S_1(u) - S_1(d) = e^{r_0} \cdot \delta\breve{S}_1$.
Würde $\breve{S}_1$ mehr als zwei Werte annehmen, so hätte man für die beiden Unbekannten x und ξ mehr als zwei Bestimmungsgleichungen. Der **Beweis** von 2.1 ist einfach.
X ist also erreichbar durch x, ξ.

6.2 Bemerkung. Wählt man ein künstliches W–Maß P* auf Ω mit daß $P^*[\{\omega\}] = p_\omega$, so gilt:

$$x = E^*[\breve{X}], \quad E^*[\breve{S}_1] = S_0 \quad \text{wegen}$$

(6.3) $$p_d \cdot d + p_u \cdot u = 1.$$

P* ist das einzige Maß mit $E^*[\breve{S}_1] = S_0$.

In dem Fall $x_d = 0 < x_u$, etwa bei $\breve{X} = [\breve{S}_1 - \breve{K}]^+$ mit $d \cdot S_0 \leq \breve{K} \leq u \cdot S_0$, gilt: $\xi \cdot S_0 > x$; zur Absicherung von X muß also zusätzlich Geld geliehen werden, um in das kursabhängige Wertpapier gemäß ξ zu investieren. $\square$

Das T–Perioden–Modell.

Modell: Es sei $T = T^* \geq 1$, $\Omega = \{d,u\}^T$, $I_t(\omega) = I_t(\omega_1,...,\omega_T) = \omega_t$ die Projektion. Es wird kein W–Maß vorausgesetzt. Sei $S_0 > 0$ gegeben, $\breve{S}_t := I_t \cdot ... \cdot I_1 \cdot S_0 = I_t \cdot \breve{S}_{t-1}$.

$$
\breve{S}_{t-1} \begin{array}{l} \nearrow \; u \cdot \breve{S}_{t-1} = \breve{S}_t \\ \searrow \; d \cdot \breve{S}_{t-1} = \breve{S}_t \end{array}
$$

Hängen Zva X_t nur über $\omega_{(t)} := (\omega_1,...,\omega_t)$ von ω ab – wie etwa $\breve{S}_t$ –, so schreiben wir auch $X_t(\omega_t)$ statt $X_t(\omega)$. Wählt man eine Filterung mit $\mathfrak{F}_t := \sigma(I_1,...,I_t)$, so ist eine (reelle) Zva X_t oder ein Zufallsvektor genau dann $\mathfrak{F}_t$–meßbar, wenn $X_t(\omega) = X_t(\omega_t)$ gilt.

Es soll wieder gezeigt werden, daß jeder Zahlungsanspruch X erreichbar ist.

6.4 Lemma. Zu $\breve{X} : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ existieren x, ξ, sodaß gilt*:*

$$\breve{V}_T^\xi(x) = x + \sum_{t=1}^T \xi_{t-1} \cdot \Delta\breve{S}_t = \breve{X} \quad \text{auf } \Omega .$$

Dabei ist

$$x = \sum_{\omega=(\omega_1,...,\omega_T)\in\Omega} p_{\omega_1} \cdot p_{\omega_2} \cdot ... \cdot p_{\omega_T} \cdot \breve{X}(\omega) \quad \text{mit } p_\omega \text{ wie in 6.1.}$$

Bew. von 6.4. Wir konstruieren rekursiv (rückwärts) Werte $\breve{V}_t(\omega_{(t)})$ und Investitionen $\xi_t(\omega_{(t)})$. Dabei soll $\breve{V}_t$ angeben, wieviel Kapital in t (im diskontierten Modell) zur Absicherung benötigt wird. Wir beginnen mit $\breve{V}_T(\omega) := \breve{X}(\omega)$.

Zu $\omega_{(t)}$, $t<T$, wähle rekursiv $x = \breve{V}_t(\omega_{(t)})$ und $\xi = \xi_t(\omega_{(t)})$ gemäß 6.1 mit $\breve{S}_t(\omega_{(t)})$ und $\breve{V}_{t+1}(\omega_{(t)},u)$, $\breve{V}_{t+1}(\omega_{(t)},d)$ statt S_0 bzw. x_u, x_d als Lösung von

$$x + \xi \cdot [\omega_{t+1} \cdot \breve{S}_t(\omega_{(t)}) - \breve{S}_t(\omega_{(t)})] = \left[x + \xi \cdot \Delta\breve{S}_{t+1}(\omega_{(t)},\omega_{t+1}) = \right] \breve{V}_{t+1}(\omega_{(t)},\omega_{t+1}) \quad \text{für } \omega_{t+1} \in \{d,u\}.$$

Dann erhält man

$$\breve{V}_t(\omega_{(t)}) + \xi_t(\omega_{(t)}) \cdot \Delta\breve{S}_{t+1}(\omega_{(t+1)}) = \breve{V}_{t+1}(\omega_{(t+1)}) \quad , \omega_{(t+1)} \in \{(\omega_{(t)},d),(\omega_{(t)},u)\}.$$

Daraus ergibt sich mit $x := \breve{V}_0$:

$$\breve{V}_t + \sum_{m=t+1}^T \xi_{m-1} \cdot \Delta\breve{S}_m = \breve{X}, \text{ insbesondere für } t = 0,$$

$$\breve{V}_T^\xi(x) = x + \sum_1^T \xi_{m-1} \cdot \Delta\breve{S}_m = \breve{X}.$$

Man bezeichnet $\breve{V}_t$ als den diskontierten *Wert des Zahlungsanspruchs in t*, denn man kann mit $\breve{V}_t$ und ξ offenbar $\breve{X}$ in den verbleibenden Perioden duplizieren. Mit Induktion erhält man dabei:

$$\breve{V}_t(\omega_{(t)}) = \Sigma_{(\omega_{t+1},...,\omega_T)}\, p_{\omega_{t+1}} \cdot p_{\omega_{t+2}} \cdot ... \cdot p_{\omega_T} \cdot \breve{X}(\omega_{(t)},\omega_{t+1},...,\omega_T)\,,$$

(6.5) $\quad \xi_t = \delta\breve{V}_{t+1}/\delta\breve{S}_{t+1}$ mit

$$\delta\breve{V}_{t+1}(\omega_{(t)}) := \breve{V}_{t+1}(\omega_{(t)},u) - \breve{V}_{t+1}(\omega_{(t)},d),\;\; \delta\breve{S}_{t+1}(\omega_{(t)}) := \breve{S}_{t+1}(\omega_{(t)},u) - \breve{S}_{t+1}(\omega_{(t)},d).$$

[]

6.6 Darstellung von x:

P* sei ein künstliches W–Maß auf $(\Omega,\mathfrak{P}(\Omega))$ mit $P^*[\{(\omega_1,...,\omega_T)\}] = p_{\omega_1} \cdot p_{\omega_2} \cdot ... \cdot p_{\omega_T}$, also

$P^*[I_1 = \omega_1,...,I_T = \omega_T] = P^*[I_1 = \omega_1] \cdot ... \cdot P^*[I_T = \omega_T]$ mit $P^*[I_t = \omega_t] = p_{\omega_t}$.

In Hinblick auf die Binomialverteilung ist es günstiger, die I_t auch durch $\{0,1\}$–wertige Zva J_t zu beschreiben gemäß $J_t = \mathbf{1}_{\{u\}}(I_t)$.

Mit den (I_t) sind auch die J_t, $1 \le t \le T$, unter P* unabhängig und identisch verteilt, und man hat:

(6.6a) $\quad J_t \sim b(1,p_u)$ (unter P*)

(6.6b) $\quad \breve{S}_t = I_t \cdot \breve{S}_{t-1} = d \cdot (\frac{u}{d})^{J_t} \cdot \breve{S}_{t-1}$ und $\ln I_t = \ln d + \ln(u/d) \cdot J_t$.

Von der Beschreibung durch die Binomialverteilung werden wir noch Gebrauch machen. Unter P* beschreibt der Prozeß eine sogenannte *geometrische Irrfahrt* (ein zeitdiskretes Analogon zur geometrischen Brownschen Bewegung). Dieser Name resultiert aus der Darstellung

$$\breve{S}_t = S_0 \cdot \exp\{\, \Sigma_{m=1}^{t} \ln(I_m)\, \}\,;$$

dabei bildet der Exponent als Summe von unabhängigen und identisch verteilten Zva ein Irrfahrt.

Unter P* gilt:

(i) $\quad x = E^*[\breve{X}]$,

(ii) $\quad E^*[\breve{S}_{t+1} \mid I_1 = \omega_1,...,I_t = \omega_t] = \breve{S}_t(\omega_{(t)}),\;\; 0 \le t < T,$

(iii) $\quad \breve{V}_t(\omega_t) = E^*[\breve{X} \mid I_1 = \omega_1,...,I_t = \omega_t]$.

Dabei ist $E^*[Z \mid A] := \Sigma_{\omega\in\Omega}\, Z(\omega)\, P^*[\{\omega\} \mid A] = \Sigma_{\omega\in A}\, Z(\omega)\, P^*(\omega) / P^*[A]$.

Die Eigenschaft (ii) besagt gerade, daß $\{\breve{S}_t,\ 0 \le t \le T\}$ ein ***Martingal*** ist. P* heißt deswegen auch ***Martingalmaß***. Der Beweis folgt leicht aus (6.3); es ist sogar das einzige Martingalmaß. Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß es nur eine Lösung (p_d,p_u) gibt mit $p_d+p_u=1$ und (6.3).

Wegen der Unabhängigkeit von $(I_1,...,I_t)$ und $(I_{t+1},...,I_T)$ gilt ferner

$E^*[\breve{X} \mid I_1=\omega_1,...,I_t=\omega_t] = E^*[\breve{X}(\omega_{(t)},I_{t+1},...,I_T)]$. []

Oft wird auch die Modellannahme mit einem W–Maß P formuliert, das wie P* aussieht mit einem anderen Parameter p anstelle von p*. Dann bedeutet der Wechsel von P gerade einen Wechsel vom Parameter p zu p*. Offenbar wird dieses W–Maß P aber nicht benötigt.

Nun betrachten wir eine **beliebige deterministische Zinsrate** r_o. Es gelte dabei

$$r_t = r_o \text{ , also } B_t = e^{r_o t}.$$

Wir erhalten $S_t = \left[= B_t \cdot \breve{S}_t = e^{rt} \cdot \breve{S}_t\right] = e^{r_o} \cdot I_t \cdot S_{t-1}$, also gilt:

$$S_t \in \{d \cdot e^{r_o t} \cdot S_{t-1},\ u \cdot e^{r_o t} \cdot S_{t-1}\}\ , \quad \text{mit } d \cdot e^{r_o t} < e^{r_o t} < u \cdot e^{r_o t}\ .$$

$$S_{t-1}(\omega_{(t-1)}) \begin{array}{l} \nearrow\ u \cdot e^{r_o} \cdot S_{t-1}(\omega_{(t-1)}) = S_t(\omega_{(t-1)},u) \\ \\ \searrow\ d \cdot e^{r_o} \cdot S_{t-1}(\omega_{(t-1)}) = S_t(\omega_{(t-1)},d) \end{array}$$

Gemäß 6.4 ist jeder Zahlungsanspruch erreichbar mit einer Anfangsinvestition $x = E^*[X/B_T] = E^*[\breve{X}]$.

Hängt X in komplizierter Weise von ω ab wie bei sogenannten exotischen Optionen, so muß x über diesen Erwartungswert berechnet werden, der eine Summe mit 2^T Summanden darstellt. Bei exotischen Optionen hat man oft eine Darstellung der Form $X = f(\max_{1\leq t\leq T} S_t)$, $X = f(\min_{1\leq t\leq T} S_t)$ oder $X = f(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} S_t)$.

Im Falle einer **europäischen Kaufoption**, also für $X = (S_T-K)^+$ erhält man eine **geschlossene Lösung**.

Aus 6.4 und 6.6 ergibt sich dabei

$$\breve{X} = (\breve{S}_T - \breve{K})^+ := (S_T-K)^+/B_T = \breve{V}_T^{\xi}(x) \quad \text{mit } \breve{K} := K/B_T = e^{-r_0 T} \cdot K$$

für ein ξ und $x = E^*[(\breve{S}_T - \breve{K})^+]$.

Also ist $X = (S_T-K)^+$ gemäß 5.14 erreichbar und somit x eine faire Prämie. Es folgt:

$$x = E^*[(\breve{S}_T-\breve{K})^+] = E^*[(\breve{S}_T-\breve{K}) \cdot \mathbf{1}_\Gamma] \qquad \text{mit}$$

$$\Gamma := \{\breve{S}_T > \breve{K}\} = \{I_1 \cdot I_2 \cdot \ldots \cdot I_T \cdot S_0 > \breve{K}\} = \{\textstyle\sum_{t=1}^{T} \ln(I_t) > \ln(\breve{K}/S_0)\}.$$

Wegen $\ln(I_t) = \ln(u/d) \cdot J_t + \ln(d)$ gilt

(6.7) $$\Gamma = \{\ \ln(u/d) \cdot \textstyle\sum_{t=1}^{T} J_t + T \cdot \ln(d) > \ln(\breve{K}/S_0)\ \}$$
$$= \{\ \textstyle\sum_{t=1}^{T} [\ln(u) \cdot J_t + \ln(d) \cdot (1-J_t)] > \ln(\breve{K}/S_0)\ \} = \{\textstyle\sum_{t=1}^{T} J_t > a\}$$

mit

(6.8) $$a = a_0(S_0) := [\ln(K/S_0) - T \cdot (r + \ln d)]/\ln(u/d)\ .$$

Dabei ist gemäß (6.6a) die Zva $\sum_{t=1}^{T} J_t$ unter P* $b(T,p_u)$–verteilt.

Sei $p'_{\omega_t} := p_{\omega_t} \cdot \omega_t$ und P' ein weiteres W–Maß auf Ω mit $P'[\{(\omega_1,\ldots,\omega_T)\}] = p'_{\omega_1} \cdot p'_{\omega_2} \cdot \ldots \cdot p'_{\omega_T}$.

Dabei ist P' wegen (6.3) ein W–Maß. Unter P' ist dann $\sum_{t=1}^{T} J_t$ entsprechend b(T,p')–verteilt, und es ergibt sich für x die Darstellung:

$$x = \Sigma_{\omega=(\omega_1,\dots,\omega_T)\in\Gamma}\ p_{\omega_1}\cdot p_{\omega_2}\cdot\ldots\cdot p_{\omega_T}\lceil\omega_1\cdot\omega_2\cdot\ldots\cdot\omega_T\cdot S_0 - \breve{K}\rceil$$

$$= S_0\cdot\Sigma_{\omega\in\Gamma}\ p'_{\omega_1}\cdot p'_{\omega_2}\cdot\ldots\cdot p'_{\omega_T} - \breve{K}\cdot\Sigma_{\omega\in\Gamma}\ p_{\omega_1}\cdot p_{\omega_2}\cdot\ldots\cdot p_{\omega_T}\ \text{, also}$$

(6.9) $$x = x(S_0,u,d,K,r_o) = S_0\cdot P'\lceil\Gamma\rceil - \breve{K}\cdot P^*\lceil\Gamma\rceil$$

$$= S_0\cdot\bar{\Phi}_{T,p'_u}(a) - K\cdot e^{-r_oT}\cdot\bar{\Phi}_{T,p_u}(a)$$

mit

(6.10) $$p_d = \frac{u-1}{u-d}\quad p_u = \frac{1-d}{u-d}\quad p'_\omega := p_\omega\cdot\omega\,.$$

$$\bar{\Phi}_{T,p}(a) := \Sigma_{a<t\le T}\binom{T}{t}p^t\cdot(1-p)^{T-t} = \bar{\Phi}_{T,p}(\lceil a\rceil).$$

Dabei ist (6.9) die ***Bewertungsformel für Optionen im Binomialmodell***; $\Phi_{T,p} := 1-\bar{\Phi}_{T,p}$ ist dabei gerade die Verteilungsfunktion zur Binomialverteilung b(T,p).

6.11 Bemerkung. Sei $\breve{V}_t$ der diskontierte Wert der Option wie im Beweis von 6.4, also $x = \breve{V}_0$. Dann erhält man wie oben:

$$\breve{V}_t = v_t(\breve{S}_t) = \breve{S}_t\cdot\bar{\Phi}_{T-t,p'_u}(a_t(\breve{S}_t)) - K\cdot e^{-r_o(T-t)}\cdot\bar{\Phi}_{T-t,p_u}(a_t(\breve{S}_t))$$

mit $a_0(s)$ wie oben und allgemein

$$a_t(s) := \lceil \ln(K/s)-(T-t)\cdot(r+\ln d))/\ln(u/d)\,.$$

Ferner ergibt sich für die Zahl ξ_t, die die Anzahl an Wertpapieranteilen zur Absicherung angibt und Hedge–Ratio oder Delta genannt wird, gemäß (6.5):

$$\xi_t = \delta_t := \delta\breve{V}_{t+1}/\delta\breve{S}_{t+1} = \delta V_{t+1}/\delta S_{t+1} = \frac{v_{t+1}(u\cdot\breve{S}_t) - v_{t+1}(d\cdot\breve{S}_t)}{u\cdot\breve{S}_t - d\cdot\breve{S}_t} \cong \frac{\partial}{\partial x}v_t(x) =: \Delta(x,t).$$

Offenbar ist δ_t ein Differenzenquotient; im zeitstetigen Fall hat man dann die partielle Ableitung und $\Delta(x,t)$ heißt Δ–hedge. $\lceil\rceil$

6.12 Bemerkung. Die Darstellung (6.9) und die Darstellung $x = \xi_0\cdot S_0 + \eta_0$ legen die Vermutung $\xi_0 = \Phi_{T,p'_u}(a)$? nahe. Dies ist i.a. falsch. Wir wollen dies für T=1 und r_o=0 untersuchen.

Gemäß 6.1 ist: $\xi_0 = (x_u-x_d)/(u-d)S_0$. In dem allein interessanten Fall: $d\cdot S_0<K<u\cdot S_0$ ist x_d=0 und $x_u=uS_0-K$, also $\xi_0 = (u-K/S_0)/(u-d)$.

Andererseits ist wegen $d<K/S_0<u$: $0<a<1$, also $\lceil a\rceil = 0$ und $\Phi_{1,p'_u}(0) = p'_u = (u-d\cdot u)/(u-d)$.

Die Vermutung gilt also im Fall: $K/S_0 = d\cdot u$. Wir wissen aber nur: $d<K/S_0<u$ und $d<d\cdot u<u$. $\lceil\rceil$

Konvergenz gegen ein zeitstetiges Modell.

Nun soll die Periodenlänge, also die Zeitspanne zwischen zwei möglichen Aktionen, immer kürzer gewählt, der Fälligkeitstermin $T\in\mathbb{R}$ aber konstant gehalten werden. [Im Zeitalter der Computermärkte werden die Periodenlängen tatsächlich immer kleiner.] Das Zeitintervall $[0,T]$ wird in n Perioden der Länge T/n unterteilt. Wir erhalten ein zeitdiskretes n–Periodenmodell [und müssen T=n setzen, wenn wir die bisherigen Ergebnisse übernehmen wollen]. Dabei muß die Verzinsung für das Intervall $[0,T]$ und damit $\breve{K}$ konstant bleiben. Wir setzen

$$e^{r_0 n} = e^{rT} \quad \text{, d.h. } r_0 = r\cdot\frac{T}{n}\text{, also } \breve{K} = K\cdot e^{-rT},$$

dann kann $r\geq 0$ als die *Zinsrate für ein zeitstetiges Modell* interpretiert werdend.

Mit kleinerer Periodenlänge müssen auch kleinere Werte für die Sprunghöhen u und d angesetzt werden. Die richtige Wahl wird sich aus dem zentralen Grenzwertsatz ergeben. Sei

$$U := \ln(u),\ \ D := \ln(d),\ Y_n := \Sigma_{m=1}^{n}\left[U\cdot J_m + D\cdot(1-J_m)\right]\ ;$$

Dann ergibt sich aus (6.7) [jetzt mit n statt T] :

$$\Gamma =: \{Y_n > \ln(\breve{K}/S_0)\},\ \ \breve{S}_n = S_0\cdot\exp\{Y_n\}.$$

Gemäß (6.9) haben wir die folgende Darstellung für den fairen Preis x:

$$x = S_0\cdot P'\left[Y_n > \ln(\breve{K}/S_0)\right] - \breve{K}\cdot P^*\left[Y_n > \ln(\breve{K}/S_0)\right].$$

Unter P* und P' sind die J_m unabhängig mit $P^*[J_m = 1] = p_u = 1 - P^*[J_m = 1]$ bzw. $P'[J_m = 1] = p'_u = 1 - P'[J_m = 1]$. Somit ist Y_n Summe von unabhängigen, identisch verteilten Zva unter P* und unter P'.

Wir spezialisieren jetzt noch weiter und wählen hier:

$$U = -D\ \text{, also } d = \frac{1}{u}.$$

Wenn wir jetzt Verteilungskonvergenz von Y_n unter P' und P* gegen eine Normalverteilung nachweisen können, so haben wir auch Konvergenz der Verteilungsfunktionen $P'[Y_n \leq y]$ und $P^*[Y_n \leq y]$ von Y_n für alle $y \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir auch den Grenzwert von x. Diese Verteilungskonvergenz wird hier mit Hilfe des Stetigkeitssatzes von Levy–Cramér jeweils über die Konvergenz der charakteristischen Funktion (CF)

$$\varphi_n^*(s) = E^*\left[\exp\{isY_n\}\right] = E^*\left[\exp\{is(U\cdot J_1 - U\cdot(1-J_1))\}\right]^n$$

gezeigt werden. Es gilt

(6.13*) Unter P^* hat Y_n die CF $\varphi_n^*(s) := (p_u\cdot e^{isU} + p_d\cdot e^{-isU})^n$,

und entsprechend gilt:

(6.13') unter P' hat Y_n die CF $\varphi'_n(s) := (p'_u\cdot e^{isU} + p'_d\cdot e^{-isU})^n$.

Dabei hat man nach (6.10):

$p_u = (1 - e^{-U})/(e^{U} - e^{-U}) =$

$$\frac{U - \frac{1}{2}U^2 + o(U^2))}{2U + o(U^2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}U + o(U),\ \text{wegen}\ \frac{1}{1+o(U)} = 1+o(U)\text{ , also:}$$

$$p_u - p_d = 2p_u - 1 = -\frac{1}{2}U + o(U)\ .$$

Es folgt:

$$\varphi_n^*(s) = \left[p_u \cdot [1 + isU - \tfrac{1}{2}s^2U^2 + o(U^2)] + p_d \cdot [1 - isU - \tfrac{1}{2}s^2U^2 + o(U^2)]\right]^n$$

$$= \left[1 + isU \cdot (p_u - p_d) - \tfrac{1}{2}s^2U^2 + o(U^2)\right]^n = \left[1 - \tfrac{1}{2}isU^2 - \tfrac{1}{2}s^2U^2 + o(U^2)\right]^n .$$

Ein geeigneter Ansatz ist, daß U^2 proportional zur Periodenlänge T/n ist. Wir wählen :

(6.14) $\qquad U^2 = \sigma^2 \cdot \frac{T}{n}$.

Dabei ist σ ein Maß für die Fluktuationen des Kurses. Je kleiner die Periodenlänge ist, desto weniger gravierend ist übrigens die Beschränkung für S_t auf zwei Werte bei geg. S_{t-1}. Dann ergibt sich

$$\varphi_n^*(s) = \left[1 - \tfrac{1}{2}(is + s^2) \cdot \sigma^2 \cdot \frac{T}{n} + o(\tfrac{1}{n})\right]^n \to \exp\{-\tfrac{1}{2}(is + s^2) \cdot \sigma^2 \cdot T\}$$

$$= \exp\{(-\tfrac{1}{2}\sigma^2 \cdot T) \cdot is - \tfrac{1}{2} \cdot (\sigma^2 \cdot T) \cdot s^2\}\ .$$

Dies ist die CF zur Normalverteilung $N(-\frac{1}{2}\sigma^2 \cdot T, \sigma^2 \cdot T)$ mit der Verteilungsfunktion $y \mapsto \Phi((y + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot T)/\sigma\sqrt{T})$, wenn Φ die Verteilungsfunktion zu $N(0,1)$ ist. Nach dem Stetigkeitssatz von Levy–Cramér folgt

Die Verteilung $P^*Y_n^{-1}$ von Y_n unter P^* konvergiert schwach gegen $N(-\frac{1}{2}\sigma^2 \cdot T, \sigma^2 \cdot T)$; dies impliziert die Konvergenz der Verteilungsfunktionen .

[Wegen $U^2 = \sigma^2 \cdot \frac{T}{n}$ hängen die p_i und damit P^* von n ab. Man müßte also eigentlich P_n^* und $P_n^*Y_n^{-1}$ schreiben; deswegen ist auch der zentrale Grenzwertsatz nicht direkt anwendbar.]

Es folgt: $P^*[Y_n > y] \mapsto 1 - \Phi((y + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot T)/\sigma\sqrt{T})$; dabei gilt bekanntlich: $1-\Phi(x) = \Phi(-x)$.

Somit erhalten wir:

$$P^*[\Gamma] \to 1 - \Phi([\ln(\breve{K}/S_0) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 \cdot T]/\sigma\sqrt{T}) = \Phi([\ln(S_0/\breve{K}) - \tfrac{1}{2}\sigma^2 \cdot T]/\sigma\sqrt{T}).$$

Ebenso zeigt man mit $p'_u = p_u \cdot u = p_d$ (wegen $u \cdot d=1$):

$$P'[\Gamma] \to \Phi([\ln(S_0/\breve{K}) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 \cdot T]/\sigma\sqrt{T}).$$

Insgesamt ergibt sich also aus 2.9 mit $\breve{K} = e^{-rT} \cdot K$:

6.15 Satz. Für $n \to \infty$ gilt: $\quad x \to \pi(r,\sigma^2,T,S_0,K) :=$

$$S_0 \cdot \Phi([\ln(S_0/\breve{K}) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 \cdot T]/\sigma\sqrt{T}) - \breve{K} \cdot \Phi([\ln(S_0/\breve{K}) - \tfrac{1}{2}\sigma^2 \cdot T]/\sigma\sqrt{T}) =$$

$$S_0 \cdot \Phi([\ln(S_0/K) + (r+\tfrac{1}{2}\sigma^2)T]/\sigma\sqrt{T}) - K \cdot e^{-rT} \cdot \Phi([\ln(S_0/K) + (r-\tfrac{1}{2}\sigma^2)T]/\sigma\sqrt{T}).$$

Dies ist die **Black–Scholes–Formel** für die Bewertung einer Option in einem zeitstetigen Modell.

Dabei ist

r die Zinsrate im zeitstetigen Modell,
σ^2 die sog. *Volatilität* als Maß für die Kursschwankungen,
S_0 der Kurs z.Zt. 0,
T der Fälligkeitskeitstermin der Option,
$K = \breve{K}e^{rT}$ der Wahrnehmungspreis der Option.

Definiert man als **Delta** des Optionspreises: $\Delta(x,t) := \frac{\partial}{\partial x}\pi(r,\sigma^2,t,x,K)$, so gilt analog zu 6.11 im zeitstetigen Modell, daß durch

$$\xi_t := \Delta(S_t,T-t) = \Phi\left[\left[\ln(S_t/K) + (r+\tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right]/\sigma\sqrt{T-t}\right]$$

ein Plan definiert ist, mit dem die Option absichern kann und der ein Umschichten in jedem Zeitpunkt t verlangt.

Es gilt die folgende interessante Beziehung:

6.16 Satz. Das **Vega** des Optionspreises $\mathcal{V}(x,t) := \frac{\partial}{\partial\sigma}\pi(r,\sigma^2,t,x,K)$ ist positiv, also ist $\pi(r,\sigma^2,T,S_0,K)$ eine isotone Funktion von σ^2.

Im Fall $S_0 = \breve{K}$ ist die Aussage offensichtlich.

Beweis des allgemeinen Falles: Sei $\pi(r,\sigma^2,T,S_0,K) =: f(\sigma^2\cdot T)$. Wir berechnen $\frac{\partial}{\partial y}f(y^2)$, mit $y := \sigma\sqrt{T}$. Sei dazu φ die Dichte der $N(0,1)$–Verteilung. Mit $z := S_0/\breve{K}$ gilt:

$$f(y^2)/\breve{K} = z\Phi(\tfrac{1}{y}\log z + \tfrac{1}{2}y) - \Phi(\tfrac{1}{y}\log z - \tfrac{1}{2}y)\text{, also}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(y^2)$$

$$= z\varphi(\tfrac{1}{y}\log z + \tfrac{1}{2}y)\cdot(-\log(z)/y^2 + \tfrac{1}{2}) - \varphi(\tfrac{1}{y}\log z - \tfrac{1}{2}y)\cdot(-\log(z)/y^2 - \tfrac{1}{2}).$$

Wir dividieren durch $\varphi(\frac{1}{y}\log z - \frac{1}{2}y)$; wegen $\varphi(a+b)/\varphi(a-b) = e^{-2ab}$ ist $\frac{\partial}{\partial y}f(y^2) > 0$ äquivalent zu:

$$z\cdot e^{-\log z}\cdot(-\log(z)/y^2 + \tfrac{1}{2}) > (-\log(z)/y^2 - \tfrac{1}{2})\text{, also zu } \tfrac{1}{2} > -\tfrac{1}{2} \text{ wegen } z\cdot e^{-\log z} = 1. \ \square$$

Das folgende Diagramm zeigt Wege zur Berechnung der Black–Scholes– Formel:

$$\begin{array}{ccc} \text{zeitdiskretes Modell} & \longrightarrow & \text{zeitdiskrete Formel} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{zeitstetiges Modell} & \longrightarrow & \text{zeitstetige Formel} \end{array}$$

Hier sind wir den Weg vom zeitdiskreten Modell zur zeitdiskreten Binomialformel gegangen mit Hilfe einfacher Arithmetik und dann von der zeitdiskreten Formel zur zeitstetigen Black–Scholes– Formel durch einen Grenzübergang analog zum Beweis des zentralen Grenzwertsatzes. Der Grenzübergang vom zeitdiskreten Modell zum zeitstetigen Modell wird durch das Invarianzprinzip von Donsker geliefert, der eine Ausdehnung des zentralen Grenzwertsatzes auf stochastische Prozesse darstellt. In dem zeitstetigen Modell kann die zeitstetige Black–Scholes–Formel mit Methoden der stochastischen Analysis hergeleitet werden.

6.17 Bemerkung. Die Darstellung des fairen Preises für $X = [S_T - K]^+$ als gewichtete Differenz von Wahrscheinlichkeiten ergibt sich auch in allgemeinen Situationen.
Ist P* ein Martingalmaß, also der diskontierte Preisprozeß $\breve{S}$ ein Martingal unter P*, so wird sich $E^*[X \cdot e^{-r_0 \cdot T}]$ als ein Kandidat für einen Preis erweisen. Unter P* ist insbesondere $E^*[\breve{S}_T] = S_0$.
Damit ist $P'[\Gamma] := E^*[\mathbf{1}_\Gamma \cdot \breve{S}_T/S_0]$ ein W–Maß und es gilt mit $\Gamma := \{S_T > K\}$:

$$E^*[(S_T - K)^+ \cdot e^{-r_0 \cdot T}] = E^*[(\breve{S}_T - \breve{K}) \cdot \mathbf{1}_\Gamma] = S_0 \cdot P'[\Gamma] - K \cdot e^{-r_0 \cdot T} \cdot P^*[\Gamma] \ . \ \square$$

6.18 Bemerkung. In einem Modell mit $d = 1/u$, also $\ln d = -\ln u = -U$ gilt wegen $\breve{S}_m/\breve{S}_{m-1} \in \{d,u\}$ offenbar $\Delta \ln \breve{S}_m \in \{-U,U\}$ und somit:

$$(\Delta \ln \breve{S}_m)^2 = U^2 \text{ und}$$

(6.19) $$\{\tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{m=1}^{n} (\Delta \ln \breve{S}_m)^2\}^{\frac{1}{2}} = U.$$

In der Realität werden diese Beziehungen nicht streng gelten, da das Modell die Wirklichkeit nur annähernd beschreibt. Die Beziehung (6.19) legt aber nahe, die dort angegebenen Größen als Schätzer für U zu benutzen auf Grund einer Beobachtung von Daten über n Perioden.
Läßt sich die tatsächliche zeitliche Entwicklung des Kurses auf dem Markt durch ein W–Maß P bescheiben, daß die gleiche Gestalt hat wie P* nur mit einem anderem p anstelle von p_u, so sind die $\Delta \ln \breve{S}_m$, $1 \le m \le n$, wieder unabhängig und identisch verteilt. Dann ist (6.19) in Hinblick auf den zentralen Grenzwertsatz ein naheliegende Schätzer für $E[\{\Delta \ln \breve{S}_1\}^2]$, also auch für $\mathrm{Var}[\Delta \ln \breve{S}_1]$ für den Fall $E[\Delta \ln \breve{S}_1] \approx 0$.

Über die Beziehung (6.14) erhält man ebenfalls eine Schätzung für U, wenn man eine solche für die Volatilität σ hat. Für σ stehen gute Schätzer zur Verfügung; so werden auch laufend Schätzungen für σ veröffentlicht. $\square$

§7 Ein L^p–Modell.

Es sollen nun unvollständige Märkte untersucht werden. Die Bezeichnungen und Voraussetzungen schließen sich an §5 an.
Die folgende Voraussetzung möge stets erfüllt sein.

7.1 Voraussetzung. Für ein $p \in [1,\infty]$ gilt: $\breve{S}_t^k \in L^p = L^p(\Omega,\mathfrak{F},P)$, $1 \le k \le d$, für $1 \le t \le T^*$.

Wichtig sind die Fälle p=1 und p=2.

7.2 Definition. Sei P* ein W–Maß auf $\mathfrak{F}$. Sind die diskontierten Preisprozesse $\{\breve{S}_t^k\}$ Martingale unter P* für $1 \le k \le d$, so heißt P* ein **Martingalmaß**.
Dabei ist $\{M_t\}$ ein Martingal under P*, wenn gilt: M_t ist P*–intb. $\forall t$ und für $0 \le t < T^*$ gilt:

(7.3) $$\int_A \Delta M_{t+1} \, dP^* = 0, \ A \in \mathfrak{F}_t, \ \text{d.h. } E^*[\Delta M_{t+1} | \mathfrak{F}_t] = 0 \quad .$$

Wir betrachten jetzt nur Pläne mit einer Integrabilitätsbedingung:

7.4 Def. Wir schreiben $\xi \in \Xi^p(Q)$ für einen Plan $\xi = (\xi_0,\ldots,\xi_{T^*-1})$ und ein W–Maß Q auf $(\Omega,\mathfrak{F})$, falls
$$\int |\xi_{t-1}^k \cdot \Delta\breve{S}_t^k|^p \, dQ < \infty \ , \ 1 \le k \le d, \ 1 \le t \le T^*.$$

7.5 Lemma. Sei $x \in \mathbb{R}$. Es sind äquivalent:

(i) P* ist ein Martingalmaß;

(ii) $\int \xi_t^\top \cdot \Delta\breve{S}_{t+1} \, dP^* = 0$ für $\xi \in \Xi^1(P^*)$ für $1 \le t \le T^*$;

(iii) $\{\breve{V}_t^\xi(x), 0 \le t \le T^*\}$ ist ein Martingal unter P* $\forall \xi \in \Xi^1(P^*)$;

(iv) $E^*[\breve{V}_{T^*}^\xi(x)] = x \ \ \forall \xi \in \Xi^1(P^*)$.

(v) $E^*[\breve{V}_{T^*}^\xi(x)] = x$ für alle beschränkten Pläne ξ.

Beweis. "(i)⇒(ii)" (7.3) besagt mit $M_t = \breve{S}_t^k$: $\int \mathbf{1}_A \cdot \Delta\breve{S}_{t+1}^k \, dP^* = 0, \ A \in \mathfrak{F}_t$.
Mit maßtheoretischer Induktion (Beweisprinzip für Integrale) folgt nun leicht:
$$\int \xi_t^k \cdot \Delta\breve{S}_{t+1}^k \, dP^* = 0 \ , \ 1 \le k \le d, \text{ und damit (ii).}$$

"(ii)⇒(iii)" Für $A \in \mathfrak{F}_t$ und $\tilde{\xi}_t := \mathbf{1}_A \cdot \xi_t$ haben wir: $\int_A \Delta\breve{V}_{t+1}^\xi(x) \, dP^* = \int \tilde{\xi}_t^\top \cdot \Delta\breve{S}_{t+1} \, dP^* = 0$.

"(iii)⇒(iv)" ist nun klar, ebenso "(iv)⇒(v)" .
"(v)⇒(i)" Für $A \in \mathfrak{F}_{t-1}$, $0 \le t < T^*$ folgt $\int \mathbf{1}_A \cdot \Delta\breve{S}_{t+1}^k \, dP^* = 0$, indem man $\xi_t^k = \mathbf{1}_A$ und $\xi_m^i = 0$ sonst definiert; dann ist $\breve{V}_{T^*}^\xi(x) = x + \mathbf{1}_A \cdot \Delta\breve{S}_t^k$. $\square$

Wir werden mit künstlichen W–Maßen P* arbeiten mit:

(7.6) $\quad P^*[A] > 0 \Leftrightarrow P[A] > 0$ d.h. $P^* \ll P$ und $P \ll P^*$.

Einerseits sollen unter P* keine Ereignisse eintreten, die unter P nicht möglich sind. Dazu dient die Forderung: $P^* \ll P$, d.h. nach dem Satz von Radon–Nikodym, daß P* eine P–Dichte $Z := dP^*/dP$ hat. Andererseits will man von "für P*–f.a. ω" auf "für P–f.a. ω" schließen. Dazu dient die Forderung: $P \ll P^*$; diese ist in der Situation $dP^* = L\,dP$ äquivalent mit $L>0$ P–f.s.
In der Situation (7.6) sagt man: P und P* sind **äquivalent**.
Wir schreiben für ein W–Maß Q auf $\mathfrak{F}$:
(7.7) $\quad Q \in \mathbb{Q}^q(P) :\Leftrightarrow$ es existiert eine positive Dichte $dQ/dP \in L^q$,
Dann folgt:

7.8 Lemma Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $Q \in \mathbb{Q}^q(P)$; dann gilt:

(a) P–f.s. $\Leftrightarrow$ Q–f.s.;
(b) $L^p(P) \subset L^1(Q)$, insbesondere gilt: $\Xi^p(P) \subset \Xi^1(Q)$.

Beweis: 7.8(a) ist klar, und (b) folgt aus der Hölderschen Ungleichung:

$$E_Q[\,|Y|\,] = E[L \cdot |Y|\,] \le \|Z\|_{L^q} \cdot \|Y\|_{L^p}, \; 0<p<\infty \quad \text{mit } L := dQ/dP,\ \|Y\|_{L^p} = E[\,|Y|^p]^{1/p}.$$

Eine entsprechende Ungleichung erhält man für $p=1,\infty$. []
Sei
(7.9) $\quad \mathbb{P}^{*q} := \mathbb{P}^{*q}(P) := \{P^* \in \mathbb{Q}^q(P);\ P^* \text{ ist ein Martingalmaß}\}$.

Wir erinnern an: Eine **Arbitragemöglichkeit** ist gegeben, falls ein ξ und ein T existiert mit $\breve{V}^{\xi}_T(0) \ge 0$ f.s. und $P[\breve{V}^{\xi}_T(0) > 0] > 0$. Bei **Arbitragefreiheit** gilt also:

$$\text{"}P[\breve{V}^{\xi}_T(0) > 0] > 0 \Leftrightarrow P[\breve{V}^{\xi}_T(0) < 0] > 0\text{" für alle } \xi \text{ und T.}$$

Dabei gilt "$\Leftarrow$" wegen $\breve{V}^{-\xi}_T(0) = -\breve{V}^{\xi}_T(0)$. Es sollen nun Charakterisierungen der Arbitragefreiheit gegeben werden.

Satz 7.10. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(NA) Der Markt ist arbitragefrei.

$(NA)_1$ Für $1 \le T \le T^*$ und jeden Plan ξ gilt: $\breve{V}^{\xi}_T(0) \ge 0$ f.s. $\Rightarrow \breve{V}^{\xi}_T(0) = 0$ f.s.

$(NA)_2$ Für jeden Plan ξ gilt: $\breve{V}^{\xi}_{T^*}(0) \ge 0$ f.s. $\Rightarrow \breve{V}^{\xi}_{T^*}(0) = 0$ f.s.

$(NA)_3$ Für $1 \le t \le T^*$ und jeden Plan ξ gilt: $\xi^{\top}_{t-1} \cdot \Delta\breve{S}_t \ge 0$ f.s. $\Rightarrow$ $\xi^{\top}_{t-1} \cdot \Delta\breve{S}_t = 0$ f.s. .

Beweis: Die folgenden Beziehungen sind offensichtlich: "(NA) $\Leftrightarrow$ $(NA)_1$", "$(NA)_1 \Rightarrow (NA)_2$".

Wir zeigen nun:

"$(NA)_2 \Rightarrow (NA)_3$" Setzt man $\xi_m=0$ für $m\neq t-1$, so gilt: $\breve{V}^{\xi}_{T*}(0) = \xi^{\top}_{t-1}\cdot\Delta\breve{S}_t$.

"$(NA)_3 \Rightarrow (NA)_1$" Es soll eine Induktion nach T durchgeführt werden.

Für T=1 sind beide Bedingungen die gleichen. Die Aussage von $(NA)_1$ gelte nun für T–1.

Sei nun $\breve{V}_T := \breve{V}^{\xi}_T(0) \geq 0$ f.s. .

Ist $\breve{V}_{T-1} = 0$ f.s., so muß $\xi^{\top}_{T-1}\cdot\Delta\breve{S}_T \geq 0$ gelten und wir können $\breve{V}_T = 0$ f.s. schließen.

Angenommen: $P[\breve{V}_{T-1} \neq 0] > 0$, und $\breve{V}_T \geq 0$ f.s.

Nach unserer Induktionsvoraussetzung kann dann: $P[\breve{V}_{T-1} < 0] > 0$, $P[\breve{V}_{T-1} > 0] > 0$. Also erhalten wir für $A := \{\breve{V}_{T-1} < 0\} \in \mathfrak{F}_{T-1}$: $P[A] > 0$, $\xi^{\top}_{T-1}\cdot\Delta\breve{S}_T > 0$ f.s. auf A (wegen $\breve{V}_T \geq 0$ f.s.).

Für $\xi'_{T-1} := \mathbf{1}_A\cdot\xi_{T-1}$ gilt nun: $\xi'^{\top}_{T-1}\cdot\Delta\breve{S}_T = \mathbf{1}_A\cdot\xi^{\top}_{T-1}\cdot\Delta\breve{S}_T \geq 0$ f.s. und $\xi'^{\top}_{T-1}\cdot\Delta\breve{S}_T > 0$ auf A. Dies ist aber ein Widerspruch zu $(NA)_3$. $\square$

§8 Martingalmaße.

Wir können nun den einen der wichtigsten Sätze formulieren:

8.1 Satz Unter (NA) existiert ein Martingalmaß P* mit positiver, beschränkter P–Dichte dP/dP*.

Der Beweis soll weiter unten nur für einen Spezialfall gegeben werden. Als Korollar ergibt sich:

8.2 Fundamentalsatz. Sei p wie in 7.1, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Dann sind äquivalent:

(i) es gilt (NA);

(ii) $\mathbb{P}^{*\infty}$ ist nicht leer;

(iii) $\mathbb{P}^{*1}$ ist nicht leer.

Beweis: Gemäß 8.1 gilt "(i) $\Rightarrow$ (ii)". Wegen $\mathbb{P}^{*\infty} \subset \mathbb{P}^{*1}$ hat man "(ii) $\Rightarrow$ (iii)".
Die Richtung "(iii) $\Rightarrow$ (i)" ist leicht zu zeigen. Sei $P^* \in \mathbb{P}^{*1}$; wir zeigen (NA_3).

Sei $\xi_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\breve{S}_t \geq 0$ f.s. ; dann hat man auch $\tilde{\xi}_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\breve{S}_t \geq 0$ f.s. mit

$$\tilde{\xi}_t^k := \xi_t^k \cdot N_t \text{ und } N_t := (1 + \textstyle\sum_1^d |\xi_t^j|)^{-1} > 0.$$

Es folgt $|\tilde{\xi}_t^k| \leq 1$ und somit $\tilde{\xi} \in \Xi^1(P^*)$. Es gilt nun nach 7.5: $E^*[\tilde{\xi}_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\breve{S}_t] = 0$ sowie nach Voraussetzung $P^*[\tilde{\xi}_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\breve{S}_t \geq 0] = 1$. Somit ergibt sich:

$\tilde{\xi}_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\breve{S}_t = 0 = N_{t-1} \cdot \xi_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\breve{S}_t$ f.s. , d.h. $\xi_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\breve{S}_t = 0$ f.s. . []

Es liege das L^p–Modell von §7 vor. Als Zahlungsansprüche X, die in T anfallen, betrachten wir solche, für welche für die diskontierten Größen gilt: $\breve{X} := X/B_T \in L^p(\Omega,\mathfrak{F}_T,P)$. Die zentrale Aufgabe ist es, jedem solchen X eine Prämie / einen Preis zuzuordnen; wir schreiben für diesen $\Pi(\breve{X})$. Wir werden immer mit den diskontierten Zahlungsansprüchen arbeiten.

8.3 Definition. Sei $L^p := L^p(\Omega,\mathfrak{F}_{T^*},P)$. Ein **Preissystem** ist eine Abbildung

$\Pi : L^p \mapsto \mathbb{R}$ mit

(i) $\Pi(\alpha_1\breve{X}_1 + \alpha_2\breve{X}_2) = \alpha_1\Pi(\breve{X}_1) + \alpha_2\Pi(\breve{X}_2)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\breve{X}_i \in L^p$;

(ii) $\sup\left\{ |\Pi(\breve{X})|; E[|\breve{X}|^p] \leq 1 \text{ für } p<\infty \text{ bzw. } |\breve{X}| \leq 1 \text{ f.s. für } p=\infty \right\} < \infty$;

(iii) für $\breve{X} \geq 0$ f.s. gilt:

(a) $\Pi(\breve{X}) \geq 0$;

(b) $\Pi(\breve{X}) > 0 \Leftrightarrow P[\breve{X} > 0] > 0$;

d.h. $\Pi : L^p \mapsto \mathbb{R}$ ist eine positive, stetige (d.h. hier beschränkte), lineare Abbildung [ein positiver linearer Operator].

Aus 7.8 (Höldersche Ungleichung) erhält man für $Q \in \mathbb{Q}^q(P)$, $0 < L := dQ/dP \in L^p$:

$$|E_Q[\breve{X}]| \le \|L\|_{L^q} \cdot \|\breve{X}\|_{L^p} < \infty$$

Damit ergibt sich

8.4 Lemma. Für $Q \in \mathbb{Q}^q(P)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist

$\Pi(\breve{X}) := E_Q[\breve{X}]$ eine Preissystem mit $\Pi(\breve{B}_T) = 1$.

Es soll erinnert werden an: X ist erreichbar $\Leftrightarrow$ $\breve{X} = \breve{V}_T^\xi(x)$ für ein x und ein ξ mit [vgl. 5.11, 5.14]:

(8.5) $$\breve{V}_T^\xi(x) = x + \breve{V}_T^\xi(0) = x + \Sigma_{t=1}^T \xi_{t-1}^\top \Delta\breve{S}_t .$$

In dieser Situation hatten wir in §5 x bereits als faire Prämie erkannt.

8.6 Definition. Ein Preissystem Π heißt **konsistent**, falls gilt:

Ist $\breve{X} \in L_T^p$ und X erreichbar durch x und $\xi \in \Xi^p(P)$, so gilt $\Pi(\breve{X}) = x$.

Es soll untersucht werden, wann ein Preissystem wie in 8.4 konsistent ist. Die Eigenschaft $\Pi(\breve{B}_{T*}) = 1$ ist sicherlich notwendig; betrachte dazu x=1, $\xi_t=0\ \forall$ t, also $V_{T*}^\xi(x) = B_{T*}$.

Eine weitere notwendige Eigenschaft für die Konsistenz von Π soll jetzt ermittelt werden.
Sei $\breve{X} = \breve{V}_{T*}^\xi(0)$ für ein $\xi \in \Xi^p(P)$. Dann muß gelten:

$\Pi(\breve{X}) = E_Q[\breve{V}_{T*}^\xi(0)] = 0$ für $\xi \in \Xi^p(P)$, insbesondere für alle beschränkten Pläne ξ. Gemäß 7.5 gilt nun: Q ist ein Martingalmaß.

8.7 Satz. Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Ist $1 \le p < \infty$, so existiert eine eineindeutige Beziehung zwischen konsistenten Preissystemen Π und W–Maßen $Q \in \mathbb{P}^{*q}$ gemäß:

(i) $Q[A] = \Pi(\mathbf{1}_A)$, $A \in \mathfrak{F}$;

(ii) $\Pi(\breve{X}) = E_Q[\breve{X}]$, $\breve{X} \in L^p$.

(b) Für $p=\infty$ wird für $Q \in \mathbb{P}^{*1}$ zumindest durch (ii) ein konsistentes Preissystem definiert.

Beweis: Sei Π ein konsistentes Preissystem und Q gemäß (i) definiert. Dann ist Π ein Element des Dualraumes zum Banachraum L^p. Damit existiert für $1 \le p < \infty$ ein $L \in L^q$ mit

(8.8) $$\Pi(\breve{X}) = E[L \cdot \breve{X}], \text{ insbesondere } Q[A] = \Pi(\mathbf{1}_A) = E[L \cdot \mathbf{1}_A].$$

Wegen der Positivität von Π folgt: $L \ge 0$ f.s. [W.th. 9.20].

Gilt ferner $P[A]>0$ so hat man nach 8.3 (iii): $\Pi(\mathbf{1}_A) = Q[A] > 0$; somit gilt: $L > 0$ f.s. . Ferner gilt: $Q[\Omega] = \Pi(\breve{B}_{T*}) = 1$ wegen der Konsistenz.

Also wissen wir: Q ist ein W–Maß mit der P–Dichte L ; insbesondere: $Q \in \mathbb{Q}^q(P)$. Gemäß (8.8) gilt auch: $\Pi(\breve{X}) = E_Q[\breve{X}]$; die in (ii) definierte Abbildung ist also die Umkehrabbildung zu (i).

Nach den Vorüberlegungen folgt nun aus der Konsistenz, daß Q ein Martingalmaß ist. Damit ist die Zuordnung (i) als Abbildung von der Menge der konsistenten Preissysteme nach $\mathbb{P}^{*q}$ wohldefiniert.

Sei nun $1 \le p \le \infty$, $Q \in \mathbb{P}^{*q}$ und Π gemäß (ii) definiert. Dann ist Π ein Preissystem nach 8.4. Da Q ein Martingalmaß Q ist, folgt aus 7.5: $\Pi(\breve{X}) = E_Q[\breve{V}^{\xi}_{T^*}(x)] = x \quad \forall\, \xi \in \Xi^1(Q) \supset \Xi^p(P)$ und somit die Konsistenz. $\square$

Ein konsistentes Preissystem gewinnt man also über ein Martingalmaß.

Es sollen nun Martingalmaße in einem speziellen Modell untersucht werden. Dazu betrachten wir die folgende Situation:

8.9 n–Faktor–Modell. Seien $\varepsilon_t = (\varepsilon^1_t,...,\varepsilon^n_t)$ unabhängige Zva, σ^{ki}_t, $1 \le i \le n$, μ^k_t reelle Konstanten,

$$Y^k_t := \Sigma^n_{i=1}\, \sigma^{ki}_t\, \varepsilon^i_t + \mu^k_t,\quad E[\exp\{Y^k_t\}] < \infty,\ \mathfrak{F}_t = \sigma(\varepsilon_1,...,\varepsilon_t), \text{ sodaß gilt:}$$

$$\breve{S}^k_t = S^k_0 \cdot \exp\{Y^k_1+...+Y^k_t\} = \breve{S}^k_{t-1} \cdot \exp\{Y^k_t\} \qquad \text{für } 1 \le k \le d,\ 1 \le t \le T^*.$$

Für die **log–Rendite** gilt also $\ln(S^k_{t+1}/S^k_t) = r_t + Y^k_{t+1}$ und

(8.10) $$\log \breve{S}^k_t = \log S^k_0 + \Sigma^n_{i=1}\left[\Sigma_{1\le u\le t}\, \sigma^{ki}_u\, \varepsilon^i_u\right] + \Sigma_{1\le u\le t}\, \mu^k_u.$$

In der Situation 8.9 sind die Zva $Y_t := (Y^1_t,...,Y^d_t)$ als Funktionen von ε_t ebenfalls unabhängig. Die ε_t werden oft so gewählt, daß $\varepsilon^1_1,...,\varepsilon^n_1,...,\varepsilon^1_{T^*},...,\varepsilon^n_{T^*}$ iid sind mit $E[\varepsilon^i_t] = 0$, $\mathrm{Var}[\varepsilon^i_t] = 1$. Man spricht dann von einem **weißen Rauschen**. Dann sind die Parameter bestimmt durch:

$$E[Y^k_t] = \mu^k_t\,,\quad \mathrm{Kov}(Y^j_t,Y^k_t) = \Sigma_i\ \sigma^{ji}_t \cdot \sigma^{ki}_t.$$

Wir setzen nun einen arbitragefreien Markt voraus. Dann haben wir:

8.11 Lemma. In der Situation 8.9 ist $(NA)_3$ äquivalent zu:

$(NA)_4$ Für $1 \le t \le T^*$ und alle $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}^1,...,\tilde{\xi}^d) \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\Sigma^d_{k=1}\, \tilde{\xi}^k \cdot (\exp\{Y^k_t\} - 1) \ge 0 \text{ f.s.} \ \Rightarrow\ \Sigma^d_{k=1}\, \tilde{\xi}^k \cdot (\exp\{Y^k_t\} - 1) = 0 \text{ f.s. .}$$

Beweis. Es gilt $\Delta\breve{S}^k_t = \breve{S}^k_{t-1} \cdot (\exp\{Y^k_t\} - 1)$. Gelte zunächst $(NA)_3$ und gelte für $\tilde{\xi}$ die linke Seite von $(NA)_4$. Wählen wir nun $\xi^k_{t-1} := \tilde{\xi}^k_{t-1}/\breve{S}^k_{t-1}$, so gilt: $\xi^{\top}_{t-1} \cdot \Delta\breve{S}_t \ge 0$ f.s. und damit $\xi^{\top}_{t-1} \cdot \Delta\breve{S}_t = 0$ f.s.. Damit gilt auch die rechte Seite von $(NA)_4$.

Es gelte nun $(NA)_4$ und $\xi^{\top}_{t-1} \cdot \Delta\breve{S}_t \ge 0$ f.s. Setzen wir $Z^k := \xi^k_{t-1} \cdot \breve{S}^k_{t-1}$ und $R^k := \exp\{Y^k_t\} - 1$, so haben wir also: $Z^{\top} \cdot R \ge 0$ f.s.; dabei sind R und Z unabhängig. Aus der Definition des Produktmaßes $PZ^{-1} \times PR^{-1} = P(Z,R)^{-1}$ folgt: $1 = P[Z^{\top} \cdot R \ge 0] = \int P[z^{\top} \cdot R \ge 0]\ PZ^{-1}[dz]$.

Damit gilt auch $P[z^\top \cdot R \geq 0] = 1$ für PZ^{-1}–f.a. z. Nach $(NA)_4$ folgt aber aus $P[z^\top \cdot R \geq 0] = 1$ sofort $P[z^\top \cdot R = 0] = 1$. Damit haben wir auch $1 = P[Z^\top \cdot R = 0] = P[\xi_{t-1}^\top \cdot \Delta\breve{S}_t = 0]$. []

Für eine angepaßte Form des Fundamentalsatzes wählen wir ein Marktmodell mit $\tilde{T}^* = 1$, $\tilde{r}_0 = 0$, $\tilde{S}_0^k = 1$, $\tilde{S}_1^k = \exp\{Y_t^k\}$, $\tilde{\mathfrak{F}}_1 = \sigma(\varepsilon_t)$. Dann gilt: $\Delta\tilde{S}_1^k = \Delta\breve{\tilde{S}}_1^k = \exp\{Y_t^k\} - 1$ und jede $\tilde{\mathfrak{F}}_1$–meßbare reelle Zva ist eine meßbare Funktion von ε_t. Gemäß $(NA)_4$ ist dieser Markt arbitragefrei. Nach dem Fundamentalsatz 8.1/8.2 existiert eine positive, beschränkte Funktion $\tilde{\ell}_t$, so daß $dQ_t := \tilde{\ell}_t(\varepsilon_t)\, dP$ ein Martingalmaß für diesen Markt ist, d.h. $E_{Q_t}[\tilde{S}_1^k] = S_0^k = 1$, also

(8.12) $$\int \tilde{\ell}_t(\varepsilon_t) \cdot \exp\{Y_t^k\}\, dP = \int \tilde{\ell}_t(\varepsilon_t)\, dP = 1 \quad \text{für } 1 \leq k \leq d,\ 1 \leq t \leq T^*.$$

Existiert umgekehrt eine positive, meßbare Funktion ℓ_t mit (8.12), so ist

$$L := \tilde{\ell}_1(\varepsilon_1) \cdot \ldots \cdot \tilde{\ell}_{T^*}(\varepsilon_{T^*})$$

die Dichte eines Martingalmaßes $dP^* = L\, dP$. Zunächst ist P^* ein äquivalentes W–Maß, denn

$$\int L\, dP = E[\tilde{\ell}_1(\varepsilon_1) \cdot \ldots \cdot \tilde{\ell}_{T^*}(\varepsilon_{T^*})] = E[\tilde{\ell}_1(\varepsilon_1)] \cdot \ldots \cdot E[\tilde{\ell}_{T^*}(\varepsilon_{T^*})] = 1$$

wegen der Unabhängigkeit und (8.12). Zum Beweis der Martingaleigenschaft sei nun $A \in \mathfrak{F}_{t-1}$. Dann ist $\mathbf{1}_A$ eine meßbare Funktion von $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{t-1}$ und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
{}_A\!\int \breve{S}_t^k\, dP^* &= {}_A\!\int \breve{S}_t^k\, \tilde{\ell}_1(\varepsilon_1) \cdot \ldots \cdot \tilde{\ell}_{T^*}(\varepsilon_{T^*})\, dP \\
&= E[\mathbf{1}_A \cdot \breve{S}_{t-1}^k \cdot \tilde{\ell}_1(\varepsilon_1) \cdot \ldots \cdot \tilde{\ell}_{t-1}(\varepsilon_{t-1}) \cdot \tilde{\ell}_t(\varepsilon_t)\exp\{Y_t^k\} \cdot \tilde{\ell}_{t+1}(\varepsilon_{t+1}) \ldots \cdot \tilde{\ell}_{T^*}(\varepsilon_{T^*})] \\
&= E[\mathbf{1}_A \cdot \breve{S}_{t-1}^k \cdot \tilde{\ell}_1(\varepsilon_1) \cdot \ldots \cdot \tilde{\ell}_{t-1}(\varepsilon_{t-1})] \cdot E[\tilde{\ell}_t(\varepsilon_t)\exp\{Y_t^k\}] \cdot E[\tilde{\ell}_{t+1}(\varepsilon_{t+1})] \ldots \cdot E[\tilde{\ell}_{T^*}(\varepsilon_{T^*})] \\
&= E[\mathbf{1}_A \cdot \breve{S}_{t-1}^k \cdot \tilde{\ell}_1(\varepsilon_1) \cdot \ldots \cdot \tilde{\ell}_{t-1}(\varepsilon_{t-1})] = E[\mathbf{1}_A \cdot \breve{S}_{t-1}^k \cdot \tilde{\ell}_1(\varepsilon_1) \cdot \ldots \cdot \tilde{\ell}_{T^*}(\varepsilon_{T^*})] = {}_A\!\int \breve{S}_{t-1}^k\, dP^*
\end{aligned}$$

wegen der Unabhängigkeit und (8.12). Damit ist Q_t ein Martingalmaß und somit gilt (NA).

8.13 Satz. (a) In der Situation 8.9 sind äquivalent: (i) Der Markt ist arbitragefrei;

(ii) es existieren positive, beschränkte meßbare Funktionen $\tilde{\ell}_t$, $1 \leq t \leq T^*$, mit (8.10);

(iii) es existieren positive meßbare Funktionen $\tilde{\ell}_t$, $1 \leq t \leq T^*$, mit (8.10);

(iv) es existieren reelle meßbare Funktionen ℓ_t, $1 \leq t \leq T^*$, mit

(8.14) $$\exp\{\mu_t^k\} \cdot \int \exp\{\ell_t(\varepsilon_t) + \Sigma_{i=1}^n \sigma_t^{ki}\, \varepsilon_t^i\}\, dP = \int \exp\{\ell_t(\varepsilon_t)\}\, dP < \infty \quad \text{für } 1 \leq k \leq d.$$

(b) Unter der Bedingung (iv) ist $L := \text{const} \cdot \exp\{\Sigma_{t=1}^{T^*} \ell_t(\varepsilon_t)\}$ die Dichte eines Martingalmaßes P^* mit $\text{const} = \Pi_{t=1}^{T^*} E[\exp\{\ell_t(\varepsilon_t)\}]^{-1}$. Unter P^* sind $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{T^*}$ wieder unabhängig mit $P^*[\{\varepsilon_t \in B\}] = E[\exp\{\ell_t(\varepsilon_t)\}]^{-1} {}_{\{\varepsilon_t \in B\}}\!\int \exp\{\ell_t(\varepsilon_t)\}\, dP$ und

(8.14)* $$\exp\{-\mu_t^k\} = E^*[\exp\{\Sigma_{i=1}^n \sigma_t^{ki}\, \varepsilon_t^i\}].$$

Beweis. a)Die Richtungen "(i) ⇒ (ii)" und "(iii) ⇒ (i)" wurden oben gezeigt. Die Richtung "(ii) ⇒ (iii)" ist offensichtlich. Für "(iii) ⇒ (iv)" setzt $\ell_t := \ln \tilde{\ell}_t$ man und für "(iv) ⇒ (iii)" $\tilde{\ell}_t := \exp\{\ell_t\}/\int \exp\{\ell_t(\varepsilon_t)\}dP$.

b) Daß L Dichte eines Martingalmaßes ist, ist nun auch klar. Wir erhalten dann
$P^*[\varepsilon_t \in B_t,\ 1 \le n \le T^*] = E[\,L \cdot \mathbf{\Pi}_{t=1}^{T^*} \mathbf{1}_{B_t}(\varepsilon_t)] = E[\Pi_{t=1}^{T^*} \exp\{\ell_t(\varepsilon_t)\} \cdot E[\ell_t(\varepsilon_t)]^{-1} \cdot \mathbf{1}_{B_t}(\varepsilon_t)]$
$= \Pi_{t=1}^{T^*} E[\exp\{\ell_t(\varepsilon_t)\} \cdot \mathbf{1}_{B_t}(\varepsilon_t)] \cdot E[\ell_t(\varepsilon_t)]^{-1}$. Es folgt insbesondere
$P^*[\varepsilon_t \in B_t] = E[\exp\{\ell_t(\varepsilon_t)\} \cdot \mathbf{1}_{B_t}(\varepsilon_t)] \cdot E[\ell_t(\varepsilon_t)]^{-1}$. []

Die Bedingung (8.14) ist ein **Driftbedingung**, eine Bedingung an den sogenannten **Drift** μ_t^k. Bei Vorgabe von Funktionen ℓ_t mit $\int \exp\{\ell_t(\varepsilon_t)\}\ dP < \infty$ kann durch Wahl der Konstanten μ_t^k die Bedingung (8.14) erfüllt werden.

Für den Beweis von 8.13 ("(i) ⇒ (ii)") haben wir den noch unbewiesenen Satz 8.1 benutzt. Wir möchten jetzt für d=1 die Richtung "(i) ⇒ (iii)" direkt zeigen in der folgenden Situation:

(8.15) Es gelte (8.9) mit d = 1 = n und $E[\exp\{s \cdot \varepsilon_t\}] < \infty\ \forall\ s \in \mathbb{R}$.

Die Integrierbarkeitsbedingung an ε_t ist erfüllt, wenn ε_t beschränkt oder normalverteilt ist. Außerdem setzen wir $(NA)_4$ voraus. Im vorliegenden Fall d=1 ist dann $(NA)_4$ offenbar äquivalent zu:

(8.16) Für $1 \le t \le T^*$ gilt: $P[Y_t \ne 0] > 0 \Rightarrow\ P[Y_t > 0] > 0,\ P[Y_t < 0] > 0$.

Wir halten nun t fest, setzen $Y := Y_t$ und wollen (8.12)/(8.14) zeigen mit $\ell_t(\varepsilon_t) = \delta_t \cdot Y_t$, d.h.

(8.17) $\int \exp\{(\delta_t+1) \cdot Y_t\}\ dP = \int \exp\{\delta_t \cdot Y_t\}\ dP$.

Den Index t lassen wir wieder weg.

Der Fall Y = 0 f.s. ist uninteressant, denn dann können wir $\delta = 0$ setzen. Sei also $P[Y > 0] > 0$ und $P[Y < 0] > 0$. Für (8.17) muß gelten

(8.17)* $\psi(\delta) := E[e^{\delta Y} \cdot (e^Y - 1)] = 0$ für ein $\delta = \delta_t$.

Nun ist $\psi(\delta) = \left[E[e^{\delta Y} \cdot (e^Y - 1)^+] - E[e^{\delta Y} \cdot (e^Y - 1)^-\,]\right]$, also erhalten wir:
$\lim_{\delta \to \infty} \psi(\delta) \ge \lim_{\delta \to \infty} E[\mathbf{1}_{\{Y > 0\}}\ e^{\delta Y} \cdot (e^Y - 1)]\ -\ E[(e^Y - 1)^-\,]\ = \infty$ wegen $P[Y > 0] > 0$.

Ebenso erhalten wir
$\lim_{\delta \to -\infty} \psi(\delta) \le E[(e^Y - 1)^+]\ -\ \lim_{\delta \to -\infty} E[\mathbf{1}_{\{Y < 0\}}\ e^{\delta Y} \cdot (1 - e^Y)]\ = -\infty$ wegen $P[Y < 0] > 0$.

Zudem ist ψ stetig, also muß ψ nach dem Zwischensatz eine Nullstelle δ_t haben. Damit ist (8.17) gezeigt. Diese Methode heißt die **exponentielle Zentrierung** oder **Esscher–Transformation**.

Damit ist eine schwächere Variante von 8.1 gezeigt.

8.18 Satz. Unter der Bedingung (NA) existiert in der Situation (8.15) ein Martingalmaß P* der Form:

$$dP^* = c_1^{-1} \cdot \exp\{\delta_1 \cdot Y_1 + ... + \delta_{T^*} \cdot Y_{T^*}\}\, dP \quad \text{mit} \quad c_1 = \prod_{t=1}^{T^*} E[\exp\{\delta_t \cdot Y_t\}] \; ;$$

$$= c_2^{-1} \cdot \exp\{-\textstyle\sum_{t=1}^{T^*} \gamma_t \cdot \varepsilon_t\}\, dP \quad \text{mit} \quad \gamma_t = -\sigma_t \cdot \delta_t,\; c_2 = \prod_{t=1}^{T^*} E[\exp\{-\gamma_t \cdot \varepsilon_t]\,.$$

Sind die ε_t iid mit der logarithmierten Laplace–Transformierten $m_t(s) := \ln E[\exp\{-s \cdot \varepsilon_t\}]$, so sind die γ_t Lösungen von

(8.19) $$\mu_t + m_t(\gamma_t - \sigma_t) = m_t(\gamma_t),\; 1 \le t \le T^*.$$

8.20 Beispiel: **Das Binomialmodell.** Sind $I_1,...,I_{T^*}$ iid Zva mit Werten in $\{u,d\}$ $0 < d < 1 < u$ und $P[I_1 = u] = p \in (0,1)$. Setzt man $\varepsilon_t = Y_t := \ln(I_t)$, so hat man: $\breve{S}_t = S_0 \cdot \exp\{Y_1+...+Y_t\} = S_0 \cdot I_1 \cdot ... \cdot I_t$.
Man sucht gemäß (8.17) ein δ mit

$$\psi(\delta) := E[e^{\delta Y} \cdot (e^{Y}-1)] = 0 = (1-p) \cdot d^{\delta} \cdot (d-1) + p \cdot u^{\delta} \cdot (u-1)\,.$$

$$\Leftrightarrow (1-p) \cdot d^{\delta} \cdot (1-d) = p \cdot u^{\delta} \cdot (u-1) \Leftrightarrow (\tfrac{u}{d})^{\delta} = \frac{(1-p) \cdot (1-d)}{p \cdot (u-1)}$$

$$\Leftrightarrow p(\tfrac{u}{d})^{\delta} + 1-p \; \left[= \frac{p(1-p) \cdot (1-d) \; + \; p \cdot (1-p) \cdot (u-1)}{p \cdot (u-1)}\right] = (1-p)\,\frac{u-d}{u-1}.$$

Für ein solches δ weiß man nach 8.13/8.18: Unter P* sind $I_1,...,I_{T^*}$ wieder unabhängig mit

$$P^*[I_t = u] = \int_{\{I_t=u\}} e^{\delta Y}\, dP \,/\, E[e^{\delta Y}] = u^{\delta} p/(pu^{\delta} + (1-p)d^{\delta}) = p(\tfrac{u}{d})^{\delta}/(p(\tfrac{u}{d})^{\delta} + 1-p) = \frac{1-d}{u-d} = p_u\,,$$

wobei p_u wie in 6.1 definiert ist. Damit erhalten wir das gleiche Martingalmaß P* wie in §6. Dies ist auch nicht überraschend, da es in diesem Fall genau ein Martingalmaß gibt. $\square$

8.21 Lemma. Gilt $\varepsilon \sim N(0,1)$, so ist die logarithmierte Laplace–Transformierte m(s) von ε gegeben durch: $$m(s) = \ln E[e^{-s\varepsilon}] = \tfrac{1}{2}s^2,\; s \in \mathbb{R}, \text{ also: } E[\exp\{-s\varepsilon - \tfrac{1}{2}s^2\}] = 1.$$

Beweis: $E[e^{-s\varepsilon}] = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-sx}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-\frac{1}{2}(x+s)^2}\, e^{\frac{1}{2}s^2}\, dx = e^{\frac{1}{2}s^2}$. $\square$

Beispiel 8.22: **Ein zeitdiskretes Black–Scholes–Modell.** Geht man aus von dem zeitstetigen Modell für den diskontierten Preisprozeß $\{\breve{S}_t,\, t \ge 0\}$, für das die Black–Scholes–Formel (1973) hergeleitet worden ist, der sogenannten **geometrischen Brownschen Bewegung** (Samuelson 1965), und betrachtet man den eingebetteten zeitdiskreten Prozeß $\{\breve{S}_n,\, n = 0,1,...,T \in \mathbb{N}_0\}$, so gelangt man zu:

$$\breve{S}_n = S_0 \cdot \exp\{Y_1+...+Y_n\} \;\text{ mit } Y_n := \sigma \cdot \varepsilon_n + \mu = \sigma \cdot [\varepsilon_n + \theta] - \tfrac{1}{2}\sigma^2,\; \theta = \frac{\mu}{\sigma} + \tfrac{1}{2}\sigma, \text{ also:}$$

$$\breve{S}_n = S_0 \cdot \exp\{\sigma \cdot \textstyle\sum_1^n \varepsilon_m + n \cdot \mu\}.$$ Dabei sind die Zva $\{\varepsilon_n\}$ iid mit $\varepsilon_n \sim N(0,1)$.

Die Gleichung (8.19) führt gemäß Lemma 8.21 zu [wenn wir den Index t weglassen]:

$$\mu + \tfrac{1}{2}(\gamma - \sigma)^2 = \tfrac{1}{2}\gamma^2 \Leftrightarrow \mu + \tfrac{1}{2}\gamma^2 - \gamma\sigma + \tfrac{1}{2}\sigma^2 = \tfrac{1}{2}\gamma^2 \Leftrightarrow \sigma\gamma = \mu + \tfrac{1}{2}\sigma^2 \Leftrightarrow$$

(8.23) $\gamma = \theta = \frac{\mu}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma.$

Somit ist in Hinblick auf 8.18: $dP^* := L\, dP$, $L := L_1 \cdot ... \cdot L_T$ mit

$L_n := e^{\gamma\varepsilon_n}/E\left[e^{\gamma\varepsilon_n}\right] = \exp\{\gamma\cdot\varepsilon_n\} / \exp\{\frac{1}{2}\gamma^2\}$, also

(8.24) $L = \exp\{-\theta\cdot\sum_{n=1}^{T}\varepsilon_n - \frac{1}{2}\theta^2\cdot T\}.$

Dieser Maßwechsel von P zu P* hat noch eine schöne Eigenschaft, es bleibt die Varianz erhalten. Wir zeigen dazu eine einfache zeitdiskrete Form der Girsanov–Transformation.

8.25 Girsanov–Transformation. Sind $\varepsilon_1,...,\varepsilon_T$ unter P iid Zva mit $\varepsilon_n \sim N(0,1)$ und definiert man

$dP^* = L\, dP$ mit $L := \exp\{-\theta_n\cdot\sum_{n=1}^{T}\varepsilon_n - \frac{1}{2}\theta_n^2\cdot T\},$

so sind $\varepsilon_1,...,\varepsilon_T$ unter P* iid Zva mit $\varepsilon_n \sim N(-\theta_n,1)$.

Beweis. Wir wissen nach 8.13b: $\varepsilon_1,...,\varepsilon_T$ sind unter P* unabhängige Zva mit

$P^*\left[\varepsilon_n \in B\right] = E\left[\exp\{-\theta_n\cdot\varepsilon_n\}\cdot\mathbf{1}_B(\varepsilon_n)\right]\cdot E\left[\exp\{-\theta_n\cdot\varepsilon_n\}\right]^{-1}$

$= E\left[\exp\{-\theta_n\cdot\varepsilon_n\}\cdot\mathbf{1}_B(\varepsilon_n)\right]\cdot\exp\{-\frac{1}{2}\theta_n^2\} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_B \exp\{-\theta_n\cdot x - \frac{1}{2}\theta_n^2\}\cdot\exp\{-\frac{1}{2}x^2\}\,dx$

$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_B \exp\{-\frac{1}{2}(x+\theta_n)^2\}\,dx$. $\square$

Das Ergebnis schreibt man auch in der folgenden Form:

(8.26) Unter P* gilt für $\tilde\varepsilon_n := \varepsilon_n + \theta$: die $\tilde\varepsilon_n$ sind iid mit $\tilde\varepsilon_n \sim N(0,1)$;

$\breve S_n = S_0\cdot\exp\{\sigma\cdot\sum_{m=1}^{n}\tilde\varepsilon_n - \frac{1}{2}n\cdot\sigma^2\}$ [die Verteilung ist unter P* unabhängig von μ !].

Es soll nun die **Bewertung einer (europäischen Kauf–) Option** mit Fälligkeitstermin $T = T^*$ unter dem Martingalmaß P* berechnet werden. Dabei ist der Zahlungsanspruch $X = (S_T - K)^+$. Wir nehmen an, daß $r_t = r_0 =: r$ gilt. Dann ist der diskontierte Zahlungsanspruch $\breve X = (\breve S_T - \breve K)^+$ mit $\breve K = e^{-rT}\cdot K$.

Mit $\Gamma := \{\breve S_T > \breve K\}$ haben wir

$\Gamma = \{\exp\{Y_1+...+Y_T\} > \breve K/S_0\} = \{Y_1+...+Y_T > \ln(\breve K/S_0)\}$

$= \{\sigma\varepsilon_1+...+\sigma\varepsilon_T + T\mu > \ln(\breve K/S_0)\} = \{\sum_{n=1}^{T}\varepsilon_n > \frac{1}{\sigma}(\ln(\breve K/S_0) - T\mu)\}$ und

$E^*\left[(\breve S_T - \breve K)^+\right] = E^*\left[(\breve S_T - \breve K)\cdot\mathbf{1}_\Gamma\right] = E^*\left[\breve S_T\cdot\mathbf{1}_\Gamma\right] - \breve K\, P^*[\Gamma]$

$= S_0\cdot E^*\left[\frac{1}{S_0}\cdot\breve S_T\cdot\mathbf{1}_\Gamma\right] - \breve K\, P^*[\Gamma] = S_0\cdot E^*\left[\exp\{\sigma\cdot\sum_{n=1}^{T}\varepsilon_n + \mu\cdot T\}\cdot\mathbf{1}_\Gamma\right] - \breve K\, P^*[\Gamma]$

$= S_0\cdot E\left[\exp\{\sigma\cdot\sum_{n=1}^{T}\varepsilon_n + \mu\cdot T\}\cdot\exp\{-\theta\cdot\sum_{n=1}^{T}\varepsilon_n - \frac{1}{2}\theta^2\cdot T\}\cdot\mathbf{1}_\Gamma\right] - \breve K\, P^*[\Gamma]$

$= S_0\cdot E\left[\exp\{(\sigma-\theta)\cdot\sum_{n=1}^{T}\varepsilon_n + (\mu - \frac{1}{2}\theta^2)\cdot T\}\cdot\mathbf{1}_\Gamma\right] - \breve K\, P^*[\Gamma]$

$= S_0\cdot P'[\Gamma] - \breve K\, P^*[\Gamma]$

mit $dP' = \exp\{-(\theta-\sigma)\cdot\sum_{n=1}^{T}\varepsilon_n + (\mu-\frac{1}{2}\theta^2)\cdot T\}\,dP = \exp\{-(\theta-\sigma)\cdot\sum_{n=1}^{T}\varepsilon_n - \frac{1}{2}(\theta-\sigma)^2\cdot T\}\,dP$

wegen $\mu - \frac{1}{2}\theta^2 = \sigma\cdot\theta - \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{1}{2}\theta^2 = -\frac{1}{2}(\theta-\sigma)^2$. Gemäß 8.25/(8.26) gilt:

Unter P* sind die $\varepsilon_n+\theta$ iid mit $\varepsilon_n+\theta \sim N(0,1)$; damit gilt

$$T^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{T}(\varepsilon_n+\theta) \sim N(0,1) \text{ unter } P^*.$$

Unter P' sind die $\varepsilon_n + (\theta-\sigma)$ iid mit $\varepsilon_n + (\theta-\sigma) \sim N(0,1)$; damit gilt

$$T^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{T}(\varepsilon_n+(\theta-\sigma)) \sim N(0,1) \text{ unter } P'.$$

Sei wieder Φ die Verteilungsfunktion zu N(0,1). Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
&E^*[(\breve{S}_T-\breve{K})^+] = \\
&= S_0\cdot P'[\textstyle\sum_{n=1}^{T}\varepsilon_n > \frac{1}{\sigma}(\ln(\breve{K}/S_0)-T\mu)] - \breve{K}\,P^*[\sum_{n=1}^{T}\varepsilon_n > \frac{1}{\sigma}(\ln(\breve{K}/S_0)-T\mu)] \\
&= S_0\cdot P'[\textstyle\sum_{n=1}^{T}(\varepsilon_n+(\theta-\sigma)) > \frac{1}{\sigma}(\ln(\breve{K}/S_0)-T\mu) + T\cdot(\theta-\sigma)] \\
&\qquad - \breve{K}\,P^*[\textstyle\sum_{n=1}^{T}(\varepsilon_n+\theta) > \frac{1}{\sigma}(\ln(\breve{K}/S_0)-T\mu) + T\cdot\theta] \\
&= S_0\cdot P'[\textstyle\sum_{n=1}^{T}(\varepsilon_n+(\theta-\sigma)) > \frac{1}{\sigma}\ln(\breve{K}/S_0) + T\cdot(\theta-\frac{\mu}{\sigma}-\sigma)] \\
&\qquad - \breve{K}\,P^*[\textstyle\sum_{n=1}^{T}(\varepsilon_n+\theta) > \frac{1}{\sigma}\ln(\breve{K}/S_0) + T\cdot(\theta-\frac{\mu}{\sigma})] \\
&= S_0\cdot P'[\textstyle\sum_{n=1}^{T}(\varepsilon_n+(\theta-\sigma)) > \frac{1}{\sigma}\ln(\breve{K}/S_0) + T\cdot(-\frac{1}{2}\sigma)] \\
&\qquad - \breve{K}\,P^*[\textstyle\sum_{n=1}^{T}(\varepsilon_n+\theta) > \frac{1}{\sigma}\ln(\breve{K}/S_0) + T\cdot(\frac{1}{2}\sigma)] \\
&= S_0\cdot P'[T^{-\frac{1}{2}}\textstyle\sum_{n=1}^{T}(\varepsilon_n+(\theta-\sigma)) > T^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\sigma}\ln(\breve{K}/S_0)-\frac{1}{2}\sigma T\right]] \\
&\qquad - \breve{K}\,P^*[T^{-\frac{1}{2}}\textstyle\sum_{n=1}^{T}(\varepsilon_n+\theta) > T^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\sigma}\ln(\breve{K}/S_0)+\frac{1}{2}\sigma T\right]] \\
&= S_0\cdot[1-\Phi(T^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\sigma}\ln(\breve{K}/S_0)-\frac{1}{2}\sigma T\right])] - \breve{K}\cdot[1-\Phi(T^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\sigma}\ln(\breve{K}/S_0)+\frac{1}{2}\sigma T\right])] \\
&= S_0\cdot\Phi(-T^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\sigma}\ln(\breve{K}/S_0)-\frac{1}{2}\sigma T\right])] - \breve{K}\cdot\Phi(-T^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\sigma}\ln(\breve{K}/S_0)+\frac{1}{2}\sigma T\right])] \\
&= S_0\cdot\Phi([\ln(S_0/\breve{K})+\tfrac{1}{2}\sigma^2\cdot T]/\sigma\sqrt{T}) - \breve{K}\cdot\Phi([\ln(S_0/\breve{K})-\tfrac{1}{2}\sigma^2\cdot T]/\sigma\sqrt{T}) \\
&= S_0\cdot\Phi([\ln(S_0/K)+(r+\tfrac{1}{2}\sigma^2)T]/\sigma\sqrt{T}) - K\cdot e^{-rT}\cdot\Phi([\ln(S_0/K)+(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2)T]/\sigma\sqrt{T}).
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist die Bewertung unabhängig von μ, was auch schon aus (8.26) folgt. Die obige Formel stimmt überein mit der **Black–Scholes–Formel** für die Bewertung einer Option in einem zeitstetigen Modell (vgl. Satz 6.15). Im zeitstetigen Modell ist der Markt vollständig und das Martingalmaß eindeutig. In der diskreten Version ist der Markt nicht mehr vollständig, und es existieren mehrere Martinalmaße und damit mehrere konsistente Preissysteme. Indem wir das Preissystem gewählt haben, das zu dem durch die Esscher–Transformation gewonnenen Martingalmaß gehört, haben wir als Preis für die Option (im zeitdiskreten Modell) genau den Preis im zeitstetigen Modell erhalten.

8.27 Bemerkung: Die Dichte L = dP*/dP in Satz 8.18 ist nicht notwendig beschränkt. Um eine beschränkte Martingaldichte zu erhalten und um Integrierbarkeitsprobleme zu umgehen, kann man folgendermaßen vorgehen. Sei o.E. T* = 1 und wieder n=d=1. Man geht zu einem zu P äquivalenten Maß P' über $\left[\text{mit } \Delta\breve{S}_1 =: \Delta\breve{S}\right]$

$$P'[A] := {}_A\int \exp\{-|\Delta\breve{S}|^2\}\, dP \,/\, E[\exp\{-|\Delta\breve{S}|^2\}] \;.$$

Sei nun $\tilde{\psi}(s) := E'[e^{s\cdot\Delta\breve{S}}]$. Ist δ eine Minimumstelle von $\tilde{\psi}$, so gilt für die Ableitung $0 = E'[\Delta\breve{S}\cdot e^{\delta\cdot\Delta\breve{S}}]$ und damit

$$E^*[\Delta\breve{S}] = 0 \text{ (Martingaleigenschaft)}$$

wenn man das W–Maß P* definiert durch

$$P^*[A] := E'[\mathbf{1}_A\cdot e^{\delta\cdot\Delta\breve{S}}] \,/\, E'[e^{\delta\cdot\Delta\breve{S}}] = {}_A\int \exp\{\delta\cdot\Delta\breve{S} - |\Delta\breve{S}|^2\}\, dP \,/\, E[\exp\{...\}].$$

Also ist P* das gesuchte Martingalmaß mit beschränkter P–Dichte. Es kann aber gezeigt werden, daß eine Minimumstelle von $\tilde{\psi}$ bei Arbitragefreiheit existiert. Es gilt nämlich für $P[\Delta\breve{S} \neq 0] > 0$: Aus N(A) folgt dann $P[\Delta\breve{S} > 0] > 0$, $P[\Delta\breve{S} < 0] > 0$, und damit auch $P'[\Delta\breve{S} > 0] > 0$, $P'[\Delta\breve{S} < 0] > 0$. Nun erhalten wir

$$\tilde{\psi}(s) = E'[e^{s\cdot\Delta\breve{S}}] = E'[\mathbf{1}_{\{\Delta\breve{S}>0\}}e^{s\cdot\Delta\breve{S}}] + E'[\mathbf{1}_{\{\Delta\breve{S}<0\}}e^{s\cdot\Delta\breve{S}}] + P'[\Delta\breve{S}=0] \text{ und}$$

$$\lim_{s\to\infty} \tilde{\psi}(s) \geq E'[\mathbf{1}_{\{\Delta\breve{S}>0\}}e^{s\cdot\Delta\breve{S}}] = \infty,$$

$$\lim_{s\to-\infty} \tilde{\psi}(s) \geq E'[\mathbf{1}_{\{\Delta\breve{S}<0\}}e^{s\cdot\Delta\breve{S}}] = \infty. \;\square$$

8.28 Bemerkung. Eindeutigkeit des Martigalmaßes. In 5.15 wurde einem errreichbaren Zahlungsanspruch in eindeutiger Weise eine faire Prämie zugeordnet. In vollständigen Märkten (wie in §6 und in 10.28 siehe unten) hat also jeder Zahlungsanpruch eine eindeutige (faire) Prämie. Dies deckt sich damit, daß in vollständigen arbitrage–freien Märkten genau ein Martingal–Maß und damit genau ein konsistentes Preissystem exitiert. Dies ist leicht zu sehen.

Sei der Markt vollständig und seien P_1^* und P_2^* zwei Martingalmaße. Für zeigen $P_1^*(\Gamma) = P_2^*(\Gamma)$ für ein beliebiges $\Gamma \in \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{T^*}$. Es ist $X := B_{T^*}\cdot\mathbf{1}_\Gamma$ ein Zahlungsanspruch. Wegen der Vollständigkeit gilt: $\breve{X} = \breve{V}^\xi_{T^*}(x)$ für ein x und ein ξ. Aus der Martingal–Eigenschaft von $\{\breve{V}^\xi_t(x)\}$ unter P_i^* folgt jetzt:

$$E_i^*[\breve{V}^\xi_{T^*}(x)] = x \text{ für } i=1,2, \text{ also: } E_1^*[\breve{X}] = P_1^*[\Gamma] = E_2^*[\breve{X}] = P_2^*[\Gamma]. \;\square$$

§9 Zinsstrukturmodelle (term structure models)

Wie in Beispiel 5.12 betrachten wir jetzt T–Bonds als Wertpapiere. Dabei ist wie gesagt ein T–Bond ein Titel/Vertrag, der das Recht auf 1 Euro z.Zt. T (Fälligkeitstermin) gibt. Der Preis dafür z.Zt. t sei p(t,T). Die initiale Zinskurve $T \mapsto p(0,T)$ ist gegeben.

Anders als bei Aktien / Devisen muß man also bei der Modellierung des Preisprozesses p(t,T) durch einen stochastischen Prozeß einen "Brückenprozeß" konstruieren, bei dem der Anfangswert p(0,T) und der Endwert

(9.1) $\quad p(T,T) = 1$

vorgegeben sind. Die Endbedingung (9.1) schafft auch eine Kopplung zwischen den Preisprozessen $\{p(t,T)\}$, $1 \le T \le T^*+1 =: \hat{T}$. Dabei gilt:

(9.2) $\quad p(t,t+1) = \exp\{-r_t\}$.

Offenbar können die p(t,T) als Diskontierungsfaktoren für das Intervall $[t,T]$ aufgefaßt werden. Ein Euro, der erst in T ausgezahlt wird, hat in t den (Bar/Gegenwarts–) Wert p(t,T). Der Diskontierungsfaktor für das Intervall $[t,T]$ bei Kentnis der Zukunft ist $\exp\{-\sum_{m=t}^{T-1} r_m\}$. Wir möchten jetzt auch für p(t,T) eine analoge Darstellung haben.

9.3 Definition. Wir definieren die **Terminzinsrate** [forward rate] f(t,T) gemäß

$$p(t,T) := \exp\{-\textstyle\sum_{m=t}^{T-1} f(t,m)\} \text{ ; also } p(t,T+1) =: p(t,T)\cdot\exp\{-f(t,T)\}.$$

Dabei sind die f(t,m) wie die p(t,T) $\mathfrak{F}_t$–meßbar. Man kann sich f(t,m) als Prognose für die Zinsrate in $[t,t+1)$ vorstellen auf der Basis der Kenntnis in t. Insbesondere gilt:

(9.4) $\quad r_t = f(t,t)$.

Dabei sind die Größen f(0,T) in t=0 bekannt mit

(9.5) $\quad p(0,T) = \exp\{-\sum_{t=0}^{T-1} f(0,t)\}$.

Offenbar können die Größen f(t,T) aus den Größen p(t,T) berechnet werden und umgekehrt. Für die Modellierung kann man sich entweder auf die f(t,T) beziehen oder auf die p(t,T). Wir machen den folgenden Ansatz, der ein zeitdiskretes Analagon zum **HJM–n–Faktor–Modell** von Heath, Jarrow & Morton (1990,1992) ist [vgl. (8.10)]:

9.6 n–Faktor–Modell. Es existieren iid Zva $\varepsilon_t = (\varepsilon_t^1,\ldots,\varepsilon_t^n)$ und reelle Zahlen $\sigma^i(t,T)$, $1 \le i \le n$, $\alpha(t,T)$, $1 \le t < T \le \hat{T}$ mit $\hat{T} = T^*+1$, also $1 \le t \le T^*$, $2 \le T \le T^*+1$, sodaß gilt: $\mathfrak{F}_t = \sigma(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_t)$ und

$$f(t,T) = f(0,T) + \sum_{i=1}^n \sum_{u=1}^t \sigma^i(u,T)\,\varepsilon_u^i + \sum_{u=1}^t \alpha(u,T).$$

Dieser Ansatz impliziert

(9.7) $\quad r_t = f(t,t) = f(0,t) + \sum_{i=1}^n \sum_{u=1}^t \sigma^i(u,t)\,\varepsilon_u^i + \sum_{u=1}^t \alpha(u,t),$

$$p(t,T) = \exp\{ -\Sigma_{m=t}^{T-1} f(t,m)\}$$
$$= \exp\left\{-\Sigma_{m=t}^{T-1} \left[f(0,m) + \Sigma_{i=1}^{n} \Sigma_{u=1}^{t} \sigma^i(u,m)\, \varepsilon_u^i + \Sigma_{u=1}^{t} \alpha(u,m)\right]\right\},$$

also:

$$\breve{p}(t,T) := p(t,T)/B_t = p(t,T)\cdot \exp\{ -\Sigma_{m=0}^{t-1} r_m\}$$
$$= \exp\left\{-\Sigma_{m=t}^{T-1} \left[f(0,m) + \Sigma_{i=1}^{n} \Sigma_{u=1}^{t} \sigma^i(u,m)\, \varepsilon_u^i + \Sigma_{u=1}^{t} \alpha(u,m)\right]\right\}\cdot$$
$$\exp\left\{ -\Sigma_{m=0}^{t-1} \left[f(0,m) + \Sigma_{i=1}^{n} \Sigma_{u=1}^{m} \sigma^i(u,m)\, \varepsilon_u^i + \Sigma_{u=1}^{m} \alpha(u,m)\right]\right\}$$
$$= \exp\Big\{-\Sigma_{m=0}^{T-1} f(0,m) - \Sigma_{i=1}^{n} \Sigma_{m=t}^{T-1} \Sigma_{u=1}^{t} \sigma^i(u,m)\, \varepsilon_u^i - \Sigma_{i=1}^{n} \Sigma_{m=1}^{t-1} \Sigma_{u=1}^{m} \sigma^i(u,m)\, \varepsilon_u^i$$
$$- \Sigma_{m=t}^{T-1} \Sigma_{u=1}^{t} \alpha(u,m) - \Sigma_{m=1}^{t-1} \Sigma_{u=1}^{m} \alpha(u,m)\Big\}$$
$$= \exp\Big\{-\Big[\Sigma_{m=0}^{T-1} f(0,m) + \Sigma_{i=1}^{n} \Sigma_{u=1}^{t} \Sigma_{m=t}^{T-1} \sigma^i(u,m)\, \varepsilon_u^i + \Sigma_{i=1}^{n} \Sigma_{u=1}^{t\,(-1)} \Sigma_{m=u}^{t-1} \sigma^i(u,m)\, \varepsilon_u^i$$
$$+ \Sigma_{u=1}^{t} \Sigma_{m=t}^{T-1} \alpha(u,m) + \Sigma_{u=1}^{t\,(-1)} \Sigma_{m=u}^{t-1} \alpha(u,m)\Big]\Big\}.$$

Wegen (9.5) können wir weiter schreiben:

$$\breve{p}(t,T) = p(0,T)\cdot \exp\left\{-\Sigma_{i=1}^{n} \Sigma_{u=1}^{t} \left[\Sigma_{m=u}^{T-1} \sigma^i(u,m)\right] \varepsilon_u^i - \Sigma_{u=1}^{t} \Sigma_{m=u}^{T-1} \alpha(u,m)\right\}$$
$$=: p(0,T)\cdot \exp\left\{\Sigma_{u=1}^{t} Y_u^T\right\} \quad \text{mit}$$
$$Y_u^T := -\Sigma_{i=1}^{n} \left[\Sigma_{m=u}^{T-1} \sigma^i(u,m)\right] \varepsilon_u^i - \Sigma_{m=u}^{T-1} \alpha(u,m)$$
$$=: -\Sigma_{i=1}^{n} \hat{\sigma}^i(u,T)\, \varepsilon_u^i - \hat{\alpha}(u,T) \quad \text{, also}$$

(9.8) $$\breve{p}(t,T) = p(0,T)\cdot \exp\left\{ -\Sigma_{i=1}^{n} \Sigma_{u=1}^{t} \hat{\sigma}^i(u,T)\, \varepsilon_u^i - \Sigma_{u=1}^{t} \hat{\alpha}(u,T)\right\}$$

mit

(9.9) $$\hat{\sigma}^i(u,T) := \Sigma_{m=u}^{T-1} \sigma^i(u,m), \quad \hat{\alpha}(u,T) := \Sigma_{m=u}^{T-1} \alpha(u,m).$$

Dabei sind für jedes T die Y_t^T als Funktionen von ε_t unabhängig. Wir haben also die Situation 8.9 vorliegen mit $\breve{S}_t^k = \breve{p}(t,k)$, $\sigma_t^{ki} = -\hat{\sigma}^i(t,k)$, $\mu_t^k = -\hat{\alpha}(t,k)$. Formal müssen wir diese Beziehung auch für $t > k$ haben. Wie in 5.12 erwähnt, nehmen wir dazu an, daß Anlagen mit einem Fälligkeitstermin $T \le T^*$ nach T mit der kurzfristigen Zinsrate weiterverzinst werden. Dann gilt gemäß (5.12b):

$p(t,T) = \exp\{ \Sigma_{m=T}^{t-1} r_m\}$ für $t>T$ und somit $\breve{p}(t,T) = 1/B_T = \breve{p}(T,T)$ für $t>T$, also

$$\breve{p}(t,T) = \breve{p}(T,T) = \breve{p}(0,T)\cdot \exp\left\{\Sigma_{u=1}^{T} Y_u^T\right\} = \breve{p}(0,T)\cdot \exp\left\{\Sigma_{u=1}^{t} Y_u^T\right\} \quad \text{mit}$$
$$Y_u^T := 0 = -\Sigma_{i=1}^{n} \hat{\sigma}^i(u,T)\, \varepsilon_u^i - \hat{\alpha}(u,T) \quad \text{für } u > T.$$

Damit gilt Satz 8.13, und wir erhalten:

9.10 Satz. (a) Es sind äquivalent: (i) der Markt ist arbitragefrei;

(ii) es existiert ein äquivalentes Martingalmaß P*, unter dem also die Prozesse $\{\breve{p}(t,T), 0\le t\le T\}$ für alle $1\le T\le T^*+1$ Martingale sind;

(iii) es existieren reelle meßbare Funktionen ℓ_t, $1 \le t \le T^*$, mit

(9.11) $$\exp\{-\hat{\alpha}(t,T)\}\cdot E\left[\exp\{\ell_t(\varepsilon_t) - \Sigma_{i=1}^n \hat{\sigma}^i(t,T)\, \varepsilon_t^i\}\right] = E\left[\exp\{\ell_t(\varepsilon_t)\}\right] < \infty,\ 1 \le t < T \le T^*+1.$$

(b) Unter der Bedingung (iii) ist $L := \text{const}\cdot\exp\{\Sigma_{t=1}^{T^*} \ell_t(\varepsilon_t)\}$ die Dichte eines Martingalmaßes P* mit $\text{const} = \Pi_{t=1}^{T^*} E\left[\exp\{\ell_t(\varepsilon_t)\}\right]^{-1}$. Unter P* sind $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{T^*}$ wieder unabhängig mit

$P^*\left[\varepsilon_t \in B\right] = E\left[\exp\{\ell_t(\varepsilon_t)\}\right]^{-1} \int_{\{\varepsilon_t\in B\}} \exp\{\ell_t(\varepsilon_t)\}\, dP$ und

$\exp\{\hat{\alpha}(t,T)\} = E^*\left[\exp\{ - \Sigma_{i=1}^n \hat{\sigma}^i(t,T)\, \varepsilon_t^i\}\right]$.

Die Bedingung (ii) heißt **Bewertungsbedingung** (pricing condition), d.h. Existenz eines konsistenten Preisssystems. Die Bedingung (iii) heißt **Driftrestriktion** (drift restriction).
Für t > T wird (9.11) trivial wegen $\hat{\alpha}(t,T) = \hat{\sigma}^i(t,T) = 0$. Machen wir den Ansatz $\ell_t(\varepsilon_t) = -\gamma_t^\top\cdot\varepsilon_t = -\Sigma_{i=1}^n \gamma_t^i\cdot\varepsilon_t^i$, so gilt zumindest eine Richtung von Satz 9.10. Wir machen dazu noch weitere vereinfachende Annahmen:

9.12 Korollar. Seien $\varepsilon_1^1,\dots,\varepsilon_1^n,\dots,\varepsilon_{T^*}^1,\dots,\varepsilon_{T^*}^n$ iid, $\varepsilon := \varepsilon_1^1$, $e^{m(s)} := E\left[e^{-s\cdot\varepsilon}\right] < \infty$ $\forall s \in \mathbb{R}$ und seien $\gamma_t^1,\dots,\gamma_t^n \in \mathbb{R}$ Konstanten. Dann ist der Markt arbitragefrei, wenn gilt:

(9.13) $$\hat{\alpha}(t,T) = \Sigma_{i=1}^n \left[m(\gamma_t^i + \hat{\sigma}^i(t,T)) - m(\gamma_t^i)\right]$$

und es existiert ein Martingalmaß P*, sodaß unter P* gilt: $\varepsilon_1^1,\dots,\varepsilon_1^n,\dots,\varepsilon_{T^*}^1,\dots,\varepsilon_{T^*}^n$ sind unabhängig mit

$$P^*\left[\varepsilon_t^i \in B\right] = \int_{\{\varepsilon\in B\}} e^{-\gamma_t^i\varepsilon - m(\gamma_t^i)}\, dP .$$

Beweis: Aus (9.11) erhalten wir:

$\exp\{\hat{\alpha}(t,T)\} = E\left[\exp\{ -\Sigma_{i=1}^n (\gamma_t^i + \hat{\sigma}^i(t,T))\, \varepsilon_t^i\}\right] / E\left[\exp\{-\Sigma_{i=1}^n \gamma_t^i\cdot\varepsilon_t^i\}\right]$

$= \Pi_{i=1}^n \exp\{m(\gamma_t^i + \hat{\sigma}^i(t,T))\} / \Pi_{i=1}^n \exp\{m(\gamma_t^i)\}$, also $\hat{\alpha}(t,T) = \Sigma_{i=1}^n \left[m(\gamma_t^i + \hat{\sigma}^i(t,T)) - m(\gamma_t^i)\right]$.

Dabei ist $P^*\left[\varepsilon_t^1 \in B^1,\dots,\varepsilon_t^n \in B^n\right] = \Pi_{i=1}^n \left[\int_{\{\varepsilon_t^i\in B_i\}} \exp\{-\gamma_t^i\cdot\varepsilon_t^i\}\, dP / \exp\{m(\gamma_t^i)\}\right]$. []

In der Situation von 9.12 haben wir also ein arbitragefreies Modell für die Zinsstruktur mit den Parametern $\sigma^i(t,T)$, γ_t^i . Dazu kommen noch als vorzugebene Größen die Verteilung der ε_t^i und die Anfangsbedingungen f(0,t). Die Volatilitäten $\sigma^i(t,T)$ können aus den Marktdaten geschätzt werden, wobei besonders der Fall n=1 einfach und wichtig ist. Die Parameter γ_t^i können dann so gewählt werden, daß über die sich daraus ergebenen Größen $\hat{\alpha}(t,T)$, $\alpha(t,T)$ eine gute Anpassung an die Marktdaten erreicht wird. Dabei wird man versuchen, die $\gamma_t^i = \gamma^i$ unabhängig von t zu wählen.

Nun sollen **Normalverteilungsannahmen** gemacht werden. Wir betrachten dazu die Situation:

$\varepsilon_t^i \sim N(0,1)$, dann ist $m(s) = \frac{1}{2}s^2$

und (9.13) wird zu

$\hat{\alpha}(t,T) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[(\gamma_t^i + \hat{\sigma}^i(t,T))^2 - (\gamma_t^i)^2\right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[2 \cdot \gamma_t^i \cdot \hat{\sigma}^i(t,T) + \hat{\sigma}^i(t,T)^2\right]$ also

(9.14) $$\hat{\alpha}(t,T) = \sum_{i=1}^n \left[\gamma_t^i \cdot \hat{\sigma}^i(t,T) + \tfrac{1}{2} \hat{\sigma}^i(t,T)^2\right].$$

Zur Berechnung von $\alpha(t,T)$ benutzen wir die Beziehungen:

$\hat{\alpha}(t,T+1) = \hat{\alpha}(t,T) + \alpha(t,T)$, $\hat{\sigma}^i(t,T+1) = \hat{\sigma}^i(t,T) + \sigma^i(t,T)$.

Dann folgt: $\alpha(t,T) = \hat{\alpha}(t,T+1) - \hat{\alpha}(t,T)$

$= \sum_{i=1}^n \left[\gamma_t^i \cdot \left[\hat{\sigma}^i(t,T) + \sigma^i(t,T)\right] + \frac{1}{2} \left[\hat{\sigma}^i(t,T) + \sigma^i(t,T)\right]^2\right] - \sum_{i=1}^n \left[\gamma_t^i \cdot \hat{\sigma}^i(t,T) + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^i(t,T)^2\right]$

$= \sum_{i=1}^n \left[\gamma_t^i \cdot \sigma^i(t,T) + \frac{1}{2} \left[\sigma^i(t,T) + \hat{\sigma}^i(t,T)\right]^2 - \frac{1}{2} \left[\hat{\sigma}^i(t,T)\right]^2\right]$

$= \sum_{i=1}^n \left[\gamma_t^i \cdot \sigma^i(t,T) + \frac{1}{2} \left[\sigma^i(t,T)^2 + 2\, \sigma^i(t,T) \cdot \hat{\sigma}^i(t,T)\right]\right]$

$= \sum_{i=1}^n \left[\gamma_t^i \cdot \sigma^i(t,T) + \frac{1}{2} \sigma^i(t,T)^2 + \sigma^i(t,T) \cdot \hat{\sigma}^i(t,T)\right]$, also

(9.15) $$\alpha(t,T) = \sum_{i=1}^n \sigma^i(t,T) \cdot \left[\gamma_t^i + \hat{\sigma}^i(t,T+\tfrac{1}{2})\right] \quad \text{für } \varepsilon_t^i \sim N(0,1).$$

mit $\hat{\sigma}^i(t,T+\frac{1}{2}) := \frac{1}{2} \left[\hat{\sigma}^i(t,T) + \hat{\sigma}^i(t,T+1)\right] = \frac{1}{2} \sigma^i(t,T) + \hat{\sigma}^i(t,T)$.

Die Übergang von P zu P* wird wieder durch eine **Girsanov–Transformation** [8.25] beschrieben. Aus 9.12 erhalten wir für die Verteilung von ε_t^i unter P* mit $\gamma := \gamma_t^i$:

$P^*[\varepsilon_t^i \in B] = \int_{\{\varepsilon \in B\}} e^{-\gamma\varepsilon - m(\gamma)}\, dP = \int_{\{\varepsilon \in B\}} e^{-\gamma\varepsilon - \frac{1}{2}\gamma^2}\, dP$

$= \int_B (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\gamma \cdot x - \frac{1}{2}\gamma^2}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \int_B (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}(x+\gamma)^2}\, dx$, also

(9.16) Unter P* gilt: $\varepsilon_1^1,\ldots,\varepsilon_1^n,\ldots,\varepsilon_{T^*}^1,\ldots,\varepsilon_{T^*}^n$ sind unabhängig mit $\varepsilon_t^i \sim N(-\gamma_t^i,1)$; $\tilde{\varepsilon}_t^i := \varepsilon_t^i + \gamma_t^i \sim N(0,1)$.

Für die Dynamik von f(t,T) unter P* ergibt sich aus 9.6 und (9.15):

$f(t,T) = f(0,T) + \sum_{i=1}^n \sum_{u=1}^t \sigma^i(u,T)\, (\tilde{\varepsilon}_u^i - \gamma_u^i) + \sum_{u=1}^t \sum_{i=1}^n \sigma^i(u,T) \cdot \left[\gamma_u^i + \hat{\sigma}^i(u,T+\frac{1}{2})\right]$, also

(9.17) $$f(t,T) = f(0,T) + \sum_{i=1}^n \sum_{u=1}^t \sigma^i(u,T)\, \tilde{\varepsilon}_u^i + \sum_{i=1}^n \sum_{u=1}^t \sigma^i(u,T) \cdot \hat{\sigma}^i(u,T+\tfrac{1}{2}).$$

Ebenso folgt aus (9.8) und (9.14):

$\breve{p}(t,T) = p(0,T) \cdot \exp\left\{ -\sum_{i=1}^n \sum_{u=1}^t \hat{\sigma}^i(u,T)\, (\tilde{\varepsilon}_u^i - \gamma_u^i) - \sum_{u=1}^t \sum_{i=1}^n \left[\gamma_u^i \cdot \hat{\sigma}^i(u,T) + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^i(u,T)^2\right]\right\}$, also

(9.18) $$\breve{p}(t,T) = p(0,T) \cdot \exp\left\{ -\sum_{i=1}^n \sum_{u=1}^t \hat{\sigma}^i(u,T)\, \tilde{\varepsilon}_u^i - \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{u=1}^t \hat{\sigma}^i(u,T)^2 \right\}.$$

Diese Beziehung ist analog zu (8.26). Man sieht, daß die Verteilungne von f(t,T) und $\breve{p}(t,T)$ unter P* nicht mehr von den Driftgrößen $\alpha(t,T)$ bzw. $\hat{\alpha}(t,T)$ abhängen. Hat man für einen

diskontierten Zahlungsanspruch $\breve{X}$ in t: $\breve{X} = f(\breve{p}(t,T))$,

so ergibt sich für die Bewertung $E^*[\ \breve{X}\ ] = E^*[\ f(\breve{p}(t,T))\ ]$, daß diese wie bei der Black–Scholes–Formel nur von den Volatilitäten $\hat{\sigma}^i(u,T)$ bzw. $\sigma^i(u,T)$ abhängt und nicht vom Drift.

Ein Problem bei all diesen Modellen ist, daß nicht garantiert werden kann, daß stets $r_t \geq 0$ gilt.

9.19 Bemerkung. Um unter P* wieder standardisierte Zva (mit Erwartungswert null und Varianz eins) zu haben, mußten wir oben von ε_t^i [(9.17)] zu $\tilde{\varepsilon}_t^t = \varepsilon_t^i + \gamma_t^i$ übergehen. Im allgemeinen kann man die Standardisierung der ε_t^i entweder unter P oder unter P* voraussetzen. Will man dann einmal die Standardisierung der ε_t^i unter dem jeweils anderen Maß haben, so kann man dies immer durch eine lineare Transformation erreichen $\tilde{\varepsilon}_t^i = a_t^i \cdot (\varepsilon_t^i + b_t^i)$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} f(t,T) &= f(0,T) + \Sigma_{i=1}^n \Sigma_{u=1}^t \sigma^i(u,T)\, \varepsilon_u^i + \Sigma_{u=1}^t \alpha(u,T) \\ &= f(0,T) + \Sigma_{i=1}^n \Sigma_{u=1}^t \sigma^i(u,T)\, [\tilde{\varepsilon}_u^i/a_u^i - b_u^i] + \Sigma_{u=1}^t \alpha(u,T) \\ &= f(0,T) + \Sigma_{i=1}^n \Sigma_{u=1}^t \sigma^i(u,T)/a_u^i\, \tilde{\varepsilon}_u^i + \Sigma_{u=1}^t [\alpha(u,T) - \Sigma_{i=1}^n \sigma^i(u,T) \cdot b_u^i]. \end{aligned}$$

Die Größen $\sigma^i(u,T)$ müssen dabei also durch $\tilde{\sigma}^i(u,T) := \sigma^i(u,T)/a_u^i$ ersetzt werden und die Größen $\alpha(u,T)$ durch $\tilde{\alpha}(u,T) := \alpha(u,T) - \Sigma_{i=1}^n \sigma^i(u,T) \cdot b_u^i$.

Es folgt $\hat{\sigma}^i(u,T) = \Sigma_{m=u}^{T-1} \sigma^i(u,m)$ muß ersetzt werden durch $\hat{\tilde{\sigma}}^i(u,T) := \Sigma_{m=u}^{T-1} \tilde{\sigma}^i(u,m) = \hat{\sigma}^i(u,T)/a_u^i$ und $\hat{\alpha}(u,T) = \Sigma_{m=u}^{T-1} \alpha(u,m)$ muß ersetzt werden durch

$\hat{\tilde{\alpha}}(u,T) := \Sigma_{m=u}^{T-1} \tilde{\alpha}(u,m) = \hat{\alpha}(u,T) - \Sigma_{i=1}^n \hat{\sigma}^i(u,T) \cdot b_u^i$.

Wir wollen uns überlegen, daß dabei die Beziehung

$$\exp\{\hat{\alpha}(t,T)\} = E^*[\exp\{-\Sigma_{i=1}^n \hat{\sigma}^i(t,T)\, \varepsilon_t^i\}]$$

in 9.10 sinngemäß erhalten bleibt. Wir haben nämlich

$$\begin{aligned} &\exp\{\hat{\alpha}(t,T)\} = E^*[\exp\{-\Sigma_{i=1}^n \hat{\sigma}^i(t,T)\, \varepsilon_t^i\}] = E^*[\exp\{-\Sigma_{i=1}^n \hat{\sigma}^i(t,T)\, [\tilde{\varepsilon}_t^i/a_t^i - b_t^i]\}] \\ &= E^*[\exp\{-\Sigma_{i=1}^n \hat{\sigma}^i(t,T)/a_t^i\, \tilde{\varepsilon}_t^i - \Sigma_{i=1}^n \hat{\sigma}^i(t,T) \cdot b_t^i\}] \\ &\Leftrightarrow \exp\{\hat{\alpha}(t,T) + \Sigma_{i=1}^n \hat{\sigma}^i(t,T) \cdot b_t^i\} = E^*[\exp\{-\Sigma_{i=1}^n \hat{\sigma}^i(t,T)/a_t^i\, \tilde{\varepsilon}_t^i\}] \Leftrightarrow \\ &\qquad \exp\{\hat{\tilde{\alpha}}(t,T)\} = E^*[\exp\{-\Sigma_{i=1}^n \hat{\tilde{\sigma}}^i(t,T)\, \tilde{\varepsilon}_t^i\}]. \end{aligned}$$

Das Besondere an der Girsanov–Transformation unter Normalverteilungsannahmen ist, daß dabei die Varianz und die Normalverteilungsannahmen erhalten bleiben. []

Aus der Darstellung von $\breve{p}(t,T)$ gewinnen wir auch eine solche für die undiskontierten Preisprozesse $p(t,T)$. Aus $\breve{p}(t,t) = p(t,t)/B_t = 1/B_t$ erhalten wir $p(t,T) = \breve{p}(t,T)/\breve{p}(t,t)$, also mit (9.8):

(9.20) $$p(t,T) = \frac{p(0,T)}{p(0,t)} \cdot \exp\Big\{ -\Sigma_{i=1}^n \Sigma_{u=1}^t [\hat{\sigma}^i(u,T) - \hat{\sigma}^i(u,t)]\, \varepsilon_u^i - \Sigma_{u=1}^t [\hat{\alpha}(u,T) - \hat{\alpha}(u,t)] \Big\}.$$

§10 Spezielle Modelle.

Bei n–Faktor–Modellen zur Beschreibung von Aktienmärkten ist in der Regel die Anzahl n der Faktoren etwa gleich der Anzahl der Wertpapiere. Bei Zinsstrukturmodellen kann man die Anzahl n der Faktoren kleiner wählen. Üblich sind Ein–Faktor– und Zwei–Faktormodelle. Wir untersuchen zunächst **Ein–Faktor–Modelle** und betrachten die folgende Situation:

(10.1) $n=1$, $\sigma(t,T) =: \sigma(T-t)$ mit $\sigma(t) = \sigma\cdot\rho^t$, $\sigma \neq 0$, $\ell_t(x) = -\gamma\cdot x$,

die Zva ε_t sind iid mit $\varepsilon := \varepsilon_1$, $E\left[e^{-s\cdot\varepsilon}\right] = e^{m(s)} < \infty$, $s\in\mathbb{R}$.

Mit der Wahl $\ell_t(x) = \gamma\cdot x$ werden also nur spezielle Martingalmaße betrachtet. Man schreibt auch $\rho = e^{-\lambda}$. Mit $\rho = 1$ erfaßt man das **Ho/Lee–Modell** (1986). Bei $\rho < 1$ spricht man **exponentiell abfallenden Varianz–Modellen** (Heath, Jarrow, Morton 1990, El Karoui/Saada 1992). Dann ergibt sich

(10.2) $f(t,T) = f(0,T) + \sum_{u=1}^{t} \sigma(T-u)\,\varepsilon_u + \sum_{u=1}^{t} \alpha(u,T)$.

$\hat\sigma(u,T) = \sum_{m=u}^{T-1} \sigma(m-u) = \sum_{t=0}^{T-u-1} \sigma(t) =: \hat\sigma(T-u)$ mit $\hat\sigma(T) := \sum_{t=0}^{T-1} \sigma(t) = \sum_{t=0}^{T-1} \sigma\cdot\rho^t$. Also:

(10.3) $\hat\sigma(u,T) = \hat\sigma(T-u)$ (zeitliche Homogenität).

(10.4) $\hat\sigma(T) = \sum_{t=0}^{T-1} \sigma(t) = \sigma\cdot q(T)$ mit $q(T) := \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t$,

$q(T) = \frac{1}{1-\rho}\left[1-\rho^T\right]$ für $\rho < 1$; $q(T) = T$ für $\rho = 1$.

Die zeitliche Homogenität von $\sigma(\cdot)$ impliziert also die von $\hat\sigma(\cdot)$ und auch die von $\alpha(\cdot)$ und $\hat\alpha(\cdot)$, wie wir jetzt sehen werden. Gemäß (9.11)/(9.13) ergibt sich für $1 \le t \le T \le T^*$:

(10.5) $\hat\alpha(t,T) =: \hat\alpha(T-t) = m(\gamma + \hat\sigma(T-t)) - m(\gamma)$.

Zur Berechnung von $\alpha(\cdot)$ schreiben wir in Übereinstimmung mit (9.9):

(10.6) $\alpha(t,T) = \hat\alpha(t,T+1) - \hat\alpha(t,T) = \hat\alpha(T-t+1) - \hat\alpha(T-t) =: \alpha(T-t)$.

Dann folgt mit (9.9) auch $\hat\alpha(T-t) = \sum_{m=t}^{T-1} \alpha(m-t) = \sum_{m=0}^{T-t-1} \alpha(m)$, also

(10.7) $\hat\alpha(t) = \sum_{m=0}^{t-1} \alpha(m)$.

Für die $f(t,T)$ ergibt sich somit:

$\sum_{u=1}^{t} \alpha(u,T) = \sum_{u=1}^{t} \alpha(T-u) = \sum_{m=T-t}^{T-1} \alpha(m) = \hat\alpha(T) - \hat\alpha(T-t)$, also

(10.8) $f(t,T) = f(0,T) + \sum_{u=1}^{t} \sigma(T-u)\,\varepsilon_u + \hat\alpha(T) - \hat\alpha(T-t)$,

Damit gilt wegen (9.8), (10.4), (10.5):

(10.9) $\breve p(t,T) = p(0,T)\cdot\exp\left\{-\sum_{u=1}^{t}\left[\hat\sigma(T-u)\,\varepsilon_u + \hat\alpha(T-u)\right]\right\}$.

Speziell erhalten wir aus (10.8) und $r_t = f(t,t)$:

(10.10) $r_t = f(0,t) + \sum_{u=1}^{t} \sigma(t-u)\,\varepsilon_u + \hat\alpha(t)$.

Wir wollen nun die **Dynamik von r_t** weiter studieren und erhalten:

$r_{t-1} = f(0,t-1) + \sum_{u=1}^{t-1} \sigma \cdot \rho^{t-1-u}\, \varepsilon_u + \hat{\alpha}(t-1),$

$r_t = f(0,t) + \sigma\, \varepsilon_t + \rho \sum_{u=1}^{t-1} \sigma \cdot \rho^{t-1-u}\, \varepsilon_u + \hat{\alpha}(t)$

$= f(0,t) + \sigma\, \varepsilon_t + \rho \cdot \left[r_{t-1} - f(0,t-1) - \hat{\alpha}(t-1)\right] + \hat{\alpha}(t) =: \rho \cdot r_{t-1} + \sigma \cdot \varepsilon_t + \delta(t)$.

Damit folgt $r_t - r_{t-1} = -(1-\rho) \cdot r_{t-1} + \sigma \cdot \varepsilon_t + \delta(t).$

10.11 Satz. In der Situation von (10.1) gilt:

(10.12a) $\Delta r_t := r_t - r_{t-1} = (1-\rho) \cdot \{\bar{r}_t - r_{t-1}\} + \sigma \cdot \varepsilon_t$ für $\rho < 1$,

(10.12b) $\Delta r_t = \sigma \cdot \varepsilon_t + \delta(t)$ für $\rho = 1$ mit

$\bar{r}_t = \frac{\delta(t)}{1-\rho}$, $\delta(t) := f(0,t) - \rho \cdot f(0,t-1) + \hat{\alpha}(t) - \rho \cdot \hat{\alpha}(t-1).$

In speziellen Situationen kann $\bar{r}_t$ unabhängig von t sein. Dann ist hat man eine zeitdiskrete Form des **Vasicek**–**Modell**s. Ist $\bar{r}_t$ zeitabhängig, so hat man eine zeitdiskrete Form des **Hull**–**White**–**Modell**s. Durch diese Zeitabhängigkeit kann man beliebige Anfangswerte f(0,t) berücksichtigen. Ist im Fall $\rho < 1$ $\bar{r}_t \approx \bar{r}$ unabhängig von t, so sieht man $\bar{r}$ als **Durchschnittszins** an. Dabei ist das Vorzeichen von $\bar{r} - r_{t-1}$ das Vorzeichen des Drifts $(1-\rho) \cdot \{\bar{r} - r_{t-1}\}$. Man kann sich eine Kraft vorstellen, die in Richtung $\bar{r}$ (bzw. $\bar{r}_t$) zeigt. Dann ist $(1-\rho)$ der **Mean**–**Reversion**–Faktor und σ die Volatilität. Man spricht auch von **Mean**–**Reverting**–Modellen.

Nun soll eine sogenannte **affine Struktur** hergeleitet werden. Wir gehen aus von [vgl. (10.8), (10.10)]:

$r_t = f(0,t) + \sum_{u=1}^{t} \sigma \cdot \rho^{t-u}\, \varepsilon_u + \hat{\alpha}(t)$ sowie

$f(t,T) = f(0,T) + \sum_{u=1}^{t} \sigma \cdot \rho^{T-u}\, \varepsilon_u + \hat{\alpha}(T) - \hat{\alpha}(T-t)$

$= f(0,T) + \rho^{T-t} \sum_{u=1}^{t} \sigma \cdot \rho^{t-u}\, \varepsilon_u + \hat{\alpha}(T) - \hat{\alpha}(T-t)$

$= f(0,T) + \rho^{T-t} \cdot \left[r_t - f(0,t) - \hat{\alpha}(t)\right] + \hat{\alpha}(T) - \hat{\alpha}(T-t)$

$= f(0,T) + \rho^{T-t} \cdot r_t - \rho^{T-t} \cdot [f(0,t) + \hat{\alpha}(t)] + \hat{\alpha}(T) - \hat{\alpha}(T-t)$

$=: \rho^{T-t} \cdot r_t + c_0(t,T).$

Als Folgerung ergibt sich :

$p(t,T) = \exp\{-\sum_{m=t}^{T-1} f(t,m)\} = \exp\{-\sum_{m=t}^{T-1} [\rho^{m-t} \cdot r_t + c_0(t,m)]\}$

$= \exp\{-\sum_{m=t}^{T-1} c_0(t,m)\} \cdot \exp\{-q(T-t) \cdot r_t\}.$

Dabei ist:

$$c_0(t,T) = f(0,T) - \rho^{T-t} \cdot [f(0,t) + \hat{\alpha}(t)] + \hat{\alpha}(T) - \hat{\alpha}(T-t).$$

Es folgt:

$$\Sigma_{u=t}^{T-1} c_0(t,u) = \sum_{u=t}^{T-1} \left[f(0,u) - \rho^{u-t} \cdot \left[f(0,t) + \hat{\alpha}(t)\right] + \hat{\alpha}(u) - \hat{\alpha}(u-t)\right]$$
$$= \Sigma_{u=t}^{T-1} f(0,u) - \Sigma_{u=t}^{T-1} \rho^{u-t} \cdot [f(0,t) + \hat{\alpha}(t)] + \Sigma_{u=t}^{T-1} [\hat{\alpha}(u) - \hat{\alpha}(u-t)]\text{, also}$$

(10.13)
$$A(t,T) := \Sigma_{u=t}^{T-1} c_0(t,u)$$
$$= \Sigma_{u=t}^{T-1} [f(0,u) + \hat{\alpha}(u) - \hat{\alpha}(u-t)] - q(T-t) \cdot [f(0,t) + \hat{\alpha}(t)]$$
$$\text{mit } \hat{\alpha}(u) = m(\gamma+\hat{\sigma}(u)) - m(\gamma).$$

Dabei wurde (10.5) eingesetzt. Also ergibt sich

10.14. Satz. In der Situation von (10.1) liegt eine affine Struktur vor, d.h. es gilt:

$$f(t,T) = c_1(t,T) \cdot r_t + c_0(t,T) \text{ mit } c_1(t,T) = \rho^{T-t},\ c_0(t,T) \text{ wie oben;}$$
$$p(t,T) = \exp\{- q(T-t) \cdot r_t - A(t,T)\} \quad \text{mit } A(t,T) \text{ wie in (10.13).}$$

In 10.14 haben wir also die angenehme Situation, daß p(t,T) eine bekannte Funktion von r_t ist. Liegen Normalverteilungsannahmen vor, gilt also $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ und $m(s) = \frac{1}{2}s^2$, so erhält man in (10.13):

(10.15)
$$\hat{\alpha}(t) = \gamma\hat{\sigma}(t) + \tfrac{1}{2}\,\hat{\sigma}(t)^2 = \hat{\sigma}(t) \cdot [\gamma + \tfrac{1}{2}\,\hat{\sigma}(t)]\,,\ \text{falls } \varepsilon_t \sim N(0,1).$$

10.16 Bemerkung. Die Voraussetzung $\sigma(t) = \sigma \cdot \rho^t$ in (10.1) ist auch notwendig für 10.14.
Setzen wir in (10.1) lediglich $\sigma(t,T) = \sigma(T-t)$ voraus sowie $f(t,T) = c_1(t,T) \cdot r_t + c_0(t,T)$, so erhalten wir aus (10.2):

$$f(t,T) = \Sigma_{u=1}^{t} \sigma(T-u)\, \varepsilon_u + \text{const} = c_1(t,T) \cdot r_t + c_0(t,T)$$
$$= c_1(t,T) \cdot f(t,t) + c_0(t,T) = c_1(t,T) \cdot \left[\Sigma_{u=1}^{t} \sigma(t-u)\, \varepsilon_u + \text{const}\right] + c_0(t,T)$$
$$= \Sigma_{u=1}^{t} c_1(t,T) \cdot \sigma(t-u)\, \varepsilon_u + \text{const.}$$

Wir haben also die Situation $0 = D + \Sigma_{u=1}^{t} D_u \cdot \varepsilon_u$ mit $D_u := c_1(t,T) \cdot \sigma(t-u) - \sigma(T-u)$.

Nimmt man nun noch o. E. an ,daß die ε_t nicht deterministisch sind, dann folgt:

$0 = \text{Var}[D + \Sigma_{u=1}^{t} D_u \cdot \varepsilon_u] = \Sigma_{u=1}^{t} \text{Var}[D_u \cdot \varepsilon_u] = \Sigma_{u=1}^{t} D_u^2 \cdot \text{Var}[\varepsilon_u]$. Wegen $\text{Var}[\varepsilon_u] > 0$ folgt

$0 = D_u = c_1(t,T) \cdot \sigma(t-u) - \sigma(T-u)$. Setzt man speziell $T = t+1$, $t-u = m$, ergibt sich:

$\sigma(m+1) = c_1(t,t+1) \cdot \sigma(m)$, $\sigma(1) = c_1(t,t+1) \cdot \sigma(0)$. Setzen wir noch o.E. $\sigma(0) \neq 0$ voraus und $\rho := \sigma(1)/\sigma(0)$, so ergibt sich schließlich: $\sigma(m+1) = \rho \cdot \sigma(m)$. []

10.17 Bemerkung. Für die Dynamik von r_t ergab sich:

(10.18) $\quad r_t = \rho \cdot r_{t-1} + \delta(t) + \sigma \cdot \varepsilon_t$.

In der Theorie der Zeitreihen sagt man, daß $\{r_t\}$ ein **AR(1)–Prozeß** ist, d.h. eine autoregressive Zeitreihe der Ordnung 1, besonders wenn $\delta(t) = \delta$ unabhängig von t ist. Auch für diese Eigenschaft ist es notwendig, daß $\sigma(t) = \sigma \cdot \rho^t$ in (10.1)

Setzen wir in (10.1) lediglich $\sigma(t,T) = \sigma(T-t)$ voraus sowie (10.18), so erhalten wir mit $r_t = f(t,t)$ aus (10.2)/(10.10):

$$r_t = \rho \cdot \left[\sum_{u=1}^{t-1} \sigma(t-1-u)\, \varepsilon_u + \text{const}\right] + \delta(t) + \sigma \cdot \varepsilon_t$$

$$= \sum_{u=1}^{t} \sigma(t-u)\, \varepsilon_u + \text{const}$$

Durch Koeffizientenvergleich wie in 10.16 erhält man dann:

$$\sigma(0) = \sigma,\ \sigma(m) = \rho \cdot \sigma(m-1).\ \square$$

Nun wollen wir weiter spezialisieren und die folgende Situation zu Grunde legen, die auch im eigentlichen **Ho/Lee–Modell** vorliegt.

(10.19) $\quad \varepsilon_t \in \{\lambda, -1/\lambda\}$ für ein $\lambda \neq 0$, $\varepsilon := \varepsilon_1$.

Ein W–Maß P braucht zunächst noch nicht vorliegen. Nun wird ein Martingalmaß P* gesucht, unter dem die ε_t standardisierte iid Zva sind. Dann gibt es zunächst eine eindeutige Lösung

(10.20) $\quad p^* = \dfrac{1}{1 + \lambda^2}$

von $p^* \cdot \lambda - (1-p^*) \cdot \frac{1}{\lambda} = 0$. Es folgt: $p^* \cdot \lambda^2 + (1-p^*) \cdot \frac{1}{\lambda^2} = 1$.

Wir wählen also (Ω und) P* so, daß gilt:

(10.21) $\quad$ Unter P* sind $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{T^*}$ iid Zva mit $P^*[\varepsilon_t = \lambda] = p^* = 1 - P^*[\varepsilon_t = -1/\lambda]$.

Dann folgt durch Wahl von p*: $E^*[\varepsilon] = 0$, $Var^*[\varepsilon] = E^*[\varepsilon^2] = 1$,

$$E^*[e^{-s\varepsilon}] = p^* \cdot e^{-s\lambda} + (1-p^*) \cdot e^{+s/\lambda} =: e^{m^*(s)}.$$

Die Wahl des Wertebereichs der ε_t wird durch das folgende Lemma motiviert.

10.22 Lemma. Nimmt die Zva ε die beiden Werte a,b an mit $a \neq b$ und gelten $E\varepsilon = 0$, $Var[\varepsilon] = 1$, so folgt: $\quad b = -\frac{1}{a}$, $a \neq 0$.

Wir setzen wieder an: $f(t,T) = f(0,T) + \sum_{u=1}^{t} \sigma(T-u) \cdot \varepsilon_u + \sum_{u=1} \alpha(T-u)$. Dann folgt wie in §9:

(10.23) $\quad \breve{p}(t,T) = p(0,T) \cdot \exp\left\{-\sum_{u=1}^{t} \left[\hat{\sigma}(T-u)\, \varepsilon_u + \hat{\alpha}(T-u)\right]\right\}.$

Die **Driftrestriktion** ergibt sich wieder aus 9.10 oder direkt aus $E^*[\breve{p}(1,T)] = \breve{p}(0,T)$, also:

(10.24) $\quad \exp\{\hat{\alpha}(T-1)\} = E^*[\exp\{-\hat{\sigma}(T-1)\, \varepsilon\}]$.

Es folgt:

(10.24)* $\hat{\alpha}(t) = m^*(\hat{\sigma}(t))$ für $t \le T^*$.

Damit haben wir ein arbitragefreies Zinsstrukturmodell. Um den Zusammenhang zu den vorherigen Untersuchungen herzustellen, kann man natürlich auch von einem W–Maß P ausgehen, das die Marktentwicklung beschreiben soll, mit:

(10.25) Unter P sind $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{T^*}$ iid Zva mit $P[\varepsilon_t = \lambda] = p = 1 - P[\varepsilon_t = -1/\lambda]$ mit $0<p<1$.

Es folgt: $E[\varepsilon] = p\cdot\lambda - (1-p)\cdot\frac{1}{\lambda}$ und somit $p = \frac{1 + \lambda\cdot E\varepsilon}{1 + \lambda^2}$,

$\mathrm{Var}[\varepsilon] = p\cdot\lambda^2 + (1-p)\cdot\frac{1}{\lambda^2} - E[\varepsilon]^2 = p\cdot(1-p)\cdot[\frac{1 + \lambda^2}{\lambda}]^2 = (1 + \lambda\cdot E\varepsilon)\cdot(1 - \frac{1}{\lambda}\cdot E\varepsilon)$.

Aus Schätzungen für $E[\varepsilon]$ und $\mathrm{Var}[\varepsilon]$ erhält man dann eine Schätzung für λ und p.
Sucht man dann ein Martingalmaß mit $\ell_t(x) = -\gamma\cdot x$, dann ist

$$E[e^{-\gamma\varepsilon}\cdot\varepsilon] = p\cdot e^{-\gamma\lambda}\cdot\lambda - (1-p)\cdot e^{\gamma/\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda},\quad E[e^{-\gamma\varepsilon}] = p\cdot e^{-\gamma\lambda} + (1-p)\cdot e^{\gamma/\lambda}.$$

Wählt man nun γ speziell so, daß gilt $E[e^{-\gamma\varepsilon}\cdot\varepsilon] = 0$ und setzt man $p' := p\cdot e^{-\gamma\lambda}/E[e^{-\gamma\varepsilon}]$, so folgt:
$p'\cdot\lambda - (1-p')\cdot\frac{1}{\lambda} = 0$ und damit $p' = p^*$ wegen der Eindeutigkeit von p^*, also:

$$p\cdot e^{-\gamma\lambda}/E[e^{-\gamma\varepsilon}] = \frac{1}{1 + \lambda^2} = p^*,\quad (1-p)\cdot e^{\gamma/\lambda}/E[e^{-\gamma\varepsilon}] = 1 - p^*,$$

$$dP^*/dP = E[\exp\{-\gamma\varepsilon\}]^{-T^*}\cdot\mathbf{\Pi}_{1\le t\le T^*}\exp\{-\gamma\varepsilon_t\}$$

$$= \mathbf{\Pi}_{1\le t<T^*}\varphi(\varepsilon_t)\quad\text{mit}\quad \varphi(x) = \begin{cases} p^*/p & \text{for } x = \lambda \\ (1\text{-}p^*)/(1-p) & \text{for } x = -1/\lambda \end{cases}.$$

Also gilt (10.21). Aus 9.10 erhält man nun die gleiche Driftbedingung wie oben:

$$\exp\{\hat{\alpha}(T)\} = E[\exp\{-\gamma\varepsilon\}\cdot\exp\{-\hat{\sigma}(T)\,\varepsilon\}] \,/\, E[\exp\{-\gamma\varepsilon\}] = E^*[\exp\{-\hat{\sigma}(T)\,\varepsilon\}]$$

$$= \frac{1}{1 + \lambda^2}\cdot\exp\{-\hat{\sigma}(T)\,\lambda\} + \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2}\cdot\exp\{\hat{\sigma}(T)\,\lambda^{-1}\} = p^*\cdot\exp\{-\hat{\sigma}(T)\,\lambda\} + (1-p^*)\cdot\exp\{\hat{\sigma}(T)\,\lambda^{-1}\}.$$

Es soll nun die **Vollständigkeit** des Marktes gezeigt werden. Dazu starten wir von:

$$\breve{p}(t,T) = \breve{p}(t-1,T)\cdot\exp\{-\hat{\sigma}(T-t)\,\varepsilon_t - \hat{\alpha}(T-t)\}$$

Sei o.E. $\sigma > 0$, $\lambda > 0$, sonst muß man die Ungleichungen umkehren. Wir haben dann

$\exp\{-\hat{\sigma}(\cdot)\,\lambda\} < 1 < \exp\{\hat{\sigma}(\cdot)/\lambda\}$ also

$\exp\{-\hat{\sigma}(\cdot)\,\lambda - \hat{\alpha}(\cdot)\} < \exp\{\hat{\sigma}(\cdot)/\lambda - \hat{\alpha}(\cdot)\}$ und nach (10.24)

$p^*\cdot\exp\{-\hat{\sigma}(\cdot)\,\lambda - \hat{\alpha}(\cdot)\} + (1-p^*)\cdot\exp\{\hat{\sigma}(\cdot)/\lambda - \hat{\alpha}(\cdot)\} = 1$, somit

(10.26) $\exp\{-\hat{\sigma}(\cdot)\,\lambda - \hat{\alpha}(\cdot)\} < 1 < \exp\{\hat{\sigma}(\cdot)/\lambda - \hat{\alpha}(\cdot)\}$.

Damit haben wir etwa für $T = \hat{T} = T^*+1$ die gleiche Situation wie beim Binomialmodell:

$\breve{p}(t,\hat{T}) = \breve{p}(t-1,\hat{T})\cdot I_t$ mit

(10.27) $I_t := \exp\{-\hat{\sigma}(\hat{T}-t)\,\varepsilon_t - \hat{\alpha}(\hat{T}-t)\} \in \{u_t, d_t\}$ und

$u_t := \exp\{\hat{\sigma}(\hat{T}-t)/\lambda - \hat{\alpha}(\hat{T}-t)\} > 1,\quad d_t := \exp\{-\hat{\sigma}(\hat{T}-t)\,\lambda - \hat{\alpha}(\hat{T}-t)\} < 1.$

Ein Unterschied besteht darin, daß die u_t, d_t jetzt von t abhängen. Man zeigt aber ebenso, daß der Markt mit dem $\hat{T}$–Bond als Wertpapier ⌈neben dem Sparbuch⌉ vollständig ist:
Zu einer beliebigen Zva $\breve{X}$ existieren ein x und ein Plan ξ mit $\breve{X} = \breve{V}^{\xi}_{T*}(x)$, also $V^{\xi}_{T*}(x) = B(T^*)\cdot\breve{X}$. Damit existieren zu einer beliebigen $\mathfrak{F}_{T*}$–meßbaren Zva X ein x und ein Plan ξ mit $X = V^{\xi}_{T*}(x)$, wobei $\mathfrak{F}_{T*} = \sigma(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{T*})$.

10.28 Satz. In der Situation (10.19) – (10.23) ist der Markt mit dem Sparbuch und dem $\hat{T}$–Bond vollständig ist (bei einem Horizont T*). Damit ist der Markt erst recht vollständig, wenn man die T–Bonds für $T < \hat{T}$ mit als Wertpapiere hinzunimmt.

Nun soll noch ein **Zwei–Faktor–Modell** vorgestellt werden ⌈vgl. Heath, Jarrow, Morton 1990⌉. Wir wählen

(10.29) $\quad n = 2,\ \sigma^i(t,T) = \sigma_i\cdot\rho_i^{T-t}$ mit $\rho_1 = 1,\ \rho_2 = \rho < 1.$

Wegen $f(t,T) = f(0,T) + \Sigma_{i=1}^{2}\,\Sigma_{u=1}^{t}\,\sigma^i(u,T)\,\varepsilon_u^i + \Sigma_{u=1}^{t}\,\alpha(u,T)$ erhalten wir

(10.30) $\quad f(t,T) = f(0,T) + \Sigma_{u=1}^{t}\,\sigma_1\,\varepsilon_u^1 + \Sigma_{u=1}^{t}\,\sigma_2\cdot\rho^{T-u}\,\varepsilon_u^2 + \Sigma_{u=1}^{t}\,\alpha(u,T).$

Dabei ist der erste Faktor ein **langfristiger** (long–term) **Faktor**, insofern als alle ε_u^1 gleichmäßig auf die Dynamik von f(t,T) einwirken. Der zweite Faktor ist ein **kurzfristiger** (short–term) **Faktor**, insofern als die ε_u^2 mit großen Abständen T–u oder t–u einen Koeffizient haben, der exponentiell schnell gegen Null geht. Für $\sigma_1 = 0 \neq \sigma_2$ und $\sigma_2 = 0 \neq \sigma_1$ erhalten wir als Speziallfall ein Ein–Faktor–Modell. Es ergibt sich wieder

(10.31) $\quad r_t = f(t,t) = f(0,T) + \Sigma_{u=1}^{t}\,\sigma_1\,\varepsilon_u^1 + \Sigma_{u=1}^{t}\,\sigma_1\cdot\rho^{t-u}\,\varepsilon_u^2 + \Sigma_{u=1}^{t}\,\alpha(u,t)$

sowie $\quad \breve{p}(t,T) = p(0,T)\cdot\exp\left\{-\Sigma_{i=1}^{2}\,\Sigma_{u=1}^{t}\,\hat{\sigma}^i(u,T)\,\varepsilon_u^i - \Sigma_{u=1}^{t}\,\hat{\alpha}(u,T)\right\}$

mit $\quad \hat{\sigma}^i(u,T) = \Sigma_{m=u}^{T-1}\,\sigma^i(u,m)$, also

(10.32) $\quad \hat{\sigma}^1(u,T) = \sigma_1\cdot(T-u) =: \hat{\sigma}^1(T-u),\quad \hat{\sigma}^2(u,T) = \sigma_2\cdot\frac{1-\rho^{T-u}}{1-\rho} =: \hat{\sigma}^2(T-u).$

Also folgt

(10.33) $\quad \breve{p}(t,T) = p(0,T)\cdot\exp\left\{-\Sigma_{u=1}^{t}\,\sigma_1\cdot(T-u)\cdot\varepsilon_u^1 - \Sigma_{u=1}^{t}\,\sigma_2\cdot\frac{1-\rho^{T-u}}{1-\rho}\cdot\varepsilon_u^2 - \Sigma_{u=1}^{t}\,\hat{\alpha}(u,T)\right\}.$

Zur Berechnung von $\hat{\alpha}(\cdot)$ machen wir die folgende Annahme:

(10.34) $\quad$ Seien $\varepsilon_1^1,\varepsilon_1^2,\ldots,\varepsilon_{T*}^1,\varepsilon_{T*}^2$ iid mit $\varepsilon := \varepsilon_1^1$,

$\ell_t(x) = -\gamma^1\cdot x^1 - \gamma^2\cdot x^2,\ E\lceil e^{-s\cdot\varepsilon}\rceil = e^{m(s)} < \infty,\ s\in\mathbb{R}.$

Dann ergibt sich gemäß (9.13):

(10.35) $\hat{\alpha}(t,T) = m(\gamma^1+\hat{\sigma}^1(T-t)) - m(\gamma^1) + m(\gamma^2+\hat{\sigma}^2(T-t)) - m(\gamma^2) =: \hat{\alpha}(T-t).$

Es folgt dann wie oben

(10.7) $\hat{\alpha}(t) = \Sigma_{m=0}^{t-1} \alpha(m).$

Wir haben also wieder ein **zeithomogenes Modell** vorliegen.

Für die undiskontierten Größen erhalten wir

$$p(t,T) = \exp\{ -\Sigma_{m=t}^{T-1} f(t,m)\}$$

$$= \exp\left\{- \Sigma_{m=t}^{T-1} \left[f(0,m) + \Sigma_{u=1}^{t} \sigma_1 \varepsilon_u^1 + \Sigma_{u=1}^{t} \sigma_2 \cdot \rho^{m-u} \varepsilon_u^2 + \Sigma_{u=1}^{t} \alpha(u,m)\right]\right\}.$$

Damit folgt

$$-\ln p(t,T) = \Sigma_{m=t}^{T-1} \Sigma_{u=1}^{t} \sigma_1 \varepsilon_u^1 + \Sigma_{m=t}^{T-1} \Sigma_{u=1}^{t} \sigma_2 \cdot \rho^{m-u} \varepsilon_u^2 + \Sigma_{m=t}^{T-1} \left[f(0,m) + \Sigma_{u=1}^{t} \alpha(u,m)\right]$$

$$= \Sigma_{u=1}^{t} \Sigma_{m=t}^{T-1} \sigma_1 \varepsilon_u^1 + \Sigma_{u=1}^{t} \Sigma_{m=t}^{T-1} \sigma_2 \cdot \rho^{m-u} \varepsilon_u^2 + \Sigma_{m=t}^{T-1} f(0,m) + \Sigma_{u=1}^{t} \Sigma_{m=t}^{T-1} \alpha(u,m)$$

$$= \Sigma_{u=1}^{t} \sigma_1 \cdot (T-t) \varepsilon_u^1 + \Sigma_{u=1}^{t} \sigma_2 \cdot \frac{\rho^{t-u} - \rho^{T-u}}{1 - \rho} \cdot \varepsilon_u^2 + \Sigma_{m=t}^{T-1} f(0,m) + \Sigma_{u=1}^{t} \Sigma_{m=t}^{T-1} \alpha(u,m), \text{ also}$$

(10.36) $-\ln p(t,T) =$

$$\sigma_1 \cdot (T-t) \cdot \Sigma_{u=1}^{t} \varepsilon_u^1 + \sigma_2 \cdot \frac{\rho^t - \rho^T}{1- \rho} \Sigma_{u=1}^{t} \rho^{-u} \cdot \varepsilon_u^2 + \Sigma_{m=t}^{T-1} f(0,m) + \Sigma_{u=1}^{t} \Sigma_{m=t}^{T-1} \alpha(u,m).$$

Setzt man nun $Var(\varepsilon) = 1$ voraus, dann erhält man:

$$Var(\ln p(t,T)) = \sigma_1^2 \cdot (T-t)^2 \cdot t + \left[\sigma_2 \cdot \frac{\rho^t - \rho^T}{1- \rho}\right]^2 \Sigma_{u=1}^{t} \rho^{-2u}$$

$$= \sigma_1^2 \cdot (T-t)^2 \cdot t + \left[\sigma_2 \cdot \frac{\rho^t - \rho^T}{1- \rho}\right]^2 \cdot \rho^{-2} \cdot (\rho^{-2t} - 1)/(\rho^{-2} - 1)$$

$$= \sigma_1^2 \cdot (T-t)^2 \cdot t + \left[\sigma_2 \cdot \frac{\rho^t - \rho^T}{1- \rho}\right]^2 \cdot (\rho^{-2t} - 1)/(1 - \rho^2), \text{ also}$$

(10.37) $Var(\ln p(t,T)) = \sigma_1^2 \cdot (T-t)^2 \cdot t + \sigma_2^2 \cdot \left[\frac{1 - \rho^{T-t}}{1 - \rho}\right]^2 \cdot \frac{1 - \rho^{2t}}{1 - \rho^2} =: \bar{\sigma}(t,T)^2$ für $Var(\varepsilon) = 1$.

Den entsprechenden Ausdruck bei einem Ein–Faktor–Modell mit $Var(\varepsilon_u) = 1$ erhalten wir dann durch Spezialisierung.Macht man wieder **Normalverteilungsannahmen**, setzt also die ε_t als normalverteilt an, so ist auch ln p(t,T) wieder normalverteilt mit der berechneten Varianz. In dieser Situation (9.15) lassen sich auch die $\hat{\alpha}(t,T)$ leicht berechnen und damit die Erwartungswerte von ln p(t,T).

Die gleichen Überlegungen kann man für die diskontierten Größen $\breve{p}(t,T)$ machen.

§ 11 Konvergenz gegen ein zeitstetiges Modell.

Es wird wieder das (zeithomogene) Ein–Faktor–Modell aus §10 zu Grunde gelegt. Wie in beim Binomialmodell für Optionen in §6 soll jetzt die Zeitspanne zwischen zwei möglichen Transaktionen nicht mehr gleich eins sein, sondern immer kürzer gewählt werden. Als Periodenlänge wählen wir jetzt 1/n. Der Markt wird also zu den Zeitpunkten t/n beobachtet und kontrolliert. Wenn wir die tatsächliche Zeit berücksichtigen wollen, müssen wir also immer den Zeitparameter t durch t/n ersetzen. Wir schreiben dann etwa $p^n(\frac{t}{n},\frac{T}{n})$ statt p(t,T).

Mit kleineren Periodenlängen müssen auch kleinere Sprunghöhen für die Prozesse angesetzt werden. Gehen wir wieder zu den diskontierten Prozessen $\breve{p}^n(\frac{t}{n},\frac{T}{n}) = p^n(\frac{t}{n},\frac{T}{n})/B^n_{t/n}$ über, so machen wir den

11.1 Ansatz $$\breve{p}^n(\tfrac{t}{n},\tfrac{T}{n}) = p^n(0,\tfrac{T}{n})\cdot\exp\{-\textstyle\sum_{u=1}^{t}\left[\hat{\sigma}^n(\frac{u}{n},\frac{T}{n})\,\varepsilon_u + \hat{\alpha}^n(\frac{u}{n},\frac{T}{n})\right]\}$$

$$\hat{\sigma}^n(\tfrac{u}{n},\tfrac{T}{n}) = \hat{\sigma}^n(\tfrac{T-u}{n}) = n^{-\frac{1}{2}}\cdot\hat{\sigma}(\tfrac{T-u}{n})$$ mit einer absolut stetigen Funktion $\hat{\sigma}(\cdot) > 0$.

In der Situation von (10.1) ist $\hat{\sigma}(\cdot) = \sigma\cdot q(\cdot)$ absolut stetig, sogar stetig differenzierbar. Die zeitliche Homogenität von $\hat{\sigma}$ ist für das Folgende nicht nötig.

11.2 Bemerkung. Wollen wir einen **Vergleich mit §6** ziehen, so hatten wir dort:

$$\breve{S}^n_t = S^n_0\cdot\exp\{\textstyle\sum_{u=1}^{t}\left[2\cdot U^n\cdot J_u - U^n\right]\}$$

mit $U^n = n^{-\frac{1}{2}}\cdot\sigma\cdot T^*$.

Unter dem Martingalmaß P* waren die J_u iid und es galt:

$$\exp\{U^n\} = E^*\left[\exp\{2\cdot U^n\cdot J^n_u\}\right] .$$

Dann wurde die schwache Konvergenz der Verteilung von $Y^n_t = \ln\breve{S}^n_t - \ln S^n_0$ gegen $N(-\frac{1}{2}\sigma^2\cdot T^*,\sigma^2\cdot T^*)$ unter P* gezeigt. Daraus folgte die Konvergenz der Bewertungsformel $x^n = E^*[\breve{X}]$. In §6 wurde die Abhängigkeit von n weitgehend unterdrückt. $\square$

Wir werden die Konvergenz gegen ein zeitstetiges Modell unter einem Martingalmaß P* studieren. Wir nehmen also an, daß daß das zu Grunde liegende W–Maß P* ist. Es soll gelten:

(11.3) Unter P* seien die $\{\varepsilon_t\}$ iid Zva mit

(11.4) $$E^*[\varepsilon_t] = 0,\ Var^*[\varepsilon_t] = 1,\ |\varepsilon_t| \le c \quad \text{für ein } c > 0.$$

Wir schreiben $\varepsilon := \varepsilon_1$ und es gelte die **Driftbedingung**:

$$\exp\{\hat{\alpha}^n(\tfrac{u}{n},\tfrac{T}{n})\} = E^*\left[\exp\{-\hat{\sigma}^n(\tfrac{u}{n},\tfrac{T}{n})\cdot\varepsilon\}\right].$$

Dies ist die Situation von Modell (10.21). Die Beschränktheit der ε_t haben wir nur aus Bequemlichkeit vorausgesetzt. Damit wird der Fall $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ ausgeschlossen.

In der Situation (9.16) muß man die $\tilde{\varepsilon}_t = \varepsilon_t - \gamma_t$ zu Grunde legen (vgl. Bemerkung 9.19). Wir haben also für jedes feste n ein Marktmodell. Nun ergibt sich:

$\exp\{\hat\alpha^n(\frac{u}{n},\frac{T}{n})\} = E^*[\exp\{-\hat\sigma^n(\frac{u}{n},\frac{T}{n})\cdot\varepsilon\}] = E^*[\exp\{-n^{-\frac12}\cdot\hat\sigma(\frac{T-u}{n})\cdot\varepsilon\}] =: \exp\{\hat\alpha^n(\frac{T-u}{n})\}.$

Es folgt:

(11.5) $\qquad \ln \breve p^n(\frac{t}{n},\frac{T}{n}) - \ln p^n(0,\frac{T}{n}) = -\,n^{-\frac12}\,\Sigma_{u=1}^t\,\hat\sigma(\frac{T-u}{n})\cdot\varepsilon_u - \Sigma_{u=1}^t\,\hat\alpha^n(\frac{T-u}{n}).$

Wir wollen nun den Grenzübergang $n\to\infty$ so vornehmen, daß gilt:

(11.6) $\qquad \frac{t}{n}\to t',\ \frac{T}{n}\to T',$

und studieren zuerst den **deterministischen Term**.

$\Sigma_{u=1}^t\,\hat\alpha^n(\frac{T-u}{n}) = \Sigma_{u=1}^t\,\ln E^*[\exp\{-n^{-\frac12}\cdot\hat\sigma(\frac{T-u}{n})\cdot\varepsilon\}]$

$=: \Sigma_{u=1}^t\,\ln E^*[1 - n^{-\frac12}\cdot\hat\sigma(\frac{T-u}{n})\cdot\varepsilon + \frac12\,n^{-1}\cdot\hat\sigma(\frac{T-u}{n})^2\cdot\varepsilon^2 + R_n],$

also wegen (11.4):

(11.7) $\qquad \Sigma_{u=1}^t\,\hat\alpha^n(\frac{T-u}{n}) = \Sigma_{u=1}^t\,\ln\{1 + \frac12\,n^{-1}\cdot\hat\sigma(\frac{T-u}{n})^2 + E^*[R_n]\}.$

Dabei gilt für den Restterm mit $a := -n^{-\frac12}\cdot\hat\sigma(\frac{T-u}{n})$:

$|E^*[R_n]| = |E^*[e^{a\varepsilon} - 1 - a\varepsilon - \frac12 a^2\varepsilon^2]| = E^*[|\Sigma_{j=3}^\infty \frac{1}{j!}\,a^j\,\varepsilon^j|]$

$\le E^*[|a|^3\cdot|\varepsilon|^3\cdot\ \Sigma_{j=3}^\infty \frac{1}{j!}\,|a\varepsilon|^{j-3}] = E^*[\,|a|^3\cdot|\varepsilon|^3\cdot\ \Sigma_{j=0}^\infty \frac{1}{(j+3)!}\,|a\varepsilon|^j]$

$\le E^*[|a|^3\cdot|\varepsilon|^3\cdot e^{|a\varepsilon|}]$. Also

$$|E^*[R_n]| \le n^{-3/2}\cdot\hat\sigma(\frac{T-u}{n})^3\cdot E^*[|\varepsilon|^3\cdot\exp\{n^{-\frac12}\cdot\hat\sigma(\frac{T-u}{n})\cdot\varepsilon\}].$$

Wegen (11.6) und der Stetigkeit von $\hat\sigma(\cdot)$ können wir dabei annehmen:

(11.8) $\qquad \sup_{n,u\le t}\frac{T-u}{n} < \infty,\ \ \sup_{n,u\le t}\hat\sigma(\frac{T-u}{n}) < \infty.$

Dann folgt

(11.9) $\qquad |E^*[R_n]| \le n^{-3/2}\cdot C_1$ für eine Konstante $0 < C_1 < \infty$.

11.10 Lemma. $|\ln(1+x+R) - x| \le \frac{|R|}{1-|R|} + \frac12\,x^2$ für $1+R > 0$, $x > 0$.

Beweis. $\ln(1+x+R) - x = {}_1\!\int^{1+x+R}\frac{1}{y}\,dy - x = {}_1\!\int^{1+x}(\frac{1}{y}-1)\,dy + {}_{1+x}\!\int^{1+x+R}\frac{1}{y}\,dy$

wegen $x = {}_1\!\int^{1+x} 1\,dy$. Nun erhalten wir

$|\ln(1+x+R) - x| \le {}_1\!\int^{1+x}\frac{y-1}{y}\,dy + |{}_{1+x}\!\int^{1+x+R}\frac{1}{1+x-|R|}\,dy|$

$\qquad \le {}_1\!\int^{1+x} y-1\,dy + \frac{|R|}{1+x-|R|} = \frac12(y-1)^2\Big|_1^{1+x} + \frac{|R|}{1+x-|R|}.$ []

Aus (11.9), 11.10 ergibt sich nun für genügend großes n

$$\Sigma_{u=1}^{t} \left| \ln\{1 + \tfrac{1}{2}\, n^{-1} \cdot \hat{\sigma}(\tfrac{T-u}{n})^2 + E^*\lceil R_n \rceil\} - \tfrac{1}{2}\, n^{-1} \cdot \hat{\sigma}(\tfrac{T-u}{n})^2 \right|$$
$$\le \Sigma_{u=1}^{t} \left[\frac{|E^*\lceil R_n \rceil|}{1 - |E^*\lceil R_n \rceil|} + \frac{1}{4}\, n^{-2}\, \hat{\sigma}(\tfrac{T-u}{n})^4 \right]$$
$$\le \Sigma_{u=1}^{t} \left[\frac{|E^*\lceil R_n \rceil|}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\, n^{-2}\, \hat{\sigma}(\tfrac{T-u}{n})^4 \right]$$
$$\le \Sigma_{u=1}^{t} \left[2\, n^{-3/2} \cdot C_1 + \frac{1}{4}\, n^{-2} \cdot C_2 \right] \le \frac{t}{n} \cdot \left[2\, n^{-1/2} \cdot C_1 + \frac{1}{4}\, n^{-1} \cdot C_2 \right]$$
$$\le C_3 \cdot \left[2\, n^{-1/2} \cdot C_1 + \frac{1}{4}\, n^{-1} \cdot C_2 \right] \to 0$$

mit $t \le C_3 \cdot n$ für ein gewisses C_3. Mit (11.7) folgt nun

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{u=1}^{t}\, \hat{\alpha}^n(\tfrac{T-u}{n}) = \lim_{n\to\infty} \Sigma_{u=1}^{t} \ln\{1 + \tfrac{1}{2}\, n^{-1} \cdot \hat{\sigma}(\tfrac{T-u}{n})^2 + E^*\lceil R_n \rceil\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}\, n^{-1} \cdot \Sigma_{u=1}^{t}\, \hat{\sigma}(\tfrac{T-u}{n})^2.$$

Wegen (11.6) und der Stetigkeit von $\hat{\sigma}(\cdot)$ haben wir
$n^{-1} \cdot \Sigma_{u=1}^{t}\, \hat{\sigma}(\frac{T-u}{n})^2 = \frac{t}{n}\, t^{-1} \cdot \Sigma \ldots = n^{-1}\, \Sigma_{u=1}^{t}\, \hat{\sigma}(T' - \frac{u}{n})^2 + o(1)$.
Mit $f(s) := \hat{\sigma}(T' - s)$ ist dabei $n^{-1} \cdot \Sigma_{u=1}^{t}\, f(\frac{u}{n})^2$ eine Riemannsche Summe zu $\int_0^{t/n} f(s)^2\, ds$ und damit auch eine Riemannsche Summe zu $\int_0^{t'} f(s)^2\, ds$ bis auf einen Term der Ordnung $o(1)$. Wir haben somit schließlich:

11.11 Lemma. $\lim_{n\to\infty} \Sigma_{u=1}^{t}\, \hat{\alpha}^n(\frac{T-u}{n}) = \frac{1}{2} \int_0^{t'} \hat{\sigma}(T' - s)^2\, ds.$

Der Limes des stochastischen Terms wird ein stochastisches Integral sein. Dazu

11.12 Definition. Ein reeller stochasticher Prozeß $\{W_t,\ t \ge 0\}$ heißt (1–dim.) standardisierte **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozeß**, falls gilt:

(i) $\{W_t\}$ hat stetige Pfade $t \mapsto W_t(\omega)\ \ \forall\, \omega \in \Omega$;

(ii) $W_0 = 0$;

(iii) $\{W_t\}$ hat unabhängige Zuwächse, d.h. für $k \in \mathbb{N}$, $0 := t_0 < t_1 < \ldots < t_k$ sind die Zva $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ unabhängig;

(iv) $W_{t+h} - W_t \sim N(0,h)$ für $h > 0$, $\{W_t\}$ hat also insbesondere stationäre Zuwächse.

Wir wollen das sogenannte Invarianzprinzip von Donsker anwenden. Dazu schreiben wir:

(11.13a) $S_t^n := \Sigma_{u=1}^{t}\, \varepsilon_u$ (Irrfahrt);

(11.13b) $Y_s^n := n^{-\frac{1}{2}} \cdot S_{\lceil ns \rceil}$;

(11.13c) $Z_s^n := \sqrt{n} \cdot [\frac{1}{n} S_{\lceil ns \rceil} + (s - \frac{\lceil ns \rceil}{n}) \cdot \varepsilon_{\lceil ns \rceil + 1}],\ \frac{\lceil ns \rceil}{n} \le s < \frac{\lceil ns \rceil + 1}{n}.$

Dann gilt offenbar $Y^n_{m/n} = Z^n_{m/n} = n^{-\frac{1}{2}} \cdot S_m$. Zwischen diesen Werten wird bei $\{Z^n_s\}$ linear interpoliert. Sei ferner $C[0,T_o]$ die Menge der stetigen Funktion von $[0,T_o]$ nach $\mathbb{R}$. Dieser Raum wird mit der Supremumsnorm versehen, die die gleichmäßige Konvergenz induziert. Dann ist die Abbildung

$$\Omega \ni \omega \mapsto (W_s(\omega),\ 0 \le s \le T_o) \in C[0,T_o]$$

wohl definiert, wenn wir $(W_s(\omega),\ 0 \le s \le T_o)$ mit der Abbildung $[0,T_o] \ni s \mapsto W_s(\omega)$ identifizieren. Dann gilt der folgende Satz

11.14 Invarianzprinzip (Donsker). Sei T_o beliebig. Ist dann $I : C[0,T_o] \mapsto \mathbb{R}$ ein stetiges Funktional, so konvergiert $I(Z^n_s, 0\le s\le T_o)$ gegen $I(W_s, 0\le s\le T_o)$ in Verteilung.

Ein Beispiel wäre die folgende Variante des zentralen Grenzwertsatzes:

$I(Z^n_s, 0\le s\le T_o) := Z^n_t$ konvergiert in Verteilung gegen $W_t \sim N(0,t)$.

Wir werden aber mit $\{Y^n_s\}$ statt mit $\{Z^n_s\}$ arbeiten müssen. Dieser Prozeß hat keine stetigen Pfade mehr, aber es gilt:

(11.15) $\quad |Y^n_s - Z^n_s| \le c/\sqrt{n}$ mit $|\varepsilon_m| \le c$.

Wir wollen nun zeigen: Der stochastischen Term konvergiert in Verteilung gegen ${}_0\int^{t'} \hat{\sigma}(T'-s)\, dW_s$.

Das stochastische Integral $\int ...dW$ kann zunächst nicht pfadweise erklärt werden, da ein typischer Pfad der Brownschen Bewegung in jedem Intervall von unbeschränkter Variation ist. Im vorliegenden Fall, wo der Integrand

$$f(s) := \hat{\sigma}(T'-s)$$

absolut stetig ist, also $f(s) = f(0) + {}_0\int^{s} \frac{df}{du}(u)\, du$ gilt, kann man das stochastische Integral über die partielle Integration definieren gemäß:

(11.16) $$ {}_0\int^{t'} f(s)\, dW_s := f(t')\cdot W_{t'} - {}_0\int^{t'} W_s\, df(s) := f(t')\cdot W_{t'} - {}_0\int^{t'} W_s \frac{df}{ds}(s)\, ds.$$

[Das stochastische Integral läßt sich auch auf diese Weise erklären, wenn f nur von beschränkter Variation ist und sich somit als Differenz von monotonen Funktionen, etwas maßdefinierenden Funktionen schreiben läßt.] Für unseren stochastischen Term haben wir zunächst:

$$n^{-\frac{1}{2}} \sum_{u=1}^{t} \hat{\sigma}(\tfrac{T-u}{n})\cdot\varepsilon_u = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{u=1}^{t} \hat{\sigma}(T' - \tfrac{u}{n})\cdot\varepsilon_u + o_{P*}(1),$$

wenn wir $o_{P*}(1)$ für eine Größe mit $o_{P*}(1) \to 0$ n.W. (unter P*) schreiben. Denn es gilt:

$$E[o_{P*}(1)^2] = E\left[\left[n^{-\frac{1}{2}} \sum_{u=1}^{t} (\hat{\sigma}(\tfrac{T-u}{n}) - \hat{\sigma}(T' - \tfrac{u}{n}))\cdot\varepsilon_u\right]^2\right] = \frac{t}{n}\frac{1}{t}\sum_{u=1}^{t} (\hat{\sigma}(\tfrac{T-u}{n}) - \hat{\sigma}(T' - \tfrac{u}{n}))^2 \to 0$$

Mit dem diskreten Analogon zur partiellen Integration hat man nun:

(11.17) $$n^{-\frac{1}{2}} \sum_{u=1}^{t} \hat{\sigma}(T'-\tfrac{u}{n})\cdot\varepsilon_u = n^{-\frac{1}{2}} \hat{\sigma}(T'-\tfrac{t}{n})\cdot S_t - n^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{t-1} [\hat{\sigma}(T' - \tfrac{m-1}{n}) - \hat{\sigma}(T' - \tfrac{m}{n})]\cdot S_m.$$

Da für jedes $T_o>0$ das Funktional $C[0,T_o] \ni g \mapsto {}_0\int^{t'} g(s)\, df(s)$ stetig ist bzgl. gleichmäßiger Konvergenz, folgt aus 11.14

(11.18) $\quad {}_0\int^{t'} Z_s^n\, df(s)$ konvergiert in Verteilung gegen ${}_0\int^{t'} W_s\, df(s)$.

Nun haben wir aber wegen (11.15):

$$ {}_0\int^{t'} Z_s^n\, df(s) = {}_0\int^{t/n} Z_s^n\, df(s) + o_{P*}(1) = {}_0\int^{t/n} Y_s^n\, df(s) + o_{P*}(1) = \Sigma_{m=0}^{t-1}\ {}_{m/n}\int^{(m+1)/n} \ldots + o_{P*}(1) $$
$$ = \Sigma_{m=0}^{t-1} Y_{m/n}^n \left[f(\tfrac{m+1}{n}) - f(\tfrac{m}{n})\right] + o_{P*}(1) = n^{-\frac{1}{2}} \Sigma_{m=0}^{t-1} S_m \cdot \left[\hat\sigma(T' - \tfrac{m+1}{n}) - \hat\sigma(T' - \tfrac{m}{n})\right] + o_{P*}(1). $$

In Hinblick auf (11.18) haben wir damit

$$ n^{-\frac{1}{2}} \Sigma_{m=0}^{t-1} S_m \cdot \left[\hat\sigma(T' - \tfrac{m+1}{n}) - \hat\sigma(T' - \tfrac{m}{n})\right] \quad \text{konvergiert in Verteilung gegen } {}_0\int^{t'} W_s\, df(s). $$

Nach dem Zentralen Grenwertsatz konvergiert überdies $n^{-\frac{1}{2}}\, \hat\sigma(T'- \tfrac{t}{n}) \cdot S_t = (t/n)^{\frac{1}{2}} \cdot \hat\sigma(T'- \tfrac{t}{n}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} S_t$ gegen $\hat\sigma(T'-t') \cdot W_{t'}$. Somit erhalten wir schließlich für den stochastischen Term

$$ n^{-\frac{1}{2}} \cdot \Sigma_{m=1}^{t}\ \hat\sigma(\tfrac{T-m}{n}) \cdot \varepsilon_m = n^{-\frac{1}{2}}\ \hat\sigma(T' - \tfrac{t}{n}) \cdot S_t - n^{-\frac{1}{2}} \Sigma_{m=0}^{t-1} S_m \cdot \left[\hat\sigma(T' - \tfrac{m+1}{n}) - \hat\sigma(T' - \tfrac{m}{n})\right] + o_{P*}(1) $$

mit (11.16) folgende Aussage $\left[\hat\sigma(T'-t') \cdot W_{t'} - {}_0\int^{t'} W_s\, df(s) = {}_0\int^{t'} \hat\sigma(T'-s)\, dW_s\right]$:

11.19 Lemma $n^{-\frac{1}{2}} \cdot \Sigma_{m=1}^{t}\ \hat\sigma(\tfrac{T-m}{n}) \cdot \varepsilon_m$ konvergiert in Verteilung gegen ${}_0\int^{t'} \hat\sigma(T'-s)\, dW_s$.

Da ferner die schwache Konvergenz erhalten bleibt bei Anwendung einer stetigen Funktion [vgl. W.th. I 17.8], erhält man insgesamt:

11.20 Satz. Existiert $\lim p(0,T/n) =: p(0,T')$, so konvergiert $\breve p^n(\tfrac{t}{n},\tfrac{T}{n})$ in Verteilung gegen
$$ \breve p(t',T') := p(0,T') \cdot \exp\{- {}_0\int^{t'} \hat\sigma(T'-s)\, dW_s - \tfrac{1}{2}\, {}_0\int^{t'} \hat\sigma^2(T'-s)\, ds\} . $$

Aus $\breve p^n(\tfrac{t}{n},\tfrac{t}{n}) = p^n(\tfrac{t}{n},\tfrac{t}{n})/B_{t/n}^n = 1/B_{t/n}^n$ folgt nun:

11.21 Korollar. Existiert $\lim p(0,t/n) =: p(0,t')$, so konvergiert $B_{t/n}^n$ in Verteilung gegen
$$ B_{t'} := \frac{1}{p(0,t')} \cdot \exp\{ {}_0\int^{t'} \hat\sigma(t'-s)\, dW_s + \tfrac{1}{2}\, {}_0\int^{t'} \hat\sigma^2(t'-s)\, ds\} . $$

Wegen $p^n(\tfrac{t}{n},\tfrac{T}{n}) = \breve p^n(\tfrac{t}{n},\tfrac{T}{n}) \cdot B_{t/n}^n$ ergibt sich mit einem ähnlichen Beweis wie für 11.20, 11,21 für den undiskontierten Preis–Prozeß die folgende Aussage:

11.22 Korollar. Unter den Voraussetzungen von 11.20/21 konvergiert $p^n(\tfrac{t}{n},\tfrac{T}{n})$ in Verteilung gegen
$$ p(t',T') := \frac{p(0,T')}{p(0,t')} \cdot \exp\{- {}_0\int^{t'} [\hat\sigma(T'-s) - \hat\sigma(t'-s)]\, dW_s - \tfrac{1}{2}\, {}_0\int^{t'} [\hat\sigma^2(T'-s) - \hat\sigma^2(t'-s)]\, ds\}. $$

Die Aussage für den deterministische Term ergibt sich direkt aus 11.11. Beim Beweis für den stochastischen Term muß man jetzt $f(s) := \hat{\sigma}(T'-s) - \hat{\sigma}(t'-s)$ setzen.
Bemerkenswert ist, daß im zeitstetigen Limes nur noch der Parameter $\hat{\sigma}(\cdot)$ auftritt und nicht mehr die Verteilung der ε_t.

11.23 Bemerkung. Definiert man einen zeitstetigen Prozeß

$$\{ \breve{p}^n(t',T') := \breve{p}^n(\lceil nt' \rceil/n, \lceil nT' \rceil/n) , t' \geq 0 \},$$

so haben wir hier lediglich gezeigt, daß die eindimensionalen Randverteilungen gegen die von $\{p(0,T')\cdot\exp\{Z_{t'}(T')\}, t'\geq 0\}$ konvergieren. □

Im Limes haben wir ein zeitstetiges Modell erhalten; wir schreiben jetzt t,T (statt t',T') für beliebige reelle Zeitpunkte. Der Ausdruck in 11.20 hat als zeitdiskretes Analogon den Ausdruck (9.18) [, falls man dort n=1 und $\hat{\sigma}(u,T) = \hat{\sigma}(T-u)$ setzt]. In Analogie zu (10.9) schreiben wir jetzt

(11.24) $\breve{p}(t,T) =: p(0,T)\cdot\exp\{-{}_0\int^t \hat{\sigma}(T-s)\, dW_s - {}_0\int^t \hat{\alpha}(T-s)\, ds\}$ mit $\hat{\alpha}(s) = \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(s)$.

Nach Voraussetzung ist $\hat{\sigma}$ absolut stetig; wir können also in Analogie zu (10.4) schreiben:

(11.25) $\hat{\sigma}(s) =: {}_0\int^s \sigma(u)\, du$.

Dann sieht man leicht, daß auch $\hat{\sigma}^2$ absolut stetig ist mit $\hat{\sigma}(s)^2 = 2\cdot{}_0\int^s \sigma(u)\,\hat{\sigma}(u)\, du$. Somit erhält man in Analogie zu (10.7):

(11.26) $\hat{\alpha}(s) = {}_0\int^s \alpha(u)\, du$ mit $\alpha(s) = \sigma(s)\cdot\hat{\sigma}(s)$.

Diese Beziehung ist analog zu (9.15), wenn man berücksichtigt, daß wir jetzt ein Martingalmaß P* zu Grunde gelegt haben. Somit brauchen wir keine Transfomation $P \mapsto P^*$ vorzunehmen und können in (9.15) $\gamma_t^i = 0$ setzen.

Setzt man $\hat{\sigma}(s) = \sigma\cdot s$, so erhält man das zeitstetige Ho–Lee–Modell, das sich als Limes des zeitdiskreten Ho–Lee–Modells ergibt. Hier kann man den Ausdruck in 11.22 weiter ausrechnen. Man erhält dann ${}_0\int^t [\hat{\sigma}(T-s) - \hat{\sigma}(t-s)]\, dW_s = {}_0\int^t \sigma\cdot[T-t]\, dW_s = \sigma\cdot[T-t]\, W_t$ sowie
${}_0\int^t [\hat{\sigma}^2(T-s) - \hat{\sigma}^2(t-s)]\, ds = \sigma^2\cdot{}_0\int^t [(T-s)^2 - (t-s)^2]\, ds = \sigma^2\cdot{}_0\int^t [(T-s)^2 - (t-s)^2]\, ds$
$= \sigma^2\cdot T\cdot(T-t)\cdot t$. Somit gilt **im zeitstetigen Ho–Lee–Modell**:

(11.27) $p(t,T) := \dfrac{p(0,T)}{p(0,t)}\cdot\exp\{-\sigma\cdot(T-t)\, W_t - \frac{1}{2}\sigma^2\cdot T\cdot(T-t)\cdot t\}$.

Im zeitstetigen Modell heißen **f(t,T) Terminzinsraten**, falls in Analogie zu (9.3) gilt:

(11.28) $p(t,T) = \exp\{-{}_t\int^T f(t,u)\, du\}$.

Für das zeitstetige Modell macht man den Ansatz:

(11.29) $f(t,u) = f(0,u) + {}_0\int^t \sigma(u-s)\, dW_s + {}_0\int^t \alpha(u-s)\, ds$

Wie in §9 erhält man daraus $\left[\text{mit } n=1 \text{ und } \hat{\sigma}(u,T) = \hat{\sigma}(T-u)\right]$ die Beziehung in 11.20, wenn man in §9 die stochastischen Summen $\sum \ldots\ \varepsilon_u$ durch das stochastische Integral $\int \ldots\ dW_u$ und die deterministischen Summen $\sum \ldots$ durch das deterministische Lebesgue–Integral $\int \ldots du$ ersetzt.
Mit $r_t := f(t,t)$ erhält man ein Modell für die Zinsrate.

Im Ho/Lee–Modell war $\hat{\sigma}(\cdot)$ linear und $\sigma(\cdot)$ konstant. Dies überträgt sich auf den stetigen Prozeß. In diesem Fall ist $f(\cdot .T)$ ohne den Begriff des stochastischen Integrals definierbar gemäß

(11.30) $$f(t,T) = f(0,T) + \sigma \cdot W_t + \int_0^t \alpha(T-s)\, ds .$$

Also ist f(t,T) dann normalverteilt.
Man kann den Terminzinsratenprozeß auch direkt als Grenzwert der entsprechenden Größen im zeitdiskreten Modell bekommen (Heath, Jarrow & Morton 1992).

§ 12 Bewertung von Zinsderivaten.

Wir betrachten Finanzmärkte wie in §5. Die d Wertpapiere können dabei ausschließlich T–Bonds sein, können aber auch zum Teil auch andere Wertpapiere (Aktien/Devisen) sein. Es wird nötig sein, für jeden Zeitpunkt t eine faire Prämie festlegen.

Gilt $X = V_T^\xi(x)$, so heißt $\pi_t := V_t^\xi(x)$ **faire Prämie in t** für den Zahlungsanspruch X in T.

In der Situation $X = V_T^\xi(x)$ weiß man, daß genau der Betrag π_t genügt, um ohne Risiko Zahlungsanspruch X zu erreichen (dublizieren),. Man braucht nur das gleiche zu machen, wie ein Marktteilnehmer, der mit dem Startkapital x von 0 an X dublizieren will und in t gerade das Kapital π_t hat. Sei nun P* ein Martingalmaß. Ist Ω endlich oder allgemeiner ist ξ beschränkt oder allgemeiner gilt $\xi \in \Xi^1(P)$, so ist nach 7.5 $\{\breve{V}_m^\xi(x),\ m \ge 0\}$ ein Martingal. Dabei kann Ω endlich gewählt werden, wenn in einem n–Faktor–Modell die ε_m nur endlich viele Werte annehmen. Aus der Martingaleigenschaft folgt: $\breve{V}_t^\xi(x) = E^*[\breve{V}_T^\xi(x)\,|\,\mathfrak{F}_t] = E^*[\breve{X}\,|\,\mathfrak{F}_t]$ mit $\breve{X} = X/B_T$, also:

(12.1) $$V_t^\xi(x) = B_t \cdot E^*[\breve{X}\,|\,\mathfrak{F}_t] = E^*[\exp\{-\Sigma_{u=t}^{T-1} r_t\} \cdot X\,|\,\mathfrak{F}_t] =: \Pi_t(\breve{X}).$$

[Ist der Markt unvollständig und ist X nicht erreichbar, so kann man $\Pi_t(\breve{X})$ ebenfalls als Preis rechtfertigen mit Argumenten wie in §8.] Aus der Martingal–Eigenschaft von $\{\hat{p}(t,T),\ t \ge 0\}$ ergibt sich [auch bei unvollständigen Märkten]:

(12.2) $$p(t,T) = B_t \cdot E^*[1/B_T\,|\,\mathfrak{F}_t] = E^*[\exp\{-\Sigma_{u=t}^{T-1} r_t\}\,|\,\mathfrak{F}_t].$$

Es soll ein sogenannter **Numerairewechsel** vorgenommen werden, bei dem B_t durch p(t,T) ersetzt wird. Dabei ist B_t der Wert z.Zt. t eines Euro, den man zu Beginn, also z.Zt. 0 hat, und p(t,T) der Wert z.Zt. t eines Euro, den man am Ende , also z.Zt. T hat. Dann wird $\breve{V}_t^\xi(x) = V_t^\xi(x)/B_t$ ersetzt durch

(12.3) $${}^T V_t^\xi(x) := V_t^\xi(x)/p(t,T)$$

und ein W–Maß $\tilde{P}_T$ auf $\mathfrak{F}_T$ gesucht, sodaß $\{{}^T V_t^\xi(T),\ 0 \le t \le T\}$ ein $\tilde{P}_T$–Martingal ist. Die Lösung ist:

12.4 Definition. Das W–Maß $\tilde{P}_T[A] := E^*[\mathbf{1}_A/B_T] \,/\, E^*[1/B_T]$ auf $\mathfrak{F}_T$ heißt **Forward–Maß**; dabei sei $\tilde{E}_T[...] := \int ...d\tilde{P}_T$.

12.5 Lemma. $\tilde{E}_T[X\,|\,\mathfrak{F}_t] = E^*[X/B_T\,|\,\mathfrak{F}_t] \,/\, E^*[1/B_T\,|\,\mathfrak{F}_t]$ für jede nach unten beschränkte Zva X.

Beweis: Sei $A \in \mathfrak{F}_t$. Dann hat man mit $\tilde{P} := \tilde{P}_T$, $B := B_T$, $c := 1/E^*[1/B]$:

$${}_A\!\int X\, d\tilde{P} = c\ {}_A\!\int X/B\, dP^* = c\ {}_A\!\int E^*[X/B\,|\,\mathfrak{F}_t]\, dP^*$$

$$= c\ {}_A\!\int E^*[1/B\,|\,\mathfrak{F}_t]^{-1} \cdot E^*[X/B\,|\,\mathfrak{F}_t] \cdot E^*[1/B\,|\,\mathfrak{F}_t]\, dP^*$$

$$= c\ {}_A\!\int E^*[1/B\,|\,\mathfrak{F}_t]^{-1} \cdot E^*[X/B\,|\,\mathfrak{F}_t] \cdot 1/B\, dP^* = {}_A\!\int E^*[1/B\,|\,\mathfrak{F}_t]^{-1} \cdot E^*[X/B\,|\,\mathfrak{F}_t]\, d\tilde{P}.\ \square$$

12.6 Bemerkung. Die Forderung, daß $\{{}^{T}V_t^{\xi}(x),\ 0\le t\le T\}$ unter $\tilde{P}_T$ ein Martingal ist, ist gleichbedeutend damit, daß $\{p(0,T)\cdot {}^{T}V_t^{\xi}(x),\ 0\le t\le T\}$ unter $\tilde{P}_T$ ein Martingal ist. Nun ist

$$p(0,T)\cdot {}^{T}V_t^{\xi}(x) = V_t^{\xi}(x)/V_t^{*} \quad \text{mit } V_t^{*} := p(t,T)/p(0,T).$$

Dabei ist V_t^{*} der Wert in t eines Euro, den man in 0 nicht auf das Sparbuch investiert, sondern in T–Bonds. Bei der Wahl des Diskontfaktor wird also das Sparbuch durch ein anderes Wertpapier ersetzt, hier durch T–Bonds. Allgemeiner ist ein Numeraire gegeben durch $V_t^{\xi^*}(1)$, solange nur stets $V_t^{\xi^*}(1) > 0$ gilt. Damit sind offenbar auch die beiden Spezialfälle $V_t^{\xi^*}(1) = B_t$ und $V_t^{\xi^*}(1) = V_t^{*}$ erfaßt. $\square$

Dann folgt mit (12.2): $\tilde{E}_T[X\,|\,\mathfrak{F}_t] = E^*[X/B_T\,|\,\mathfrak{F}_t] \,/\, E^*[1/B_T\,|\,\mathfrak{F}_t] = E^*[X/B_T\,|\,\mathfrak{F}_t]\cdot B_t \,/\, p(t,T)$
$= V_t^{\xi}(x)/p(t,T)$. Da $\{\tilde{E}_T[X\,|\,\mathfrak{F}_t],\ t\ge 0\}$ stets ein Martingal unter $\tilde{P}_T$ ist, erhalten wir wie gewünscht:

12.7 Lemma. Für jeden Zahlungsanpruch X in T mit $E^*[\,|\tilde{X}|\,] < \infty$ ($\Leftrightarrow \tilde{E}_T[\,|X|\,] < \infty$) gilt:

$${}^{T}V_t^{\xi}(x) = \tilde{E}_T[X\,|\,\mathfrak{F}_t]\ ,\ t\ge 0, \text{ d.h.}$$

$$\{{}^{T}V_t^{\xi}(x),\ 0\le t\le T\} \text{ ist ein } \tilde{P}_T\text{–Martingal mit } {}^{T}V_T^{\xi}(T) = X.$$

Forwardkontrakte

Forwardgeschäfte laufen nach folgendem Schema: Käufer und Verkäufer schließen einen Forwardkontrakt, wobei der Käufer die Verpflichtung auf sich nimmt, in T eine festgelegte Ware (Portfolio von Finanztiteln) mit einem aktuellen Wert von W_T zu einem **Terminpreis** $F_t(W_T)$ abzunehmen, der z.Zt. t < T festgelegt und z.Zt. T (Fälligkeitsdatum des Vertrages) bezahlt wird, somit als $\mathfrak{F}_t$–meßbar angenommen wird. Man sagt dann, daß der Käufer (bzw. der Verkäufer) **eine lange (bzw. kurze) Position** hat.

Es muß also z.Zt. t nichts bezahlt werden, um einen Forwardkontrakt einzugehen, aber im Gegensatz zur Option ist es durchaus möglich, daß der Käufer des Forward z. Zt. T einen Verlust realisieren muß. Der Käufer ist also bei Fälligkeit verpflichtet, die Ware zum vereinbarten Preis abzunehmen, genauso wie der Verkäufer verpflichtet ist, die Ware zum vereinbarten Preis zu liefern. Zwischen Vertragsabschluß und Fälligkeit finden weder Zahlungen noch weitere Lieferungen von Finanztiteln statt. Dann ergibt sich als Zahlungsanspruch: $X = W_T - F_t(W_T)$. Gemäß (12.1), (12.2) hat man:

Der Preis in t ist $B_t\cdot E^*[(W_T - F_t(W_T))/B_T\,|\,\mathfrak{F}_t]$

$= B_t\cdot E^*[W_T/B_T\,|\,\mathfrak{F}_t] - B_t\cdot F_t(W_T)\cdot E^*[1/B_T\,|\,\mathfrak{F}_t]$

$= B_t\cdot E^*[W_T/B_T\,|\,\mathfrak{F}_t] - F_t(W_T)\cdot p(t,T)$.

Damit der Preis in t gleich null gewählt werden kann, muß also gelten:

(12.8) $\qquad F_t(W_T) = B_t \cdot E^*[W_T/B_T \mid \mathfrak{F}_t] \;/\; p(t,T) = \Pi_t(\breve{W}_T) \;/\; p(t,T).$

Mit Hilfe der Forwardmaßes erhält man:

(12.8)* $\qquad F_t(W_T) = \tilde{E}_T[W_T \mid \mathfrak{F}_t]\ .$

Diese Formel rechtfertigt den Namen Forward–Maß.

$$\overrightarrow{\quad t \qquad\qquad T \qquad\qquad \hat{T} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad} \; t$$

Hier soll speziell der Fall behandelt werden, daß es sich bei der in Frage kommenden Ware um einen $\hat{T}$–Bond handelt, also haben wir: $W_T = p(T,\hat{T})$. Dann ergibt sich:

(12.9) $\qquad F(t,T,\hat{T}) = \dfrac{p(t,\hat{T})}{p(t,T)}$ ist der sogenannte **Terminpreis (Forwardpreis)**.

Denn es ist wegen der Martingaleigenschaft von $\{\breve{p}(t,\hat{T}),,\ t\geq 0\}$ unter P*:

$F_t(p(T,\hat{T})) = B_t \cdot p(t,T)^{-1} \cdot E^*[\breve{p}(T,\hat{T}) \mid \mathfrak{F}_t] = B_t \cdot p(t,T)^{-1} \cdot \breve{p}(t,\hat{T}) = p(t,T)^{-1} \cdot p(t,\hat{T}).$ $\square$

Auch wenn nicht notwendig ein vollständiger Markt vorliegt, ist der Zahlungsstrom bei einem Forwardkontrakt mit $X = W_T - F_t(W_T) = p(T,\hat{T}) - F(t,T,\hat{T})$ stets duplizierbar. Man kann den duplizierenden Portfolioplan so wählen, daß gilt :

$\xi_u^{\hat{T}} = 1$ und $\xi_u^T = -F(t,T,\hat{T})$, $t \leq u \leq T$; sonst wird nichts gekauft oder umgeschichtet. Dann hat man

$$V_t^{\xi}(0) = p(t,\hat{T}) - F(t,T,\hat{T}) \cdot p(t,T) = 0\ !$$

also ist der Plan (bei $V_0 = 0$) selbstfinanzierend mit

$$V_T^{\xi} = p(T,\hat{T}) - F(t,T,\hat{T}) \cdot p(T,T) = p(T,\hat{T}) - F(t,T,\hat{T}) = X.$$

Die gleichen Überlegungen können auch durchgeführt werden für $W_T = V_T^{\xi^*}(x)$ bei einem beliebigen Plan ξ^*.

Zahlungsströme

Es sollen nun Verträge betrachtet werden, die einen Zahlungsstrom $X_0, X_1,\ldots,X_T$ erzeugen, d.h. mit dem Vertrag sind Zahlungsansprüche X_m verbunden, die in m anfallen, dabei gilt:

$$X_m\colon \Omega \mapsto \mathbb{R} \text{ ist eine } \mathfrak{F}_m\text{–mb Zva mit } E^*[\,|X_m|/B_m] < \infty.$$

Dann ergibt sich die Bewertung π_t gemäß (12.1) [bzw. mit der Additivität eines Preissystems]:

(12.10) $\qquad \pi_t = \Sigma_{m=0}^T \Pi_t(\breve{X}_m) = B_t \cdot \Sigma_{m=0}^T E^*[X_m/B_m \mid \mathfrak{F}_t]$

ist eine faire Prämie z. Zt. t für $X_0, X_1,\ldots,X_T$.

Diese Formel läßt sich auch folgendermaßen auf (12.1) zurückführen. Ein Zahlungsanspruch X_m z.Zt.

m ergibt einem Zahlungsanspruch $X_m \cdot \exp\{\Sigma_{t=m}^{T-1} r_t\} = X_m \cdot B_T/B_m$ z.Zt. T.
Somit ergibt der Zahlungsstrom einen Zahlungsanspruch

$$X = B_T \cdot \Sigma_{m=0}^{T} X_m/B_m \;\Leftrightarrow\; \breve{X} = \Sigma_{m=0}^{T} \breve{X}_m .$$

Gemäß (12.1) ergibt sich dann als fairer Preis z.Zt. t

$$\Pi_t(\breve{X}) = B_t \cdot E^*[X/B_T | \mathfrak{F}_t] = B_t \cdot E^*[\Sigma_{m=0}^{T} X_m/B_m | \mathfrak{F}_t] ,$$

also der gleiche Wert wie in (12.10).

Futuregeschäfte.

Sie ähneln z.T. den Forward–Geschäften in der Weise, daß zum Vertragsabschluß (hier t = 0) die Lieferung zu einem Fälligkeitstermin T eines Portfolios von Finanztiteln mit einem Wert W_T z.Zt. T vereinbart werden. Als Gegenleistung wird ein **Futurepreisprozeß** $\{f_t, 0 \le t < T\}$ festgelegt, der laufende Preiszahlungen festlegt. Es wird dazu i.a. zwischen dem Käufer und dem Verkäufer ein Ausgleichs–(Clearing–) konto eingerichtet, durch das die Zahlungsströme zwischen Käufer und Verkäufer gehen während der Periode zwischen Vertragsabschluß– und Fälligkeitsdatum. Diese Zahlungsströme entsprechen den Schwankungen des Vertragspreises, d.h. dem Terminpreis der Titel, die zum Fälligkeitsdatum zu liefern sind. Darüberhinaus kann der Kauf eines Vertrages jederzeit durch den Verkauf eines Kontraktes glattgestellt werden.
Der Kauf des entsprechenden Future–Vertrages zum Zeitpunkt 0 erzeugt die folgenden Zahlungsströme:

- Garantiedepot: f_0 in t=0,
- Marginzahlungen: f_t in t für $0 < t < T$.

Dabei wird f_t in t festgelegt, wird also als $\mathfrak{F}_t$– meßbar angenommen. Die Marginzahlungen erlauben zu jeder Zeit "in Phase" mit dem Markt zu sein (die Position heißt "marked to market") und somit die Default– (Mangel–) Risiken zu beschränken am Tage T der Lieferung. Dadurch erhöht sich die Sicherheit des Finanzinstrumentes im Vergleich zum Forward; denn durch dieses Procedere können Verluste nicht still auflaufen. In der Tat ist es so, daß an den großen Warenterminbörsen nur Futures gehandelt werden können, nicht aber Forwards, welche ihren Platz im außerbörslichen OTC–Bereich haben (OTC ≅ over the counter). In der Praxis gehen die Verträge nicht unbedingt bis zum festgelegten Termin (hier T), sondern werden vor T zurückgekauft oder wiederverkauft, etwa zum Zeitpunkt t.
Wenn das Geschäft bis zu seinem Termin T geführt wird, so ergibt sich der Zahlungsstrom:

$$X_0 = -f_0, \ldots, X_{T-1} = -f_{T-1}, \; X_T = W_T \qquad [\, X_m = 0 \;\; \forall\, t > T\,].$$

Als Bewertung π_t in t hat man also nach (12.10) mit $\breve{W}_T := W_T/B_T$, $\breve{f}_m := f_m/B_m$

$$\pi_t := B_t \, \Sigma_{m=0}^{T} E^*[\breve{X}_m | \mathfrak{F}_t] = B_t \, E^*[\breve{W}_T - \Sigma_{m=0}^{T-1} \breve{f}_m \mid \mathfrak{F}_t] .$$

Ein Future soll zu jedem Zeitpunkt t wertlos sein: Wertänderungen werden sofort über die laufenden Zahlungen ausgeglichen. Als Forderung an die f_t ergibt sich somit $\pi_t = 0 \;\; \forall\, t<T$.

Wir zeigen nun, daß die folgenden Größen eine Lösung sind:

(12.11) $$\breve{f}_0 = f_0 = E^*[\,\breve{W}_T\,] =: \breve{W}_0, \quad \breve{f}_t = \breve{W}_t - \breve{W}_{t-1}\,,\ 0 < t < T,$$
$$\text{mit } \breve{W}_t := E^*[\,\breve{W}_T \,|\, \mathfrak{F}_t] \quad [\Leftrightarrow W_t = \Pi_t(\breve{W}_T)]\,.$$

Also ist die diskontierte Marginzahlung $\breve{f}_t$ die Differenz der diskontierten Preise. Da $\{\breve{W}_t\}$ ein Martingal unter P* ist, gilt dann nämlich wirklich für t < T:

$$E^*[\breve{W}_T - \Sigma_{m=0}^{T-1}\, \breve{f}_m \,|\, \mathfrak{F}_t] = E^*[\breve{W}_T - \breve{W}_{T-1} \,|\, \mathfrak{F}_t] = 0.$$

Zinsoptionen

Eine Zinsoption bewirkt einen Zahlungsstrom in Abhängigkeit von der Entwicklung der Zinsrate. Der sogenannte **Cap** stellt eine Versicherung gegen eine steigende Zinsentwicklung dar. Übersteigt die Zinsrate r_t z.Zt. t das (z. Zt 0) vereinbarte **Basisniveau ℓ(t)**, so erhält der Käufer eines Cap für das Zeitintervall $[t-1,t)$ die Zinsdifferenz $e^{r_{t-1}} - e^{\ell(t-1)}$, andernfalls fällt keine Zahlung an. Man hat also bei einem Nennbetrag N:

$$X_t = N \cdot (e^{r_{t-1}} - e^{\ell(t-1)})^+.$$

Dabei wird man $r_0 = \ell(0)$ wählen. Die entsprechende Versicherung gegen fallende Zinssatzentwicklungen wird durch den sogenannten **Floor** erreicht.

Als Bewertung π_0 für einen Cap mit (konstant bleibenden) Nennwert N und Basisniveaus ℓ(t) über einen Zeitraum von 0 bis T erhält man gemäß (12.10):

(12.12) $$\pi_0 = \Sigma_{t=1}^{T}\, E^*[\breve{X}_t] = N \cdot \Sigma_{t=1}^{T}\, E^*[(e^{r_{t-1}} - e^{\ell(t-1)})^+/B_t]$$
$$= N \cdot \Sigma_{t=0}^{T-1}\, E^*[(e^{r_t} - e^{\ell(t)})^+ \exp\{-\Sigma_{m=0}^{t}\, r_m\}]\ .$$

Zinsswaps

Ein **Zinsswap** ist ein Vertrag, bei dem es sich um den Tausch (swap) von Zinsverbindlichkeiten handelt. Der Käufer tauscht eine Anleihe mit zufallsabhängiger Zinsrate r_t, $t \geq 0$, gegen eine Anleihe mit dem gleichen Nennwert N und einer festen, zum Zeitpunkt des Vertrages festgelegten Zinsrate ℓ(t), $t \geq 0$. [Die Zinsen werden dabei laufend ausgezahlt, sodaß sich die Zinsen immer nur für den Nennwert ergeben.] Handelt es sich um eine Anleihe über den Zeitraum von t–1 bis t, so ergibt sich

$$X_t = N \cdot [\, e^{\ell(t-1)} - e^{r_{t-1}}\,]\ .$$

Im Gegensatz zum Cap haben wir hier eine lineare Abhängigkeit von $e^{r_{t-1}}$. Damit gilt, daß H_t auch für allgemeinere, nicht notwendig vollständige Marktmodelle duplizierbar ist. O.E. sei der Nennwert N = 1.

Wählt man dann nämlich

$$\xi_m^{t-1} = -1,\quad \xi_m^{t} = e^{\ell(t-1)}\ \forall\ m,\quad \xi_m^{k} = 0 \text{ sonst,}$$

so hat man einen selbstfinanzierenden Plan bei:

$$x = V_0^{\xi} = e^{\ell(t-1)} \cdot p(0,t) - p(0,t-1) =: x(t),\ t \geq 1.$$

Dann gilt aber:

$$V_t^{\xi}(x) = e^{\ell(t-1)} \cdot p(t,t) - p(t,t-1)$$
$$= e^{\ell(t-1)} - e^{r_{t-1}} = X_t.$$

Dabei ist es so, wie auch vereinbart, daß die Anleihe mit Fälligkeitstermin t–1 danach weiter zum (kurzfristigen) Zinssatz angelegt wird. Alternativ kann man dann auch den in t–1 erhaltenen Euro auf das Sparbuch anlegen. Also ist x(t) ein fairer Preis für X_t. Der gleiche Wert ergibt sich natürlich auch, wenn man x(t) über 8.7/(12.1) berechnet. Als fairen deterministischen Zinssatz kann man den Wert $\ell(t-1)$ ansehen, für den x(t) = 0 ist. Dann muß also gelten:

$$e^{\ell(t-1)} = p(0,t-1) / p(0,t) \quad \Leftrightarrow \quad \ell(t-1) = f(0,t-1).$$

Läuft der Swap über den Zeitraum von 0 bis T (bei konstantem Nennwert), so ergibt sich der Zahlungsstrom $X_1,...X_T$. Demnach ergibt sich als eine faire Prämie für den Swap: $\sum_{t=1}^{T} x(t)$.

Es ist nun

$$\sum_{t=1}^{T} x(t) = \sum_{t=1}^{T} \left[e^{\ell(t-1)} \cdot p(0,t) - p(0,t-1)\right]$$
$$= \sum_{t=1}^{T} p(0,t) + \sum_{t=1}^{T} (e^{\ell(t-1)}-1) \cdot p(0,t) - \sum_{t=0}^{T-1} p(0,t)$$
$$= p(0,T) - p(0,0) + \sum_{t=1}^{T} (e^{\ell(t-1)}-1) \cdot p(0,t).$$

Somit hat man schließlich

$$\pi := N\left[p(0,T) - 1 + \sum_{t=1}^{T} (e^{\ell(t-1)}-1) \cdot p(0,t)\right]$$

ist eine faire Prämie für den Swap bei einem Nennwert N.

Es ist bemerkenswert, daß die Prämie π unabhängig von der Verteilungsannahme ist.
Bei einem Swap mit konstanter fester Zinsrate $\ell = \ell(t)$, kann ℓ so bestimmt werden, daß keine zusätzliche Prämie gezahlt werden muß, also $\pi = 0$ gilt, gemäß

$$\ell = \ln\{1 + \left[1 - p(0,T)\right] / \textstyle\sum_1^T p(0,t)\}.$$

Wegen $(e^r - e^{\ell})^+ + (e^{\ell} - e^r) = (e^r - e^{\ell})^-$ kann aus den Prämien für Cap und Swap unmittelbar die Prämie für einen Floor berechnet werden.