§ 8 Konstruktion des stochastischen Integrals.

Die Beschreibung deterministischer Abläufe kann durch gewöhnliche DGl. erfolgen:

$$\dot{x}(t) = b(t,x(t)) \quad \text{oder} \quad dx(t) = b(t,x(t))\,dt\,.$$

Hier soll nun der Fall behandelt werden, daß b zufällige Störungen überlagert sind:

$$dX_t = (b(t,X_t) + \sigma(t,X_t)\cdot\xi_t)\,dt\,.$$

An den stochastische Prozeß ξ können folgende Forderungen gestellt werden; man spricht dann von einem **weißen Rauschen** (white noise):

(1) Für $s\neq t$ sind die Zva ξ_s, ξ_t unabhängig;

(2) die Zva ξ_t, $t\geq 0$. sind identisch verteilt;

(3) $E[\xi_t] = 0$, d.h. die ξ_t sind (o.E.) zentriert; es liegt keine systematische Ablenkung vor.

Ein solcher Prozeß ξ kann aber keine stetigen Pfade haben; und bei Normiertheit: $E[\xi_t^2] = 1$ kann $(t,\omega) \mapsto \xi_t(\omega)$ nicht einmal mb sein [vgl. Bauer (1991), Aufg. 1, S. 442].

Man kann aber folgenden Zugang wählen. Ersetze $\xi_t\,dt$ durch dW_t, wobei W eine BB ist. Aus den obigen Eigenschaften werden dann die folgenden:

(1') Für $s<s+\Delta s<t<t+\Delta t$ gilt: $\Delta W_s := W_{s+\Delta s} - W_s$ und ΔW_t sind unabhängig;

(2') $\Delta W_t \sim N(0,\Delta t)$ $\forall t$; dies impliziert:

(3') $E[\Delta W_t] = 0$.

Man erhält dann die stochastische DGl.:

(8.0)
$$dX_t = b(t,X_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dW_t \;:\Leftrightarrow$$
$$X_t = X_0 + {}_0\!\int^t b(s,X_s)\,ds + {}_0\!\int^t \sigma(s,X_s)\,dW_s.$$

Um von einer Lösung von (8.0) zu sprechen, muß also zunächst definiert werden, was man unter einem stochastischen Integral ${}_0\!\int^t Y_s\,dW_s$ versteht. Dabei wird, wie bereits im Anschluß an 7.13 erwähnt, die Konstruktion des Integrals nicht pfadweise durchgeführt.

Es sei $(W,\mathbb{F})$ eine 1–dim. standard. BB auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$. Gemäß 7.2 gilt dann:

(A1) $(W,\mathbb{F}) \in \mathcal{M}_c^{\,2}$ mit (o.E.) $\mathbb{F} = \mathbb{F}_+$;

(A2) $\langle W\rangle_t = t$, $t\geq 0$, ist Varianzenprozeß zu W.

Im folgenden werden nur diese beiden Eigenschaften (A1) und (A2) benutzt werden. Es folgt in §10 die Lévysche Charakterisierung der BB, gemäß der dann $(W,\mathbb{F})$ notwendigerweise eine BB ist. Wir gehen also von der folgenden Situation aus:

Voraussetzung für §8: W ist ein Prozeß mit (A1) und (A2). Im ersten Teil von §8 sei zudem der Zeithorizont T endlich.

Eine Klasse möglicher Integranden Y für ${}_0\!\int^t Y_s\,dW_s$ ist die folgende:

Def. 1.: $Y \in \mathscr{L}^{<2>} = \mathscr{L}_T^{<2>} :\Leftrightarrow$ Y ist progressiver Prozeß mit

$$E\left[{}_0\int^T Y_s^2\, ds\right] \ \left(= {}_0\int^T E\left[Y_s^2\right] ds \right) < \infty .$$

$\mathscr{L}^{<2>}$ ist also die Klasse der progressiven Elemente von $\mathscr{L}^2(P\times\lambda_1 \mid_{[0,T]})$. Die Struktur dieser Obermenge, insbesondere die Dreiecksungleichung, wird im folgenden wesentlich benötigt. Zunächst beginnt man mit einer kleineren Klasse:

Def. 2.: Ein Prozeß H heißt **elementar** $:\Leftrightarrow H \in \mathscr{H} :\Leftrightarrow$ Es ex. eine Zerlegung Π von $[0,T]$, sowie beschränkte $\mathfrak{F}_{s_}$ –mb Zva $\xi_{s_}$, $s\in\Pi$, [$s_$ ist wieder der Vorgänger von s in Π] mit:

$$H_t(\omega) = \sum_{s\in\Pi} \xi_{s_}(\omega)\cdot \mathbf{1}_{(s_,s]}(t) .$$

Def. 3.: Existiert zu einem reellen Prozeß Y ein $K<\infty$ mit $|Y_t|\le K\ \forall t$ [f.s.] für ein $K<\infty$, so heißt Y [f.s.] **beschränkt.**

Offenbar gilt für $H\in\mathscr{H}$: H ist ein an $\mathbb{F}$ adaptierter Prozeß mit linksstetigen Pfaden, also progressiv, mit $H_0=0$. H ist ferner beschränkt durch $\max_{s\in\Pi}|\xi_s|$. Somit folgt:

(8.1) $\qquad \mathscr{H} \subset \mathscr{L}^{<2>}$.

Für $H\in\mathscr{H}$ kann die Def. des stochastischen Integrals noch pfadweise gegeben werden.

Def. 4.: Sei $H\in\mathscr{H}$ wie oben. Dann heißt der Prozeß H.W, definiert durch

(8.2)
$$(H.W)_t := \sum_{s\in\Pi} \xi_{s_}\cdot(W_{s\wedge t} - W_{s_\wedge t})$$
$$= \sum_{s\in\Pi, s\le t} \xi_{s_}\cdot(W_s - W_{s_}) \ + \ \xi_{s(t)}\cdot(W_t - W_{s(t)})$$

mit $s(t) = \max\{s\in\Pi\cup\{0\};\ s\le t\}$, **stochastisches Integral von H bzgl. W.**

In der atypischen Situation, daß der Pfad $W_\cdot(\omega)$ eine maßdefinierende Funktion ist, stellt $(H.W)_t(\omega)$ also gerade das Integral $\int_{(0,t]} H_s(\omega)\,\mu_\omega[ds]$ dar, wobei μ_ω das zu $W_\cdot(\omega)$ gehörige Maß ist.

$(H.W)_t$ ist analog zu einem durch $(\xi_{s_}, s\in\Pi)$ kontrollierten Mart zu $(W_s, s\in\Pi\cup\{0\})$ definiert [vgl. W.th. II §4]. Wie dort ergibt sich, daß H.W ein Mart ist. Es gilt ferner:

8.3 Proposition. (a) Für $H\in\mathscr{H}$ ist $H.W \in \mathscr{M}_c^2$ mit Varianzenprozeß $\langle H.W\rangle_t = {}_0\int^t H_s^2\, ds$,

insbesondere gilt: $E\left[(H.W)_t^2\right] = E\left[{}_0\int^t H_s^2\, ds\right]$.

(b) Sind $G,H \in \mathscr{H}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, so ist $\alpha\cdot G+\beta\cdot H \in \mathscr{H}$, und es gilt:

$$(\alpha\cdot G+\beta\cdot H).W = \alpha\cdot(G.W) + \beta\cdot(H.W) .$$

Der **Bew.** ist eine leichte Übung. Es soll nun dem folgenden Programm gefolgt werden.

8.4 Programm. Zu $Y \in \mathscr{L}^{<2>}$ suche eine Folge $(H^{(n)}) \subset \mathscr{H}$ mit

(8.5) $\quad E\left[\int_0^T \{H_t^{(n)} - Y_t\}^2\, dt\right] \to 0 \ (n\to\infty)$ **(Approximation des Integranden)**.

Dann folgt mit der Linearität und der fundamentalen Isometrie in 8.3 für $m,n\to\infty$:

$E\left[\{(H^{(n)}.W)_T - (H^{(m)}.W)_T\}^2\right] = E\left[(H^{(n)} - H^{(m)}.W)_T^2\right] = E\left[\int_0^T \{H^{(n)} - H^{(m)}\}^2\, ds\right] \to 0.$

Auf Grund der Vollständigkeit 7.17 von $\mathscr{M}_c^2$ ex. nun ein $X =: Y.W \in \mathscr{M}_c^2$ mit:

(8.6) $\quad \sup_{t\le T} E\left[\{(H^{(n)}.W)_t - (Y.W)_t\}^2\right] \to 0 \ (n\to\infty)$ **(Approximation des Integrals)**.

Dann definiert der Prozeß Y.W das stochastische Integral gemäß $\int_0^t Y\, dW := (Y.W)_t$. $\square$

8.7 Bemerkung.(Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung). Ist $\varphi \in \mathscr{L}^1(\lambda_1 \mid_{[0,T]})$, so gilt für $f(t) := \int_0^t \varphi(s)\, ds$: $\frac{d}{dt} f = \varphi$ auf $[0,T]$ λ_1–f.s. [vgl. Hewitt/Stromberg (1969) S.286].

8.8 Approximationslemma. Zu $Y \in \mathscr{L}^{<2>}$ ex. $(H^{(n)}) \subset \mathscr{H}$ mit (8.5).

Bew. (i) Approximation von Y durch beschränkte progressive Prozesse $\tilde{Y}$.

Zu Y definiere $\tilde{Y}^{(K)}$ gemäß $\tilde{Y}_t^{(K)} := Y_t \cdot \mathbf{1}_{[-K,K]}(Y_t)$. Dann ist $\tilde{Y}^{(K)}$ wieder progressiv und es gilt $E\left[\int_0^T \{\tilde{Y}_t^{(K)} - Y_t\}^2\, dt\right] \to 0$ für $K\to\infty$ wegen maj. Konv. mit Y^2 als Majorante.

(ii) Approximation von beschränkten, progressiven Prozessen $\tilde{Y}$ durch beschränkte Prozesse Z mit stetigen Pfaden.

Setze $\bar{Z}_t := \int_0^t \tilde{Y}_s\, ds$ und $Z_t^{(m)} := m\left[\bar{Z}_t - \bar{Z}_{(t - 1/m)^+}\right]$, $m\in\mathbb{N}$. Dann sind $\bar{Z}$ und $Z^{(m)}$ beschränkte adaptierte Prozesse mit stetigen Pfaden, insbesondere progressiv. Nach 8.7 ex. zu $\omega\in\Omega$ eine Menge $N_\omega \in [0,T]\cap\mathfrak{B}_1$ mit $\lambda_1[N_\omega]=0$ und $\frac{\partial}{\partial t}\bar{Z}_t(\omega) = \tilde{Y}_t(\omega)$ $\forall\, t\in[0,T]\setminus N_\omega$.

Dann gilt auch $\lim_{m\to\infty} Z_t^{(m)}(\omega) = \tilde{Y}_t(\omega)$ $\forall\, t\in(0,T]\setminus N_\omega$.

Damit folgt wegen maj. Konv. auf $[0,T]$: $\int_0^T \{Z_t^{(m)}(\omega) - \tilde{Y}_t(\omega)\}^2\, dt \to 0$.

Wieder wegen maj. Konv., jetzt auf Ω, ergibt sich $E\left[\int_0^T \{Z_t^{(m)} - \tilde{Y}_t\}^2\, dt\right] \to 0$.

(iii) Approximation von beschränkten Prozessen Z mit stetigen Pfaden durch elementare Prozesse H.

Zu Zerlegungen Π von $[0,T]$ sei $H_t(\Pi)$ gemäß $H_t(\Pi) := \sum_{s\in\Pi} Z_{s_} \cdot \mathbf{1}_{(s_,s]}(t)$ definiert.

Dann gilt: $H(\Pi) \in \mathscr{H}$ und wegen maj. Konv. auf $[0,T]\times\Omega$:

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} E\left[\int_0^T \{H_t(\Pi) - Z_t\}^2\, dt\right] = 0 .$$

Aus (i) – (iii) folgt jetzt die Behauptung. $\square$

8.9 Lemma. Für $Y\in \mathscr{L}^{<2>}$ hängt $Y.W\in \mathscr{M}_c^{\,2}$, wie in 8.4 defininiert, bis auf Nichtunterscheid–barkeit nicht von der gewählten Folge $(H^{(n)})\subset\mathscr{H}$ ab.

Mehr als "bis auf Nichtunterscheidbarkeit" ist in 8.9 nicht zu erwarten. Denn gilt 8.6 für Y.W, so auch für jeden von Y.W nicht unterscheidbaren Prozeß.

Bew. von 8.9. Seien $(H_i^{(n)})\subset\mathscr{H}$, i=1,2, mit

(8.5)^i $\qquad E\,[\,{}_0\!\int^T\{H_{i,t}^{(n)}-Y_t\}^2\,dt\,]\to 0\ \ (n\to\infty)\,.$

Gilt nun für $X_i\in \mathscr{M}_c^{\,2}$ die Beziehung:

(8.6)^i $\qquad \sup_{t\le T} E\,[\,\{(H_i^{(n)}.W)_t - X_{i,t}\}^2\,]\to 0\ \ (n\to\infty),$

so ist z.z., daß X_1 und X_2 nicht unterscheidbar sind. Wähle eine neue Folge $H_3^{(n)}$ als Mischung der beiden gegebenen gemäß $H_3^{(2n-i)} := H_i^{(n)}$, i=1,2, dann gilt $(8.5)^i$ auch für i=3. Wähle nun $X_3\in \mathscr{M}_c^{\,2}$ gemäß 8.4 mit $(8.6)^i$ für i=3. Dann gilt auch

$$\sup_{t\le T} E\,[\,\{H_i^{(n)}.W)_t - X_{3,t}\}^2\,]\to 0\ \ (n\to\infty)$$

und somit $X_{i,t} = X_{3,t}$ f.s. $\forall t$, i=1,2, also auch $X_{1,t}=X_{2,t}$ f.s. $\forall t$. Mit 1.1 folgt die Nichtunterscheidbarkeit von X_1 und X_2. $[\,]$

Def. 5. Das **stochastische Integral** von $Y\in \mathscr{L}^{<2>}$ bzgl. W ist der bis auf Nichtunterscheidbar– keit eindeutige Prozeß $Y.W\in \mathscr{M}_c^{\,2}$, so daß (8.6) gilt für alle Folgen $(H^{(n)})\subset\mathscr{H}$ mit (8.5).

Schreibweise: $Y.W =: {}_0\!\int^{\cdot} Y\,dW$, $(Y.W)_t =: {}_0\!\int^t Y\,dW = {}_0\!\int^t Y_s\,dW_s$.

In Analogie dazu soll auch die folgende **Schreibweise** benutzt werden: ${}_0\!\int^t Y_s\,ds =: {}_0\!\int^t Y\,d\lambda$.

Diese Definition setzt das Integral H.W für $H\in\mathscr{H}$ fort; dies sieht man mit $H^{(n)}:=H\ \forall n$. Allerdings ist jetzt jeder Prozeß X, der von H.W nicht unterscheidbar ist, Version von H.W.

Das Integral wird also global auf Ω als $\mathscr{L}^2$–Limes und nicht pfadweise definiert.

8.10 Satz. Für $Y\in \mathscr{L}^{<2>}$ hat Y.W den Varianzenprozeß $\langle Y.W\rangle_t = {}_0\!\int^t Y^2\,d\lambda$.

Bew. (i) Der angegebene Prozeß $A_t := {}_0\!\int^t Y^2\,d\lambda$ hat offenbat isotone Pfade, und es gilt nach Voraussetzung an Y: $E\,[A_T]<\infty$ und somit $P\,[A_T<\infty]=1$. Auf $\{A_T<\infty\}$ sind die Pfade von A stetig. Für den Fall ${}_0\!\int^t Y^2(\omega)\,d\lambda < \infty$, aber ${}_0\!\int^u Y^2(\omega)\,d\lambda = \infty\ \ \forall\ u>t$, sei $A_t(\omega):=\infty$ definiert, also $A_t := {}_0\!\int^{t+} Y\,d\lambda$, sodaß alle Pfade von A rechtsstetig sind. A ist dann an $\mathbb{F}_+=\mathbb{F}$ adaptiert.

(ii) Für $X\in \mathscr{M}_c^{\,2}$ gilt: $E\,[\{X_t-X_s\}^2\,|\,\mathscr{F}_s] = E\,[X_t^2-X_s^2\,|\,\mathscr{F}_s]$, s<t, [vg. 7.1c, 7.4a].

Also ist $(Y.W)^2$–A genau dann ein Mart, wenn gilt:

(8.11) $\quad E\left[\{(Y.W)_t - (Y.W)_s\}^2 ; B\right] = E\left[\int_s^t Y^2\, d\lambda ; B\right]$, $\forall\, s<t$, $B\in\mathfrak{F}_s$.

Für $Y\in\mathscr{H}$ gilt (8.11) gemäß 8.3a. Sei jetzt $Y\in\mathscr{L}^{<2>}$ und $(H^{(n)})\subset\mathscr{H}$ wie in (8.5). Dann folgt aus (8.6) mit der Dreiecksungleichung in $\mathscr{L}^2(P\,|\,B^{\times}\lambda_1\,|\,_{[s,t]})$:

$E\left[\{(Y.W)_t - (Y.W)_s\}^2 ; B\right] = E\left[\{(H^{(n)}.W)_t - (H^{(n)}.W)_s\}^2 ; B\right] + o(1)$

$\quad = E\left[\int_s^t (H^{(n)})^2\, d\lambda ; B\right] + o(1) = E\left[\int_s^t Y^2\, d\lambda ; B\right] + o(1).$ []

Als Korollar ergibt sich mit 7.4b:

8.12 Fundamentale Isometrie. Für $Y\in\mathscr{L}^{<2>}$ gilt: $E\left[\{\int_0^t Y\, dW\}^2\right] = E\left[\int_0^t Y^2\, d\lambda\right]$, $t\geq 0$.

Mit dieser Beziehung kann etwa aus dem Verschwinden von Y auf das Verschwinden von $\int_0^t Y\, dW$ oder aus der Konvergenz von $Y^{(n)}$ gegen Null auf die Konvergenz von $\int_0^t Y^{(n)}\, dW$ gegen Null geschlossen werden.

8.13 Linearität. Sind $Y_1, Y_2 \in \mathscr{L}^{<2>}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, so ist $\alpha\cdot Y_1+\beta\cdot Y_2 \in \mathscr{L}^{<2>}$ und es gilt:

$\int_0^{\cdot} (\alpha\cdot Y_1+\beta\cdot Y_2)\, dW = \alpha\cdot\int_0^{\cdot} Y_1\, dW + \beta\cdot\int_0^{\cdot} Y_2\, dW$ f.s. .

Bew. von 8.13. Da der $\mathscr{L}^2$ ein Vektorraum ist, folgt die erste Behauptung. Wähle nun $H_i^{(n)}\in\mathscr{H}$, i=1,2, im Sinne von (8.5). Aus der Dreiecksungleichung im $\mathscr{L}^2$ folgt, daß $\alpha\cdot H_1^{(n)}+\beta\cdot H_2^{(n)}$ Approximation von $\alpha\cdot Y_1+\beta\cdot Y_2$ ist. Damit ist $(\alpha\cdot H_1^{(n)}+\beta\cdot H_2^{(n)}).W$ Approximation von $(\alpha\cdot Y_1+\beta\cdot Y_2).W$, andererseits wegen 8.3b auch für $\alpha\cdot(Y_1.W) + \beta\cdot(Y_2.W)$. Somit sind $(\alpha\cdot Y_1+\beta\cdot Y_2).W$ und $\alpha\cdot(Y_1.W) + \beta\cdot(Y_2.W)$ nicht unterscheidbar. []

Das folgende Lemma zeigt, daß der Verlauf des stochastischen Integral bis zu einer Stoppzeit nur vom Verlauf des Integranden bis zu dieser Stoppzeit abhängt.

8.14 Lokalisierungslemma. Sei $Y\in\mathscr{L}^{<2>}$ und τ Stoppzeit. Dann gilt $(Y_t\cdot\mathbf{1}_{\{t\leq\tau\}}, t\geq 0)\in\mathscr{L}^{<2>}$

und $\int_0^{t\wedge\tau} Y\, dW = \int_0^t Y_s\cdot\mathbf{1}_{\{s\leq\tau\}}\, dW_s$, $t\geq 0$, f.s. .

Bew. (0) Setze $\tilde{Y}_t := Y_t\cdot\mathbf{1}_{\{t\leq\tau\}}$ und $Z_t := \mathbf{1}_{\{t\leq\tau\}}$. Dann ist der Prozeß Z adaptiert und hat linksstetige Pfade, ist also progressiv. Somit ist auch $\tilde{Y}$ progressiv und es gilt: $|\tilde{Y}_t| \leq |Y_t|$.

(i) $((Y.W)_{t\wedge\tau}, t\geq 0)$ und $((\tilde{Y}.W)_{t\wedge\tau}, t\geq 0)$ sind nicht unterscheidbar.

Der Beweis dazu ist typisch für die Theorie. Die Eigenschaften für $\int...dW$ werden zurückgeführt auf die entsprechenden Eigenschaften für $\int...d\lambda$. Es gilt $Y-\tilde{Y}\in\mathscr{L}^{<2>}$ sowie

nach 7.4b und 8.10: $E\left[((Y-\tilde{Y}).W)^2_{t\wedge\tau}\right] = E\left[<(Y-\tilde{Y}).W>_{t\wedge\tau}\right] = E\left[\int_0^{t\wedge\tau}(Y-\tilde{Y})^2\, d\lambda\right] = 0.$

Also gilt wegen der Linearität $(Y.W)_{t\wedge\tau} = (\tilde{Y}.W)_{t\wedge\tau}$ f.s. . Mit 1.1 folgt die Beh. (i).

(ii) $((\tilde{Y}.W)_{t\wedge\tau},\ t\geq 0)$ und $\tilde{Y}.W$ sind nicht unterscheidbar.

Mit 7.4a folgt nämlich $E\left[\{(\tilde{Y}.W)_t - (\tilde{Y}.W)_{t\wedge\tau}\}^2\right] = E\left[{}_{t\wedge\tau}\int^t \tilde{Y}^2\, d\lambda\right] = 0$. Jetzt folgt die Beh. (ii) wieder aus 1.1. Damit ist auch alles gezeigt. $[]$

Def.6. Für $Y \in \mathscr{L}^{<2>}$ setzt man: ${}_s\int^t Y\, dW = {}_0\int^t Y\, dW - {}_0\int^s Y\, dW$ für $0\leq s\leq t$.

8.15 Lemma. Sei $Y \in \mathscr{L}^{<2>}$, ξ beschränkter adaptierter Prozeß, Π Zerlegung von $[0,t]$ und $0\leq s\leq t\leq T$; dann gilt:

(a) ${}_s\int^t Y\, dW = {}_0\int^T \mathbf{1}_{(s,t]}(u)\cdot Y_u\, dW_u$ f.s.;

(b) ${}_s\int^t \xi_s \cdot Y\, dW = \xi_s \cdot {}_s\int^t Y\, dW$ f.s.;

(c) ${}_0\int^t \{\sum_{s\in\Pi} \xi_{s_-}\cdot \mathbf{1}_{(s_-,s]}(u)\}\, Y_u\, dW_u = \sum_{s\in\Pi} \xi_{s_-}\cdot {}_{s_-}\int^s Y\, dW$ f.s. .

Bew. a) Mit dem Lokalisierungslemma 8.14 folgt die Aussage zunächst für s=0 und dann mit der Linearität 8.13 mit $\mathbf{1}_{(s,t]} = \mathbf{1}_{(0,t]} - \mathbf{1}_{(0,s]}$ für jedes $s\leq t$.
Teil (b) ist eine Übungsaufgabe; man betrachtet zunächst den Fall $Y\in\mathscr{H}$ und Teil (c) folgt aus (a) und (b). $[]$

Jetzt soll die Definition des Integral erweitert werden, einmal auch auf den Fall $T=\infty$ und zum andern auf eine größere Klasse $\mathscr{P}^2$ von Integranden. Bei der letzteren Erweiterung braucht das Integral lediglich ein lokales Mart zu sein.

Als **Voraussetzung** lassen wir jetzt also den Fall $\mathbf{T\leq\infty}$ zu.

Def. 7. Sei $\mathscr{P}^i$, $i\in\mathbb{N}$, die Klasse der progressiven Prozesse Y mit

(8.16) $${}_0\int^t |Y|^i\, d\lambda < \infty \text{ f.s. } \forall t.$$

Da jede reelle Funktion auf kompakten Intervallen beschränkt ist, gilt:

(8.17) Hat Y reellwertige rechtsstetige und f.s. stetige Pfade, so gilt: $Y \in \mathscr{P}^i$, $i\in\mathbb{N}$.

8.18 Programm. Zu $Y\in\mathscr{P}^2$ definiere $\tau_n := n \wedge T \wedge \inf\{t\geq 0;\ {}_0\int^t Y^2\, d\lambda > n\}$ für $n\in\mathbb{N}_0$. Dabei wird wie im Beweis von 8.10 eine rechtsstetige Version von ${}_0\int^{\cdot} Y^2\, d\lambda$ genommen. Dann ist τ_n nach 1.6 Stoppzeit, und es gilt wegen (8.16):

$\tau_n \uparrow T$ f.s. ; im Fall $T<\infty$ gilt sogar: $\tau_n = T$ für $n > {}_0\int^T Y^2\, d\lambda$.

Setze nun $Y_t^{(n)} := Y_t \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_n \geq t\}}$. Dort wo die Pfade von ${}_0\int^{\cdot} Y^2\, d\lambda$ stetig sind, insbesondere auf der Menge $\cap_{t\in\mathbb{N}} \{{}_0\int^t Y^2\, d\lambda < \infty\}$ vom Maß 1, gilt: ${}_0\int^{n\wedge T} \{Y^{(n)}\}^2\, d\lambda = {}_0\int^{\tau_n} Y^2\, d\lambda \leq n$.

Somit erhält man: $(Y_t^{(n)}, 0\le t\le n\wedge T) \in \mathscr{L}_{n\wedge T}^{<2>}$,
sowie auf Grund des Lokalisierungslemmas 8.14 die folgende **Konsistenzbedingung**:

(8.19) $\quad {}_0\int^t Y^{(m)}dW = {}_0\int^{t\wedge\tau_m} Y^{(n)}\, dW$, $0\le t\le n$, f.s., $m\le n\in\mathbb{N}$.

Diese Konsistenzbedingung gestattet nun eine von n unabhängige Definition des Integrals:

Def. 8. Zu $Y \in \mathscr{P}^2$ sei $Y^{(n)}$ wie in 8.18 gewählt.

Dann definiert man das **stochastische Integral** ${}_0\int^{\cdot} Y\, dW = Y.W$ gemäß

$${}_0\int^t Y\, dW = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{\tau_{n-1}\le t<\tau_n\}} \cdot {}_0\int^t Y^{(n)}\, dW \ .$$

Aus der Konsistenzbedingung (8.19) folgt :

(8.20) $\quad {}_0\int^{t\wedge\tau_n} Y\, dW = {}_0\int^t Y^{(n)}dW$, $0\le t\le n$, f.s. $\forall\ n\in\mathbb{N}$.

Damit gilt nach Definition eine Lokalisierungseigenschaft für die Stoppzeiten τ_n. Diese Beziehung gilt nach dem Lokalisierungslemma 8.14 auch für das Integral im Sinne von Def. 5. Also setzt das Integral von Def. 8 das Integral von Def. 5 fort.

8.21 Satz. Das stochastische Integral von $Y \in \mathscr{P}^2$ bzgl. W ist der bis auf Nichtunterscheidbarkeit eindeutige Prozeß ${}_0\int^{\cdot} Y\, dW \in \mathscr{M}_c^{\,loc}$, so daß für alle Stoppzeiten τ die folgende **Lokalisierungseigenschaft** erfüllt ist:

(8.22) $\quad {}_0\int^{t\wedge\tau} Y\, dW = {}_0\int^t Y_s\cdot\mathbf{1}_{\{s\le\tau\}}\, dW_s$, $t\ge 0$, f.s. ,

Ferner gilt die folgende **fundamentale Isometrie**, wenn deren rechte Seite endlich ist:

(8.23) $\quad E\left[\left\{{}_0\int^{t\wedge\tau} Y\, dW\right\}^2\right] = E\left[{}_0\int^{t\wedge\tau} Y^2\, d\lambda\right]$.

Bew. Aus der Def. folgt, daß Y.W adaptiert ist und überall rechtsstetige Pfade hat. Gemäß (8.20) ist Y.W ein lokales Mart mit f.s. stetigen Pfaden; somit gilt $Y.W \in \mathscr{M}_c^{\,loc}$. Zum Beweis von (8.22) setze $\tilde{Y} := (Y_t\cdot\mathbf{1}_{\{t\le\tau\}}, t\ge 0) \in \mathscr{P}^2$ und definiere $\tilde{\tau}_n$, $\tilde{Y}^{(n)}$ wie in 8.18 zu $\tilde{Y}$. Dann gilt $\tau_n \le \tilde{\tau}_n$. Nun folgt mit (8.20) und dem Lokalisationslemma 8.14:

${}_0\int^{t\wedge\tau\wedge\tau_n} Y\, dW = {}_0\int^{t\wedge\tau} Y^{(n)}\, dW = {}_0\int^t Y_s^{(n)}\cdot\mathbf{1}_{\{s\le\tau\}}\, dW_s$ f.s. . Ebenso folgt:

${}_0\int^{t\wedge\tau_n} \tilde{Y}\, dW = {}_0\int^{t\wedge\tau_n\wedge\tilde{\tau}_n} \tilde{Y}\, dW = {}_0\int^{t\wedge\tau_n} \tilde{Y}^{(n)}\, dW = {}_0\int^t \tilde{Y}_s^{(n)}\cdot\mathbf{1}_{\{s\le\tau_n\}}\, dW_s$ f.s. .

Die rechten Seiten der beiden Gleichungsketten sind aber gleich. Somit folgt:

$${}_0\int^{t\wedge\tau\wedge\tau_n} Y\, dW = {}_0\int^{t\wedge\tau_n} \tilde{Y}\, dW \ , \ t\le n, \text{ f.s. .}$$

Mit $n\to\infty$ folgt jetzt (8.22). Sei nun die rechte Seite von (8.23) endlich, d.h. $\tilde{Y}_{|t} := (\tilde{Y}_s, 0\le s\le t) \in \mathscr{L}_t^{<2>}$, und o.E $\tau\le t$. Dann folgt aus (8.22) und der fundamentalen Isometrie 8.12:

$$E\left[\left\{{}_0\int^{t\wedge\tau} Y\,dW\right\}^2\right] = E\left[\left\{{}_0\int^{t} \tilde{Y}_{|t}\,dW\right\}^2\right] = E\left[{}_0\int^{t} \tilde{Y}^2_{|t}\,d\lambda\right] = E\left[{}_0\int^{t\wedge\tau} Y^2\,d\lambda\right].$$

Zum Nachweis der Eindeutigkeit wähle $X\in \mathcal{M}_c^{loc}$ mit $X_{t\wedge\tau} = {}_0\int^{t} \tilde{Y}\,dW$, $t\geq 0$, f.s. für alle Stoppzeiten . Mit $\tau=\tau_n$ und (8.20) folgt: $X_{t\wedge\tau_n} = {}_0\int^{t} Y^{(n)}\,dW = {}_0\int^{t\wedge\tau_n} Y\,dW$, $0\leq t\leq n$, f.s. .

Mit $n\to\infty$ ergibt sich schließlich: $X_t = {}_0\int^{t} Y\,dW$. □

8.24 Folgerung. Ist $T=\infty$ und ist $Y \in \mathcal{L}_\infty^{<2>}$, d.h. ist Y ein progressiver reeller Prozeß mit $E\left[{}_0\int^{t} Y^2\,d\lambda\right] < \infty \quad \forall\, t\geq 0$, so ist $Y.W = {}_0\int^{\cdot} Y\,dW \in \mathcal{M}_c^2$ mit Varianzenprozeß $\langle Y.W\rangle_t = {}_0\int^{t} Y^2\,d\lambda$, $t\geq 0$.

Bew. Für $N\in\mathbb{N}$ setze $Y_{|N} := (Y_t, 0\leq t\leq N)$; dann gilt: $Y_{|N}\in \mathcal{L}_N^{<2>}$. Aus (8.22) folgt mit $\tau=N$: $((Y.W)_t,\ t\leq N) = ((Y_{|N}.W)_t\ ,t\leq N)$ f.s. , wobei das rechte Integral im Sinne von Def.5 gewählt werden kann. □

8.25 Linearität. (a) Sei $X_i \in \mathcal{M}_c^{loc}$, $i=1,2$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, so gilt: $\alpha\cdot X_1+\beta\cdot X_2 \in \mathcal{M}_c^{loc}$.

(b) Sind $Y_i \in \mathcal{P}^2$, $i=1,2$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, so gilt: $\alpha\cdot Y_1+\beta\cdot Y_2 \in \mathcal{P}^2$ und

$${}_0\int^{\cdot} (\alpha\cdot Y_1+\beta\cdot Y_2)\,dW = \alpha\cdot {}_0\int^{\cdot} Y_1\,dW + \beta\cdot {}_0\int^{\cdot} Y_2\,dW \quad \text{f.s.} .$$

Der **Bew.** ist eine Übungsaufgabe.

§9 Die Itô–Formel.

Aus der klassischen Differentialrechnung ist die folgende Differentialformel bekannt:

$$\frac{d}{dt}f(t,x(t)) = \frac{\partial}{\partial t}f(t,x(t)) + \frac{\partial}{\partial x}f(t,x(t))\cdot\frac{d}{dt}x(t) .$$

Jetzt soll die entsprechende Formel hergeleitet werden für ein stochastisches Integral X anstelle der Funktion $x(\cdot)$.

Wie in §8 sei W ein Prozeß auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit Filterung $\mathbb{F}$, so daß die Bedingungen (A1) und (A2) erfüllt sind. Dabei liege wieder der allgemeine Fall $T\leq\infty$ vor. Nützlich ist die folgende Klasse von Prozessen X, die abgeschlossen ist gegenüber der Bildung von $f(t,X_t)$ für hinreichend reguläre Funktionen f, was für die Klasse der stochastischen Integrale nicht gilt.

Def. 1. Ein **1–dimensionaler Itô–Prozeß** ist ein reeller stochastischer Prozeß X mit rechts–stetigen und f.s. stetigen Pfaden, so daß gilt:

(9.1) $$X_t = X_0 + {}_0\int^{t} Z\,d\lambda + {}_0\int^{t} Y\,dW$$, wobei X_0 $\mathfrak{F}_0$–mb. Zva, $Z \in \mathcal{P}^1$, $Y \in \mathcal{P}^2$ ist.

Man sagt auch: X besitzt das **stochastische Differential** $dX_t = Z_t\,dt + Y_t\,dW_t$.

Ein Itô–Prozeß ist also eine Verallgemeinerung einer BB mit Drift b und Dispersions–koeffizienten σ; dieser Spezialfall ergibt sich mit Z≡b, Y≡σ.

Ein Itô–Prozeß ist ein spezielles f.s. stetiges **Semi–Martingal** X, das sich in der Form $X = X_0 + M + V$ schreiben läßt, wobei $M \in \mathcal{M}_c^{loc}$ und $V = A_+ - A_-$ gilt; die Prozesse $A_\pm$ haben dabei f.s. stetige und wachsende Pfade.

9.2 Bemerkung. Zu $Z \in \mathcal{P}^1$ ex. ein reeller Prozeß I mit rechtsstetigen und f.s. stetigen Pfaden, sodaß gilt: $I_t = {}_0\int^t Z\, d\lambda$, t≥0. f.s. .

In Zukunft ist immer diese Version I von ${}_0\int^\cdot Z\, d\lambda$ gemeint.

Die Modifikation kann dabei gemäß $I_t=0$ für ${}_0\int^{t+} |Z|\, d\lambda = \infty$ vorgenommen werden, während bei dem wachsenden Prozeß A aus 8.10 die Modifikation $A_t=\infty$ für ${}_0\int^{t+} Y^2\, d\lambda = \infty$ zweckmäßiger war. [vgl. Übung.] []

Def. 2. $C^{1,2} = C^{1,2}([0,T]\cap\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist die Klasse aller reellen Funktionen f auf $[0,T]\cap\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit:

$\dot f(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)$ ist stetig, $f'(t,x) = \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ ist stetig, $f''(t.x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x)$ ist stetig.

Für einen Itô–Prozeß der Gestalt (9.1) setzt man: ${}_0\int^\cdot V\, dX := {}_0\int^\cdot V\cdot Z\, d\lambda + {}_0\int^\cdot V\cdot Y\, dW$, sofern die Integrale auf der rechten Seite erklärt sind.

Ziel ist der Beweis der folgenden Itô–Formel für einen Itô–Prozeß der Gestalt (9.1):

(9.3) (**1–dim. Itô–Formel**) Für $f\in C^{1,2}$ gilt:

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + {}_0\int^t \dot f(s,X_s)\, ds + {}_0\int^t f'(s,X_s)\, dX_s + \tfrac12\, {}_0\int^t f''(s.X_s)\cdot Y_s^2\, ds$$
$$= f(0,X_0) + {}_0\int^t \{\dot f(s,X_s) + f'(s,X_s)\cdot Z_s + \tfrac12 f''(s,X_s)\cdot Y_s^2\}\, ds$$
$$+ {}_0\int^t f'(s,X_s)\cdot Y_s\, dW_s \text{ , } t\ge 0\text{, f.s. .}$$

Mit anderen Worten: $f(t,X_t)$ hat das stochastische Differential

$$df(t,X_t) = \dot f(t,X_t)dt + f'(t,X_t)dX_t + \tfrac12 f''(t,X_t)d\langle Y.W\rangle_t.$$

Der Term $\frac12 f''(s,X_s)\cdot Y_s^2\, ds$ rührt daher, daß $\langle Y.W\rangle$ die quadratische Variation ${}_0\int^\cdot Y^2\, d\lambda$ in Sinne von 7.7 hat. Da das Lebesgue–Integrals in (9.1) Pfade von endlicher Variation hat, stellt $\langle Y.W\rangle$ auch die quadratische Variation $\langle X\rangle$ von X dar [vgl. 9.5]. Man kann sich der Einfachheit halber zunächst auf den Fall X=Y.W, also $X_0=0$,Z≡0 konzentrieren.In der klassischen Differential– und Integralrechnung werden nur Funktionen von beschränkter Variation, also mit verschwindener quadratischer Variation betrachtet. Aus (8.17) folgt:

9.4 Lemma. Sind X,Y,Z wie (9.1), so gilt:

$$(\dot f(t,X_t),t\ge0),\ (f'(t,X_t)\cdot Z_t,t\ge0),\ (\tfrac12 f''(t,X_t)\cdot Y_t^2,t\ge0) \in \mathcal{P}^1,\ (f'(t,X_t)\cdot Y_t,t\ge0)\in\mathcal{P}^2.$$

9.5 Lemma. Seien X,Y,Z wie in (9.1), U ein reeller adaptierter Prozeß. Zu t≥0 ex. ein K<∞ mit: $_0\int^s |Z|\, d\lambda \le K$, $|_0\int^s Y\, dW| \le K$, $_0\int^s Y^2\, d\lambda \le K$, $|U_s| \le K$, 0≤s≤t, f.s. .
Dann gilt für Zerlegungen Π von $[0,t]$:

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} E\left[\{\sum_{s\in\Pi} U_{s_}(X_s - X_{s_})^2 - {}_0\int^t U\cdot Y^2\, d\lambda\}^2\right] = 0 .$$

Der **Bew.** folgt für den Fall Z≡0, f.s. aus 7.8 mit 8.10. Die Übertragung auf den vorliegenden Fall ist eine Übung. []

9.6 Lemma. (Restriktion der Startsituation). Sei M Mart, $C\in\mathfrak{F}_0$ mit $P[C]>0$ und P' := $P[\,\cdot\,|C]$. Dann ist M auch auf $(\Omega,\mathfrak{F},P')$ ein Mart.

Der **Bew**. folgt sofort aus $C\cap A\in\mathfrak{F}_s\ \forall\ A\in\mathfrak{F}_s$.

9.7 Satz (Itô). Sei X ein Itô–Prozeß der Gestalt (9.1), $f\in C^{1,2}$, Dann ist $(f(t,X_t),\ t\ge 0)$ ein Itô–Prozeß mit (9.3).

Bew. In Hinblick auf 1.1 braucht nur ein fester Zeitpunkt betrachtet werden. Wegen der Lokalisierungseigenschaft (8.22) von Y.W kann dieser als der Horizont T angenommen werden.
Setze $\hat{X}_t := |X_0| + {}_0\int^t |Z|\, d\lambda + |{}_0\int^t Y\, dW| + {}_0\int^t Y^2\, d\lambda$, t≥0.
(i) **Der beschränkte Fall.** Es existiere ein K<∞ mit $\hat{X}_T \le K$ f.s. , insbesondere $Y\in \mathscr{L}_T^{<2>}$.
Wähle nun $\Omega_0\in\mathfrak{F}$ mit $P[\Omega_0]=1$, so daß der Pfad $X_\cdot(\omega)$ stetig ist und $\hat{X}_T(\omega)\le K$ gilt für $\omega\in\Omega_0$. Dann folgt auch: $|X_\cdot(\omega)|\le K\ \forall\ \omega\in\Omega_0$. Es existiert ein $\tilde{f}\in C^{1,2}$ mit kompakten Träger, sodaß $\tilde{f}=f$ gilt auf $[0,T]\times[-K,K]$. O.E. sei jetzt $f\equiv\tilde{f}$; dann sind f, $\dot{f}$, f' und f'' beschränkt, etwa durch $\tilde{K}$. Sei nun Π eine Zerlegung von $[0,T]$. Dann gilt auf Ω_0:

$$\begin{aligned} f(T,X_T) - f(0,X_0) &= \sum_{s\in\Pi}\{f(s,X_s) - f(s_,X_{s_})\} \\ &= \sum_{s\in\Pi}\{[f(s,X_s) - f(s_,X_s)] + [f(s_,X_s) - f(s_,X_{s_})]\} \\ &= \sum_{s\in\Pi}\{{}_{s_}\int^s \dot{f}(t,X_s)\, dt + f'(s_,X_{s_})(X_s - X_{s_}) + \tfrac{1}{2}f''(s_,\xi_s)(X_s - X_{s_})^2\} \\ &=: J_1(\Pi) + J_2(\Pi) + J_3(\Pi) \quad \text{für ein } \xi_s \text{ mit } |\xi_s - X_{s_}| \le |X_s - X_{s_}| . \end{aligned}$$

ad J_1) Mit $G_t(\Pi) := \sum_{s\in\Pi} \dot{f}(t,X_s)\cdot \mathbf{1}_{(s_,s]}(t)$ gilt gerade $J_1(\Pi) = {}_0\int^T G(\Pi)\, d\lambda$ sowie:

$G_t(\Pi) \to \dot{f}(t,X_t)$ auf Ω_0 für $\|\Pi\|\to 0$.

Wegen maj. Konv. auf $[0,T]$ folgt somit: $J_1(\Pi) \to {}_0\int^T \dot{f}(t,X_t)\, dt$ auf Ω_0.
ad J_2) Setze $F_t := f'(t,X_t)$ und $H_t(\Pi) := \sum_{s\in\Pi} F_{s_}\cdot \mathbf{1}_{(s_,s]}(t)$. Auf Ω_0 gilt nun:

$H_t(\Pi) \to F_t\ \forall\ t\le T$. Die Zerlegung (9.1) bewirkt eine Zerlegung $J_2 := J_2^\lambda + J_2^W$.

ad J_2^{λ}) $J_2^{\lambda}(\Pi) = \sum_{s\in\Pi} F_{s_}\cdot {}_s\int^{s} Z\,d\lambda = {}_0\int^{T} H(\Pi)\cdot Z\,d\lambda$.

Wegen maj. Konv. auf $[0,T]$ mit Majorante $\tilde{K}\cdot|Z|$ folgt:

$J_2^{\lambda}(\Pi) \to {}_0\int^{T} F\cdot Z\,d\lambda$ auf Ω_0 .

ad J_2^{W}) $J_2^{W}(\Pi) = \sum_{s\in\Pi} F_{s_}\cdot {}_s\int^{s} Y\,dW = {}_0\int^{T} H(\Pi)\cdot Y\,dW$ wegen 8.15c.

Mit der Linearität 8.13 und der fundamentalen Isometrie 8.12 folgt:

$E[\{J_2^{W}(\Pi) - {}_0\int^{T} F\cdot Y\,dW\}^2] = E[\{{}_0\int^{T}(H(\Pi)-F)Y\,dW\}^2] = E[{}_0\int^{T}(H(\Pi)-F)^2\cdot Y^2\,d\lambda] \to 0$

wegen maj. Konv. auf $[0,T]\times\Omega_0$ mit Majorante $(2\tilde{K})^2Y^2$.

ad J_3) Setze $U_t := \frac{1}{2}f''(t,X_t)$ und $J_3^*(\Pi) := \sum_{s\in\Pi} U_{s_}\cdot(X_s - X_{s_})^2$. Dann gilt:

$|J_3^*(\Pi) - J_3(\Pi)| \le \eta_T(\delta(\Pi))\cdot V_T^{(2)}(\Pi)$ mit $V_T^{(2)}(\Pi) := \sum_{s\in\Pi}(X_s - X_{s_})^2$,

$\delta(\Pi) := \max_{s\in\Pi}|X_s - X_{s_}|$ und $\eta_T(\delta) := \max_{t\le T,\,x,y\in[-K,K],\,|x-y|\le\delta}\frac{1}{2}|f''(t,x)-f''(t,y)|$.

Dabei gilt: $\delta(\Pi)\to 0$ für $\|\Pi\|\to 0$ auf Ω_0 und $\eta_T(\delta)\to 0$ für $\delta\to 0$.

Mit der Schwarzschen Ungleichung erhält man:

$E[|J_3^*(\Pi) - J_3(\Pi)|]^2 \le E[\eta_T(\delta(\Pi))^2]\cdot E[V_T^{(2)}(\Pi)^2]$; dabei gilt: $E[\eta_T(\delta(\Pi))^2] \to 0$ wegen maj. Konv. auf Ω_0 und $E[V_T^{(2)}(\Pi)^2] \to E[\{{}_0\int^{T} Y^2\,d\lambda\}^2]$ wegen 9.5 und der Stetigkeit der Norm in $\mathscr{L}^2$. Für J_3^* folgt nun aus 9.5: $E[\{J_3^*(\Pi) - {}_o\int^{T} U\cdot Y^2\,d\lambda\}^2] \to 0$.

Bildet man die Differenz Δ_T der linken und rechten Seite der Itô–Formel, so hat man jetzt die folgende Situation:

$\Delta_T = f(T,X_T) - f(0,X_0) - {}_0\int^{T}\ldots\,dt - {}_0\int^{T}\ldots dW_t$

$= [J_1(\Pi) - {}_0\int^{T}\dot{f}(t,X_t)\,dt] + [J_2^{\lambda}(\Pi) - {}_0\int^{T} f'(t,X_t)\cdot Z_t\,dt]$

$+ [J_2^{W}(\Pi) - {}_0\int^{T} f'(t.X_t)\cdot Y_t\,dW_t] + [J_3(\Pi) - J_3^*(\Pi)] + [J_3^*(\Pi) - {}_0\int^{T}\frac{1}{2}f''(t,X_t)\cdot Y_t^2\,dt]$;

dabei konvergieren die Klammerausdrücke $[\ldots]$ für $\|\Pi\|\to 0$ gegen Null entweder f.s. oder in einem $\mathscr{L}^p$, p=1,2. Beide Konvergenzarten ziehen die Konvergenz n.W. gegen Null nach sich; also gilt auch $\Delta_t \to 0$ n.W. , wobei Δ_t nicht von Π abhängt. Dies kann nur sein, wenn $\Delta_T = 0$ f.s. gilt, was zu zeigen war.

(ii) **Der unbeschränkte Fall** wird durch Lokalisierung auf den beschränkten Fall zurückgeführt. Sei $\tau_n := T\wedge\inf\{t\ge 0;\ \hat{X}_t > n\}$, $C_n := \{|X_0|\le n\} \in \mathfrak{F}_0$. Da $\hat{X}$ o.E. reellwertige, rechtsstetige und f.s. stetige Pfade hat, ist τ_n Stoppzeit und auf C_n gilt f.s.: $\hat{X}_{\tau_n} \le n$.

Setze $Y_t^{(n)} := Y_t\cdot\mathbf{1}_{\{t\le\tau_n\}}$, $Z_t^{(n)} = Z_t\cdot\mathbf{1}_{\{t\le\tau_n\}}$; diese definieren entsprechend $X^{(n)}$ und

$\hat{X}^{(n)}$. Dann gilt nach der Lokalisierungseigenschaft (8.22): $X_t^{(n)} = X_{t\wedge\tau_n}$ und $\hat{X}_t^{(n)} = \hat{X}_{t\wedge\tau_n}$, also $\hat{X}_T^{(n)} \le n$ auf C_n f.s.

Wir werden uns jetzt überlegen, daß die Itô–Formel für die durch "$^{(n)}$" indizierten Größen f.s. auf C_n gilt. Wir betrachten dazu das Maß $P' = P[\,\cdot\,|\,C_n]$, wobei o.E. $P[C_n]>0$ sei. Dann sind gemäß 9.6 die Voraussetzungen (A1) und (A2) auch unter P' erfüllt; ferner ist die Voraussetzung des beschränkten Falls für $\hat{X}_T^{(n)}$ $\tilde{P}$–f.s. erfüllt. Somit gilt die Itô–Formel in der Tat für die durch "$^{(n)}$" indizierten Größen f.s. auf C_n. Wegen $\{\hat{X}_T\le n\} \subset \{\tau_n=T\}\cap C_n$ gilt Auf $\{\hat{X}_T\le n\}$ $X_s^{(n)} = X_s$ für $s\le T$ und somit (9.3). Wegen $\Omega = \cup_n \{\hat{X}_T\le n\}$ ist alles gezeigt. □

9.8 Bemerkung. Die Itô–Formel bleibt richtig, wenn man die Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial t}f = \dot{f}$ ersetzt durch die folgende Bedingung: Es existiere eine Funktion $\dot{f}(t,x)$ mit

$f(t,x)–f(s,x) = \int_s^t \dot{f}(u,x)\,ds \quad \forall\, s\le t,\ \forall\, x$; dabei sei $\dot{f}(t,\cdot)$ stetig und für $\eta_K(t,\delta) := \max_{x,y\in[-K,K],\,|x-y|\le\delta} |\dot{f}(t,x)–\dot{f}(t,y)|$ gelte: $\int_0^t \eta_K(u,\delta)\,du \to 0$ für $\delta\to 0$, $\forall\, K<\infty$, $\forall\, t\ge 0$.

Der Beweis ist eine Übungsaufgabe. □

Beispiel. Darstellung von $(W_t^2–t)$.

Wähle X=W, also $X_0=0$, $Z\equiv 0$, $Y\equiv 1$, und $f(t,x)=f(x)=x^2$, also $f'(x)=2x$, $f''\equiv 2$. Nach der Itō–Formel ergibt sich dann: $f(X_t) = 0 + \int_0^t \tfrac{1}{2}\cdot 2\,ds + \int_0^t 2X_s\,dW_s$, d.h.

$W_t^2 = t + 2\cdot\int_0^t W\,dW$. Also erhält man für das Mart $(W_t^2–t)$ die folgende Darstellung:

(9.9) $\qquad W_t^2 – t = 2\cdot\int_0^t W\,dW \quad$ oder $\quad dW_t^2 = 2\,W_t\,dW_t + dt$,

wobei sogar $W\in\mathscr{L}^{<2>}$ gilt wegen $E\left[\int_0^t W_s^2\,ds\right] = \int_0^t E[W_s^2]\,ds = \int_0^t s\,ds = \tfrac{1}{2}t^2 <\infty$.

Durch den Term dt unterscheidet sich (9.9) von der klassischen Kettenregel. □

Beispiel. Die Geometrische Brownsche Bewegung.

Sei $(bt+\sigma W_t)$ die BB mit Drift $b\in\mathbb{R}$ und Dispersionskoeffizienten $\sigma>0$. Dann heißt

(9.10a) $\qquad S_t = S_0\cdot\exp\{bt+\sigma W_t\}$ mit einer reellen $\mathfrak{F}_0$–mb Zva $S_0>0$

Geometrische BB. Es gilt offenbar stets $S_t>0$.

Wir schreiben $S_t = \exp\{X_t\} = f(X_t)$ mit $X_t = \log(S_0) + bt + \sigma W_t$. Dies ist ein spezieller Itō–Prozeß mit $Z\equiv\mu$, $Y\equiv\sigma$ und $\dot{f}\equiv 0$, $f'=f''=f$. Die Itô–Formel liefert nun:

$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \{b\cdot f(X_s) + \tfrac{1}{2}\sigma^2\cdot f(X_s)\}\,ds + \int_0^t \sigma\cdot f(X_s)\,dW_s$, d.h.

$S_t = S_0 + (b+\tfrac{1}{2}\sigma^2)\cdot\int_0^t S_s\,ds + \sigma\cdot\int_0^t S\,dW$, oder

(9.10b) $\qquad dS_t = \mu\cdot S_t\,dt + \sigma\cdot S_t\,dW_t$ mit $\mu=b+\tfrac{1}{2}\sigma^2$.

Es kann also der Fall $\mu>0$ auftreten, der einen Aufwärtstrend und damit eine Instabilität im determistischen Problem $d\xi_t=\mu\cdot\xi_t\,dt$, also $\xi_t=\xi_0\cdot\exp\{\mu t\}$, bedeutet, aber $b<\mu-\frac{1}{2}\sigma^2>0$ gilt, was einen Abwärtstrend im stochastischen Problem (19.9a) nach sich zieht. Der Störterm dW kann also eine Stabilisierung mit sich bringen.
Die geometrische BB wird oft zur Beschreibung von Kursschwankungen von Wertpapieren herangezogen, weil einerseits $S_t>0$ und andererseits dS_t proportional zu S_t ist.

Beispiel. Lineare Gleichungen.
Zunächst soll das folgende Anfangswertproblem in Integralform im Sinne von Carathéodory betrachtet werden [beachte dabei 8.7]:

$$\xi(t) = \xi(0) + {}_0\int^t [B(s)\cdot\xi(s) + \beta(s)]\,ds\,,\ 0\le t\le T,\ \text{mit}\ {}_0\int^T [\,|\beta(s)| + |B(s)|\,]\,ds < \infty\,.$$

Als Lösung erhält man

$$\xi(t) := \varphi(t)\,[\xi(0) + {}_0\int^t \beta(s)/\varphi(s)\,ds]\,,\ \text{wobei}\ \ \varphi(t) := \exp\{{}_0\int^t B(s)\,ds\}$$

Lösung der homogenen Gleichung $\varphi(t) = 1 + {}_0\int^t B(s)\cdot\varphi(s)\,ds$ ist.

Die letzte Aussage läßt sich auch aus der Itô–Formel herleiten. Die erste folgt dann mit Hilfe von Fubini. Jetzt soll diese DGl. mit einem additiven Rauschen betrachtet werden der Form:

(9.11a) $$dV_t = [B(t)\cdot V_t + \beta(t)]\,dt + \sigma(t)\,dW_t \ \text{mit}\ {}_0\int^T \sigma^2(t)\,dt < \infty.$$

Als Lösung ergibt sich mit der Itô–Formel:

(9.11b) $$V_t = \varphi(t)\cdot[V_0 + {}_0\int^t \beta(s)/\varphi(s)\,ds + {}_0\int^t \sigma(s)/\varphi(s)\,dW_s] =: \varphi(t)\cdot X_t.$$

Dabei ist das stochastische Integral als Mart wohl definiert, da $1/\varphi$ in $[0,T]$ beschränkt ist.

Zum Beweis: X ist ein Itô–Prozeß der Form (9.1) mit: $X_0 := V_0$, $Z_s:=\beta(s)/\varphi(s)$ und $Y_s:=\sigma(s)/\varphi(s)$. Offenbar gilt dann: $V_t =: f(t,X_t)$ mit $f(t,x)=\varphi(t)\cdot x$. Aus der Itô–Formel, falls B stetig ist, oder sonst aus 9.8 folgt:

$$\begin{aligned} V_t &= V_0 + {}_0\int^t [\dot\varphi(s)\cdot X_s + \varphi(s)\cdot\beta(s)/\varphi(s)]\,ds + {}_0\int^t \varphi(s)\cdot\sigma(s)/\varphi(s)\,dW_s \\ &= V_0 + {}_0\int^t [B(s)\cdot V_s + \beta(s)]\,ds + {}_0\int^t \sigma(s)\,dW_s.\ [] \end{aligned}$$

Beispiel. Der Brownsche Exponentialprozeß.

Sei $Y\in\mathcal{P}^2$, d.h. $Z := -\frac{1}{2}Y^2\in\mathcal{P}^1$, $f(t,x) = f(x) = e^x$ und $X_t = -\frac{1}{2}\cdot{}_0\int^t Y^2\,d\lambda + {}_0\int^t Y\,dW$,

(9.12a) $$G_t := \exp\{-\tfrac{1}{2}\cdot{}_0\int^t Y^2\,d\lambda + {}_0\int^t Y\,dW\} = f(X_t)\,.$$

Dann gilt $\dot f\equiv 0$, $f'=f''=f$ und somit nach der Itô–Formel:

$$G_t = 1 + {}_0\int^t\{G\cdot Z + \tfrac{1}{2}G\cdot Y^2\}\,d\lambda + {}_0\int^t G\cdot Y\,dW,\ \text{d.h.}$$

(9.12b) $G_t = 1 + {}_0\int^t G\cdot Y\, dW$ oder $dG_t = Y_t\cdot G_t\, dW_t$.

Wäre $dW_t = \xi_t\cdot dt$ [vgl. den Beginn von §8], so erhielte man als Lösung von (9.11b): $\tilde G_t = \exp\{{}_0\int^t Y\, dW\}$. Für das stochastische Integral wird die Rolle von $\tilde G$ [oder $\exp\{u\cdot W_t\}$ im Falle $Y\equiv u$] durch G_t [bzw. $\exp\{u\cdot W_t - \frac12 u^2 t\}$] übernommen.

G ist ein nicht–negatives lokales Mart und somit nach 6.11a ein Supermart. Im Zusammenhang mit der Girsanov–Transformation wird in §10 untersucht, wann G sogar ein Mart ist. Insbesondere wird sich $G^u := (\exp\{u\cdot W_t - \frac12 u^2 t\},\ t\ge 0)$ als ein Mart erweisen. []

§10 Martingal–Charakterisierung der Brownschen Bewegung , Girsanov–Transformation.

Sei wieder $(\Omega.\mathfrak{F},P)$ mit einer Filterung $\mathbb{F}=\mathbb{F}_+$ vorgegeben und $T\le\infty$.

10.1 Satz. (Lévy). Sei $W\in \mathcal{M}_c^{loc}$ mit $(W_t^2 - t,\ t\ge 0)\in \mathcal{M}_c^{loc}$. Dann gilt:

(i) $W_t - W_s$ ist unabhängig von $\mathfrak{F}_s$, $\forall\ 0\le s\le t$;

(ii) $W_t - W_s \sim N(0,t-s)$, $\forall\ 0\le s\le t$;

d.h. (W,𝔽) ist eine 1–dim. standard. B.B. .

10.2 Anmerkung. Durch Verkleinerung von Ω um eine Nullmenge kann erreicht werden, daß W überall stetige Pfade hat. Man nennt einen adaptierten Prozeß W mit rechtsstetigen und f.s. stetigen Pfaden sowie mit $W_0=0$ f.s. und den Eigenschaften (i) und (ii) aus 10.1 aber auch eine BB. []

Bew. von 10.1. Nach Def. von $\mathcal{M}_c^{loc}$ gilt $W_0=0$ f.s. . Es liegt die Situation von 7.3 vor mit $A_t=t$ $\forall t$; also ist: $W\in \mathcal{M}_c^{\,2}$ mit Varianzenprozeß A. Also sind die Voraussetzungen von §§ 8,9 an W erfüllt. Als Hilfsmittel verwendet man charakteristische Funktion; dazu wird das stochastische Integral mit komplexwertigen Integranden Y benötigt. Die Def. ergibt sich zwanglos durch eine Aufspaltung in Real– und Imaginärteil gemäß:

$\int Y\, dW := \int \Re(Y)\, dW + i\cdot\int \Im(Y)\, dW$, falls die Integrale auf der rechten Seite erklärt sind.

Wähle nun $f(x) = e^{iux}$ mit $u\in\mathbb{R}$, $i=\sqrt{-1}$; dann gilt: $f'(x) = iuf(x)$, $f''(x) = -u^2 f(x)$. Mit einer Aufspaltung in Real– und Imaginärteil und der Itô–Formel ergibt sich:

(10.3) $\exp\{iuW_t\} - \exp\{iuW_s\} = iu\cdot {}_s\int^t \exp\{iuW\}\, dW - \frac12 u^2\cdot {}_s\int^t \exp\{iuW\}\, d\lambda.$

Wegen $|f|=1$ sind ${}_0\int^\cdot \Re(\exp\{iuW\})\, dW$ und ${}_0\int^\cdot \Im(\exp\{iuW\})\, dW$ Mart'e und man erhält:

$E_{s,t} := E\big[{}_s\int^t \exp\{iuW\}\, dW \mid \mathfrak{F}_s\big] = 0$ f.s. .

Multipliziert man (10.3) mit $\exp\{-iuW_s\}$. und integriert über $A\in\mathfrak{F}_s$, so folgt:

$\varphi(t) - \varphi(s) := E\left[\exp\{iu(W_t - W_s)\};A\right] - P[A]$

$= iu \cdot E\left[E_{s,t} \cdot \exp\{-iuW_s\};A\right] - \frac{1}{2}u^2 \cdot E\left[\int_s^t \exp\{iu(W_r - W_s)\}\, dr;A\right]$

$= -\frac{1}{2}u^2 \cdot \int_s^t E\left[\exp\{iu(W_r - W_s)\};A\right] dr = -\frac{1}{2}u^2 \cdot \int_s^t \varphi(r)\, dr.$

Also muß $\varphi(t) = \varphi(s) \cdot \exp\{-\frac{1}{2}u^2(t-s)\}$ $t \geq s$, gelten, d.h.:

$E\left[\exp\{iu(W_t - W_s)\};A\right] = P[A] \cdot \exp\{-\frac{1}{2}u^2(t-s)\}$, wobei $u \mapsto \exp\{-\frac{1}{2}u^2(t-s)\}$ die charakterische Funktion zu $N(0,t-s)$ ist.

Für $A=\Omega$ erhält man nun Aussage (ii). Für $P[A]>0$ und $P'[\,\cdot\,] := P[\,\cdot\,|\,A]$ ergibt sich:

$E'\left[\exp\{iu(W_t - W_s)\}\right] = \exp\{-\frac{1}{2}u^2(t-s)\}$, also $P'[W_t - W_s \in B] = N(0,t-s)[B]$, d.h.
$P[A \cap \{W_t - W_s \in B\}] = P[A] \cdot P[W_t - W_s \in B]$ für $B \in \mathfrak{B}_1$; dies ist Aussage (i). $[]$

Von nun an kann und soll anstelle eines Prozesses W, der die Voraussetzungen von 10.1 erfüllt, gleich eine 1–dim. standard. BB genommen werden.

10.4 Korollar. Sei W ein reeller Prozeß mit rechtsstetigen und f.s. stetigen Pfaden sowie $W_0=0$ f.s. , so daß $\forall\, u \in (-1,1)$ der Exponentialprozeß G^u mit $G_t^u = \exp\{uW_t - \frac{1}{2}\, u^2 \cdot t\}$, $t \geq 0$, ein lokales Mart ist. Dann ist W eine 1–dim. standard. BB.

Die Bedingung von 10.4 ist nach dem Beispiel aus §9 auch notwendig.

Bew. von 10.4. (i) Eine von u unabhängige Lokalisierungsfolge (τ_n) für G^u erhält man durch $\tau_n := \inf\{t \geq 0, |W_t| > n\}$ [vgl. 6.9]. Es gilt: $0 \leq G^u_{t \wedge \tau_n} \leq e^n$ f.s. .

Mit 6.14 folgt dann, daß $(G^u_{t \wedge \tau_n}, t \geq 0)$ ein Mart ist [vgl. Übung].

(ii) Es soll nun gezeigt werden, daß $(W_{t \wedge \tau_n}, t \geq 0)$ und $(W^2_{t \wedge \tau_n} - t \wedge \tau_n, t \geq 0)$ Mart'e sind. Dann folgt aus 10.1 die Behauptung. Sei dazu $s \geq 0$ und $A \in \mathfrak{F}_s$. Nach (i) ist

$E\left[G^u_{t \wedge \tau_n};A\right] = E\left[\exp\{uW_{t \wedge \tau_n} - \frac{1}{2}\, u^2 \cdot t \wedge \tau_n\};A\right]$ unabhängig von $t \geq s$.

Die Differentiation nach u ergibt [vgl. W.th.I 10.16]:

(10.5a) $E\left[\{W_{t \wedge \tau_n} - u \cdot t \wedge \tau_n\} \cdot G^u_{t \wedge \tau_n};A\right]$ ist unabhängig von $t \geq s$.

Eine nochmalige Differentiation liefert:

(10.5b) $E\left[\{(W_{t \wedge \tau_n} - u \cdot t \wedge \tau_n)^2 - t \wedge \tau_n\} \cdot G^u_{t \wedge \tau_n};A\right]$ ist unabhängig von $t \geq s$.

Setzt man nun in (10.5a,b) u=0, so erhält man die gewünschte Martingaleigenschaft:

$E\left[W_{t \wedge \tau_n};A\right]$ und $E\left[W^2_{t \wedge \tau_n} - t \wedge \tau_n;A\right]$ ist unabhängig von $t \geq s$. $[]$

Im folgenden wird die Integralgleichung für $\exp\{\,\cdot\,\}$ durch eine Ungleichung ersetzt.

10.6 Gronwall–Ungleichung. Seien $0\le\alpha,\beta,T<\infty$ und $g:[0,T]\mapsto\mathbb{R}$ eine mb beschränkte Funktion mit: $0 \le g(t) \le \alpha + \beta\cdot{}_0\int^t g(s)\,ds$, $0\le t\le T$.

Dann gilt: $g(t) \le \alpha\cdot e^{\beta t}$, $o\le t\le T$, also $g\equiv 0$ im Falle $\alpha=0$.

Bew.: Für spätere Zwecke betrachten wir allgemeiner eine Folge $g_k:[0,T]\mapsto\mathbb{R}$ mit

$0 \le g_k(t) \le \alpha + \beta\cdot{}_0\int^t g_{k-1}(s)\,ds$, $0 \le g_0(t) \le C_0 < \infty$, $0\le t\le T$.

Durch Induktion erhält man dann:

$$g_k(t) \le \alpha\cdot\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(\beta t)^m}{m!} + \frac{\beta^k}{(k-1)!}\cdot{}_0\int^t g_0(s)(t-s)^{k-1}ds \le \alpha\cdot\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(\beta t)^m}{m!} + \frac{(\beta t)^k}{k!}\cdot C_0\,.$$

Mit $g_k:\equiv g$ und $k\to\infty$ folgt jetzt die Beh. . []

10.7 Satz. Sei Y beschränkter progressiver Prozeß, W 1–dim. standard. B.B. und G der Brownsche Exponentialprozeß zu Y, also: $G_t := \exp\{{}_0\int^t Y\,dW - \tfrac12\cdot{}_0\int^t Y^2\,d\lambda\}$, $t\ge 0$.

Dann ist G ein Mart.

Bew. Sei Y^2 durch K beschränkt. Nach dem Beispiel in §9 ist $G = 1 + {}_0\int^{\cdot} G\cdot Y\,dW$, also stets ein lokales Mart. Gemäß 8.18 und (8.20) erhält man eine Lokalisierungsfolge (τ_n) durch:

$\tau_n := n \wedge T \wedge \inf\{t\ge 0;\ {}_o\int^t G^2\cdot Y^2\,d\lambda > n\}$.

In Hinblick auf 6.13(iii) genügt es jetzt $\sup_n E[G^2_{t\wedge\tau_n}] < \infty\ \forall t$ zu zeigen.

Aus der fundamentalen Isometrie (8.23) erhält man für $\tau=\tau_n$:

$$E[\{{}_0\int^{t\wedge\tau} G\cdot Y\,dW\}^2] = E[{}_0\int^{t\wedge\tau} G_s^2\cdot Y_s^2\,ds] \le n$$

und wegen $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$ sowie $G^2_{s\wedge\tau}\ge 0$:

$E[G^2_{t\wedge\tau}] \le 2 + 2K\cdot E[{}_0\int^t G^2_{s\wedge\tau}\,ds] = 2 + 2K\cdot{}_0\int^t E[G^2_{s\wedge\tau}]\,ds$.

Für $g(t) := E[G^2_{t\wedge\tau}] \le 2(1+n)$ gilt also: $g(t) \le 2 + 2K\cdot{}_0\int^t g(s)\,ds$. Aus 10.8 folgt somit:

$E[G^2_{t\wedge\tau}] \le 2\cdot e^{2Kt}$. Diese Schranke ist unabhängig von n. []

10.8 Bemerkung (Novikov). Die Aussage von 10.7 bleibt richtig, wenn die Beschränktheit von Y ersetzt wird durch [vgl. Karatzas & Shreve S. 199]

$E[\exp\{\tfrac12\cdot{}_0\int^t Y^2\,d\lambda\}] < \infty$, $\forall\, t\ge 0$. []

10.9 Motivation zur Girsanov–Transformation.

Seien $\xi_1,\dots,\xi_n$ iid Zva auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit $\xi_k\sim N(0,1)$, $y_1,\dots,y_n\in\mathbb{R}$.

Nun wird ein W–Maß $\tilde P$ auf $(\Omega,\mathfrak{F})$ definiert durch:

(10.10) $$d\tilde P = \Pi_{k=1}^n \exp\{y_k\xi_k - \tfrac12 y_k^2\}\,dP = \exp\{\textstyle\sum_{k=1}^n y_k\xi_k - \frac12\sum_{k=1}^n y_k^2\}\,dP.$$

Setzt man nun $\tilde{\xi}_k := \xi_k - y_k$, so soll nun gezeigt werden:

die Zva $\tilde{\xi}_1,...,\tilde{\xi}_n$ sind unter $\tilde{P}$ iid Zva mit $\tilde{\xi}_k \sim N(0.1)$.

$$\tilde{P}\left[\cap_k \{\tilde{\xi}_k \in B_k\}\right] = \int \Pi_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{\xi_k - y_k \in B_k\}} \cdot \Pi_{k=1}^n \exp\{y_k\xi_k - \tfrac{1}{2}y_k^2\}\, dP$$

$$= \Pi_k \int \mathbf{1}_{\{x - y_k \in B_k\}} \cdot \exp\{y_k x - \tfrac{1}{2}y_k^2\}\, (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\{-\tfrac{1}{2}x^2\}\, dx$$

$$= \Pi_k \int \mathbf{1}_{\{x - y_k \in B_k\}} \cdot (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\{-\tfrac{1}{2}(x - y_k)^2\}\, dx$$

$$= \Pi_k \int \mathbf{1}_{\{z \in B_k\}} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\{-\tfrac{1}{2}z^2\}\, dz = \Pi_k\, N(0,1)[B_k]\ ,$$

insbesondere gilt $\tilde{P}[\Omega]=1$. Setzt man nun $W_m := \sum_{k=1}^m \xi_k$, so folgt: Die Verteilung von $(W_m - \sum_{k=1}^m y_k,\ 1\le m\le n)$ ist unter $\tilde{P}$ die gleiche wie die von $(W_m, 1\le m\le n)$ unter P. $[\,]$

Der Sachverhalt von 10.6 soll jetzt auf die BB übertragen werden.

10.11 Satz. (Girsanov). Sei $T<\infty$, W eine 1–dim. standard. BB, Y ein beschränkter progressiver Prozeß und G der Brownsche Exponentialprozeß zu Y, also:

$G_t := \exp\{\int_0^t Y\, dW - \tfrac{1}{2}\cdot\int_0^t Y^2\, d\lambda\}$, $t\ge 0$. Sei ferner $\tilde{P}$ das W–Maß mit $d\tilde{P} = G_T\, dP$ und $\tilde{W} := (W_t - \int_0^t Y\, d\lambda,\ 0\le t\le T)$. Dann ist $(\tilde{W},\mathbb{F})$ unter $\tilde{P}$ eine standard. BB.

Die Beschränktheit von Y läßt sich wegen 10.8 durch die dortige Bedingung ersetzen.

Wegen $G_T>0$ ist $\tilde{P}$ sogar ein zu P äquivalentes Maß, hat also die gleichen Nullmengen wie P.

Bew. von 10.11. Nach 10.7 ist G ein Mart, somit gilt: $E[G_T] = E[G_0] = 1$. Also ist $\tilde{P}$ ein W–Maß. Nach 10.4 genügt es nun zu zeigen, daß $\tilde{G}^u$ mit $\tilde{G}_t = \exp\{u\tilde{W} - \tfrac{1}{2}u^2 t\}$ unter $\tilde{P}$ ein Mart ist. Zum Beweis dient das folgende

10.12 Lemma. Sei G, $\tilde{P}$ und P wie in 10.11; dann gilt: $d\tilde{P}\,\big|_{\mathfrak{F}_t} = G_t\, dP\,\big|_{\mathfrak{F}_t}$.

Ferner ist M Mart unter $\tilde{P}$, wenn $M\cdot G$ Mart unter P ist.

Bew. (i) Für $t<T$ und $A\in\mathfrak{F}_t$ gilt: $\tilde{P}[A] = E[G_T;A] = E[G_t;A]$, da G Mart unter P.

(ii) Sei nun $M\cdot G$ Mart unter P, $s<t$, $A\in\mathfrak{F}_s$. Dann folgt wegen Teil (i) und der Vorauss.: $\tilde{E}[M_s;A] = E[M_s\cdot G_s;A] = E[M_t\cdot G_t;A] = \tilde{E}[M_t;A]$; also ist M Mart unter $\tilde{P}$. $[\,]$

Bew. von 10.11 (Fortsetzung). Nach 10.12 genügt es nun z.z., daß $G^u\cdot G_t$ ein Mart unter P ist. Schreibt man $G=G^Y$, so ergibt sich:

$$\tilde{G}_t^u \cdot G_t^Y = \exp\{u\cdot\tilde{W}_t - \tfrac{1}{2}u^2 t\}\cdot\exp\{{}_0\!\int^t Y\,dW - \tfrac{1}{2}\cdot{}_0\!\int^t Y^2\,d\lambda\}$$
$$= \exp\{u\cdot W_t - u\cdot{}_0\!\int^t Y\,d\lambda - \tfrac{1}{2}u^2 t + {}_0\!\int^t Y\,dW - \tfrac{1}{2}\cdot{}_0\!\int^t Y^2\,d\lambda\}$$
$$= \exp\{{}_0\!\int^t (Y+u)\,dW - \tfrac{1}{2}\cdot{}_0\!\int^t (Y+u)^2\,d\lambda\} = G^{Y+u}.$$

Mit Y ist auch Y+u beschränkter progressiver Prozeß, somit G^{Y+u} nach 10.7 Mart. []

10.13 Korollar. Es liege die Situation von 10.11 vor. Dann gilt:

$${}_0\!\int^t X\,dW = {}_0\!\int^t X\,d\tilde{W} + {}_0\!\int^t X\cdot Y\,d\lambda \quad, 0\le t\le T, \text{ f.s. für } X\in\mathscr{P}^2, \text{ d.h. } dW = d\tilde{W} + Y\,d\lambda.$$

Der Prozeß $X.W = {}_0\!\int^{\cdot} X\,dW$ ist auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ und der Prozeß $X.\tilde{W} = {}_0\!\int^t X\,d\tilde{W}$ ist auf $(\Omega,\mathfrak{F},\tilde{P})$ definiert gemäß §8. Wegen der Äquivalenz von P und $\tilde{P}$ hängen die Aussagen "f.s.", "bis auf Nichtunterscheidbarkeit eindeutig" sowie "$X\in\mathscr{P}^2$" nicht von der Wahl von P oder $\tilde{P}$ ab.

Bew. von 10.13. Für $X_t = H_t = \sum_{s\in\Pi}\xi_{s_}\cdot\mathbf{1}_{(s_,s]}(t)\in\mathscr{H}$ gilt:

$$(H.\tilde{W})_t = \sum_{s\in\Pi}\xi_{s_}\cdot(\tilde{W}_{s\wedge t}-\tilde{W}_{s_\wedge t}) = \sum_{s\in\Pi}\xi_{s_}\cdot(W_{s\wedge t}-W_{s_\wedge t}) - \sum_{s\in\Pi}\xi_{s_}\cdot{}_{s_\wedge t}\!\int^{s\wedge t} Y\,d\lambda =$$

$(H.W)_t - {}_0\!\int^t H\cdot Y\,d\lambda$. Der allgemeine Fall ist nun eine Übungsaufgabe. []

Beispiel. Die Black–Scholes–Formel in zeitstetigen Modell.

Das folgende Diagramm zeigt Wege zur Berechnung der Black–Scholes– Formel:

zeitdiskretes Modell	$\longrightarrow$	zeitdiskrete Formel
$\downarrow$		$\downarrow$
zeitstetiges Modell	$\longrightarrow$	zeitstetige Formel

In der W–theorie I sind wir den Weg vom zeitdiskreten Modell zur zeitdiskreten Binomialformel mit Hilfe einfacher Arithmetik und dann von der zeitdiskreten Formel zur zeitstetigen Black–Scholes–Formel durch einen Grenzübergang analog zum Beweis des zentralen Grenzwertsatzes gegangen. Der Grenzübergang vom zeitdiskreten Modell zum zeitstetigen Modell wird durch das Satz von Donsker [vgl. W.th. II 8.13] geliefert.
Hier soll nun das zeitstetige Modell als Basis gewählt werden und in diesem Modell die zeitstetige Formel hergeleitet werden.
Folgende Situation liegt zugrunde. Es bestehen zwei Anlagemöglichkeiten:
(i) Eine risikolose Anlage in ein festverzinsliches Wertpapier (bond) mit der **Zinsrate r.**

Ein Geldeinheit, die man erst in t Zeiteinheiten erhält, hat gegenwärtig einen Wert von e^{-rt}. Ann.: Das gleiche r gilt auch, wenn Geld geliehen wird. (Modelleinschränkung).
(Zur Vereinfachung kann man sich zunächst r=0 denken.)

(ii) Eine risikobehaftete Anlage Anteilen in ein kursabhängiges Wertpapier (stock) [z.B. Aktien oder Devisen] mit dem Kurs X_t. Wir stellen uns hier eine Investition in \$ vor.
Ann.: Der Prozeß X, der die **Kursentwicklung** beschreibt, ist eine geometrische BB

(10.14) $X_t := x_o \cdot \exp\{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\}$, $0 \le t \le T < \infty$, oder $dX_t = \mu \cdot X_t\, dt + \sigma \cdot X_t\, dW_t$.

[vgl. das Beispiel in §9]. Dabei ist $X_0 = x_0 > 0$ bekannt, W eine 1–dim. standard. BB mit o.E. stetigen Pfaden, $\sigma > 0$ die **Volatilität** und $\mu \in \mathbb{R}$ der **Trendkoeffizient**. Der Term $\mu \cdot X_t\, dt$ beschreibt die Trendprognose und der Term $\sigma \cdot X_t\, dW_t$ die Fluktuation.
Die Bank bietet eine (Europäische) (call–) **Option**. Dabei muß der Käufer z.Zt. t=0 einen Preis v_0 zahlen und hat dafür das Recht, zum **Fälligkeitstermin** T etwa c\$ für einen festen Wahrnehmungspreis K unabhängig von dem vorliegenden Kurs X_T für 1\$ zu kaufen. Dann ist $[c \cdot X_T - K]^+$ der Gewinn des Käufers.

Problem: Was ist ein **fairer Preis** v_0 ? **Klassische Antwort:** $v_0 = E\,[e^{-rT}(c \cdot X_T - K)^+]$.

In der vorliegenden besonderen Situation gibt es andere Antwort. Die Bank braucht (im Prinzip) nicht tatenlos abzuwarten, ob der Kurs fällt, was günstig für die Bank ist, oder steigt, was günstig für den Käufer ist. Um den Verlust bei steigendem Kurs abzusichern (hedging), kann die Bank gemäß einer geschickten Strategie selbst Wertpapiere kaufen (in den stock investieren).
Sei $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_t,\ 0 \le t \le T)$ mit $\mathfrak{F}_t = \sigma(W_s, 0 \le s \le t)$.

Eine **Strategie** der Bank ist ein progressiver Prozeß $(\xi,\eta) = \{(\xi_t,\eta_t),\ 0 \le t \le T\}$ mit $\xi \cdot X \in \mathcal{P}^2$ und $\eta \in \mathcal{P}^1$. Dabei ist ξ_t der Betrag, der z.Zt. t in \$ gehalten wird, und η_t der Betrag, der z.Zt. t in DM gehalten wird. Dann ist der **Wertprozeß** $V = V^{\xi,\eta}$ gegeben durch:

$$V_t = \eta_t + \xi_t \cdot X_t\,,\ 0 \le t \le T.$$

Dabei startet die Bank z.Zt. 0 mit dem Kapital $V_0 = v_0$, das sie von dem Käufer als Prämie erhält.
Eine Strategie (ξ,η) heißt **zulässig**, falls $V_t \ge 0\ \forall t \ge 0$ f.s., und **selbstfinanzierend**, falls gilt:

(10.15) $dV_t = \xi_t\, dX_t + r \cdot \eta_t\, dt \quad \forall t \ge 0,$

d.h. (ξ,η) ist selbstfinanzierend, falls sich die Veränderungen bei V_t lediglich aus den Kursänderungen und dem Zinsgewinn und nicht aus Zuschuß oder Abzug von Kapital ergeben.

Ist (ξ,η) selbstfinanzierend, so ist V ein Itô–Prozeß gemäß

$$V_t = v_0 + {}_0\!\int^t \xi_s\, dX_s + r \cdot {}_0\!\int^t \eta_s\, ds = v_0 + \sigma \cdot {}_0\!\int^t \xi_s \cdot X_s\, dW_s + {}_0\!\int^t [\mu \cdot \xi_s \cdot X_s + r \cdot \eta_s]\, ds.$$

Die Darstellung vereinfacht sich, wenn man den abgezinsten Kursprozeß und Wertprozeß einführt. Sei dazu $g(t,x) = e^{-rt}x$ (also $\dot g(t,x) = -rg(t,x)$, $g'(t,x) = e^{-rt}$, $g'' = 0$) und

$$X_t^r := g(t,X_t) = x_0 \cdot \exp\{\sigma W_t + (\mu - r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t\}\,,\ V_t^r := g(t,V_t)\,.$$

Aus der Itô–Formel folgt: $dV_t^r = e^{-rt}[\xi_t\, dX_t - r\cdot\xi_t\cdot X_t\, dt] = \xi_t\, dX_t^r$, d.h.:

(10.16) $V_t^r = v_0 + {}_0\int^t \xi_s\, dX_s^r$, $t\geq 0$.

Als Folgerung ergibt sich: Ist (ξ,η) selbstfinanzierend, so ist der abgezinste Wertprozeß bestimmt durch v_0 und ξ gemäß $V_t^r = v_0 + {}_0\int^t \xi\, dX^r$. Jedes ξ mit

(10.17) $\xi\cdot X \in \mathcal{P}^2$, $v_0 + {}_0\int^t \xi\, dX^r \geq 0 \quad \forall t$ f.s.

kann erweitert weden zu einer zulässigen, selbstfinanzierenden Strategie (ξ,η) gemäß

(10.18) $\eta_t := e^{rt}[v_0 + {}_0\int^t \xi\, dX^r] - \xi_t\cdot X_t$, $t\geq 0$, $[\eta\in \mathcal{P}^1$ wegen (8.17)$]$.

Gesucht sind nun $v_0\geq 0$ und ξ mit (10.17), so daß

(10.19) $V_T^r = v_0 + {}_0\int^T \xi\, dX^r = e^{-rT}(c\cdot X_T - c)^+$, d.h. $V_T = (c\cdot X_T - K)^+$

gilt. Zahlt dann der Käufer für die Option v_0 als Prämie, so kann die Bank den Zahlungsanspruch (contingent claim) $(c\cdot X_T - K)^+$ risikolos absichern.

Investiert sie nämlich in DM und \$ gemäß der Strategie (ξ,η), die durch (10.19) und (10.18) gegeben ist, so hat sie zusammen mit der Prämie v_0 gerade das Kapital $V_T = (c\cdot X_T - K)^+$ erwirtschaftet.

Definition. Bei Vorliegen von $v_0\geq 0$ und ξ mit (10.17) und (10.19) wird v_0 als **fairer Preis** für die Option (auf c\$) bezeichnet.

Gesucht ist also eine Darstellung (10.19). Wir machen dazu den Ansatz mit $K^r := e^{-rT}\cdot K$:

$e^{-rT}(c\cdot X_T - K)^+ = (c\cdot X_T^r - K^r) = f(T,X_T^r)$ für ein $f\in C^{1,2}([0,T)\times(0,\infty))\cap C([O,T]\times(0.\infty))$.

Dann folgt mit der Itô–Formel:

$f(t,X_t^r) = f(0,X_0^r) + {}_0\int^t f'(s,X_s^r)\, dX_s^r + {}_0\int^t [\dot f(s,X_s^r) + \tfrac{1}{2}f''(s,X_s^r)\sigma^2(X_s^r)^2]\, ds$, $t\leq T$.

Die Itô–Formel gilt zunächst nur für $t<T$, aber aus Stetigkeitsgründen auch für $t=T$. Kann f so gewählt werden, daß $[...]$ verschwindet, so hat man eine Darstellung der Form (10.19) gewonnen. Man betrachtet also das Cauchy–Problem:

(10.20) $\dot f(s,x) + \tfrac{1}{2}f''(s,x)\sigma^2x^2 = 0$ auf $[0,T)\times(0.\infty)$

$f(T,x) = (c\cdot x - K^r)^+$, $f\in C^{1,2}([0,T)\times(0,\infty))\cap C([0,T]\times(0.\infty))$.

Hat man eine Lösung, so setzt man:

(10.21) $v_0 := f(0,X_0^r)$ und $\xi_t := f'(s,X_t^r)$, somit $V_t^r = f(t,X_t^r)$, $t\geq 0$,

in Hinblick auf (10.16). Dann ist offenbar (10.19) erfüllt, wobei ξ sogar stetige Pfade hat, also wegen (8.17) $\xi\cdot X\in\mathcal{P}^2$ gilt. Das Problem (10.20) soll nun mit w–theoretischen Methoden gelöst werden. Wir gehen aus von der folgenden

Annahme: f sei eine Lösung von (10.20) mit $|f(t,x)| \le \alpha+\beta x$, $0\le t\le T$, für gewisse $\alpha.\beta\in\mathbb{R}$.

Es gilt: $X_t^r = x_0\cdot\exp\{\sigma(W_t+\vartheta t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}$ mit $\vartheta := \frac{\mu-r}{\sigma}$. Ist $\vartheta=0$, so ist X^r als Brownscher Exponentialprozeß ein lokales Mart. Dies kann durch eine Girsanov–Transformation erreicht werden. Dazu setzt man

(10.22) $W_t + \vartheta t =: W_t^*$, also $X_t^r = x_0\cdot\exp\{\sigma\cdot W_t^* - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}$.

Nach Girsanov 10.11 ist W* eine standard BB unter P* mit $dP^* := \exp\{-\vartheta W_T - \frac{1}{2}\vartheta^2 T\}\, dP$.

10.23 Proposition. (a) X^r ist ein Mart unter P*.

(b) Definiert v_0 und ξ wie in (10.21) und V^r wie in (10.16), so ist V^r ein Mart unter P*.

Bew. a) Wegen (10.22) und 10.7 ist X^r ein Mart unter P*.

b) (10.22) besagt: $dX_t^r = \sigma\cdot X_t^r\, dW_t^*$. Aus 10.16 folgt mit 10.13: $dV_t^r = \xi_t\, dX_t^r = \sigma\cdot X_t^r\, dW_t^*$, also ist V_t^r als stochastisches Integral ein lokales Mart und nach (a) auch $\alpha+\beta\cdot X^r \pm V^r = \alpha+\beta\cdot X^r \pm f(\cdot,X^r)$. Nach unserer Annahme ist dieser Prozeß ≥ 0, somit gemäß 6.11a auch Supermart. Also ist, wieder nach a), $\pm V^r$ Supermart. []

Wegen der Eigenschaft 10.23a nennt man P* ein **Martingalmaß**.

10.24 Satz. $v_0 = f(0,x_0) = E^*\left[(c\cdot X_T^r - K^r)^+\right] =$

$= cx_0\cdot\Phi(\left[\log(cx_0/K^r) + \frac{1}{2}\sigma^2\cdot T\right]/\sigma\sqrt{T}) - K^r\cdot\Phi(\left[\log(cx_0/K^r) - \frac{1}{2}\sigma^2\cdot T\right]/\sigma\sqrt{T})$

$=: \pi(T,cx_0,K^r,\sigma)$; dabei ist Φ die Vf zu N(0,1) .

Bew. Aus 10.23b erhält man: $v_0 = E^*\left[V_T^r\right] = E^*\left[f(T,X_T^r)\right] = E^*\left[(c\cdot X_T^r - K^r)^+\right]$.

Dabei gilt $X_T^r = x_0\cdot\exp\{\sigma\cdot T^{\frac{1}{2}}\cdot Z - \frac{1}{2}\sigma^2\}$ mit $Z := T^{-\frac{1}{2}}\cdot W_T^* \sim N(0,1)$ unter P*. Mit

$A := \{c\cdot X_T^r - K^r > 0\} = \{Z > \left[\log(K^r/cx_0) + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right]/\sigma\cdot T^{\frac{1}{2}}\} =: \{Z>\zeta\}$ folgt:

$v_0 := E^*\left[(c\cdot X_T^r - K^r)^+\right] = E^*\left[cx_0\cdot\exp\{\sigma\cdot T^{\frac{1}{2}}\cdot Z - \frac{1}{2}\sigma^2 T\} - K^r;\, A\right]$

$= cx_0\cdot\int_\zeta^\infty \exp\{\sigma\cdot T^{\frac{1}{2}}\cdot z - \frac{1}{2}\sigma^2 T\}\cdot(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\cdot\exp\{-\frac{1}{2}z^2\}\, dz - K^r\cdot P^*\left[A\right]$

$= cx_0\cdot\int_\zeta^\infty (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\cdot\exp\{-\frac{1}{2}(z-\sigma\cdot T^{\frac{1}{2}})^2\}\, dz - K^r\cdot P^*\left[A\right]$

$= cx_0\cdot\int_{\zeta-\sigma T^{\frac{1}{2}}}^\infty (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\cdot\exp\{-\frac{1}{2}y^2\}\, dy - K^r\cdot P^*\left[Z>\zeta\right]$

$= cx_0\cdot(1-\Phi(\zeta-\sigma T^{\frac{1}{2}})) - K^r\cdot(1-\Phi(\zeta)) = cx_0\cdot\Phi(-\zeta+\sigma T^{\frac{1}{2}}) - K^r\cdot\Phi(-\zeta)$. []

Setzt man $\pi(t,cx,K^r,\sigma) := f(T-t,x)$ in Übereinstimmung mit $f(0,x) = \pi(T,cx,K^r,\sigma)$, so löst π ein Cauchy–Problem mit den Randwerten $\pi(0,z,K^r,\sigma) = (z-K^r)^+$. Aus 10.14 folgt die Gestalt von $\pi(T,cx,K^r,\sigma)$. Das legt nahe, daß $\pi(t,cx,K^r,\sigma)$ die gleiche Gestalt hat $\forall\ t>0$, also folgendes gilt: $f(t,x) = \pi(T-t,cx,K^r,\sigma) =$

$$cx\cdot\Phi(\left[\log(cx/K^r) + \tfrac{1}{2}\sigma^2\cdot(T-t)\right]/\sigma\sqrt{T-t}) - K^r\cdot\Phi(\left[\log(cx/K^r) - \tfrac{1}{2}\sigma^2\cdot(T-t)\right]/\sigma\sqrt{T-t})\ .$$

Man kann nun unmittelbar nachrechnen, daß f eine Löung des Cauchy–Problems (10.20) ist. Hier soll nur die Stetigkeit in t=T gezeigt werden.

Im Fall $cx>K^r$ ergibt sich: $\lim_{t\uparrow T} f(t,x) = cx\cdot\Phi(+\infty) - K^r\cdot\Phi(+\infty) = (cx-K^r)^+$,

im Fall $cx=K^r$: $cx\cdot\Phi(0) - K^r\cdot\Phi(0) = 0 = (cx-K^r)^+$

und im Fall $cx<K^r$: $cx\cdot\Phi(-\infty) - K^r\cdot\Phi(-\infty) = 0 = (cx-K^r)^+$.

Aus $0\le\Phi\le1$ folgt : $-K^r \le f(t,x) \le cx$. Somit erfüllt f die obige Annahme. Definiert man ξ und v_0 gemäß (10.21), so gelten 10.23 und 10.24. Es folgt: $V_t^r = E\left[V_T^r\,|\,\mathfrak{F}_t\right] = E\left[(...)^+\,|\,\mathfrak{F}_t\right] \ge 0$. Also ist (ξ,η) zulässig, und v_0 ist ein fairer Preis für die Option auf c$. Dabei ist cx_0 gerade der Kurswert von c$ z.Zt. 0. Setzt man die Definition von K^r ein, so erhält man mit $\alpha_\pm = r\pm\frac{1}{2}\sigma^2$:

$$v_0 = cx_0\cdot\Phi(\left[\log(cx_0/K) + \alpha_+\cdot T\right]/\sigma\sqrt{T}) - K^r\cdot\Phi(\left[\log(cx_0/K) + \alpha_-\cdot T\right]/\sigma\sqrt{T})\ .$$

Dies ist die **Black–Scholes–Formel** für die Bewertung der Option. Bemerkenswert ist, daß die Formel nicht vom Trendkoeffizienten μ abhängt.

Wie im klassischen Fall ist v_0 der Erwartungswert des diskontierten Gewinns $(X_T^r-K^r)^+ = e^{-rT}(X_T-K)^+$, jetzt aber unter dem Martingalmaß P*.
Eine Eindeutigkeit von v_0 ergibt sich aus:

10.25 Korollar. Sei (ξ',η') eine zulässige selbstfinanzierende Strategie und V' der Wertprozeß dazu. Aus der Absicherungseigenschaft: $V_T' \ge (cX_T-K)^+$ f.s., folgt: $v_0 \le v_0'$ mit $V_0' = v_0'$.

Bew. Da (ξ',η') selbstfinanzierend ist, folgt wie im Beweis von 10.23b, daß V'^r ein lokales Mart ist. Da zudem (ξ',η') zulässig ist, ist $V'^r \ge 0$ f.s. und somit nach 6.11a ein Supermart. unter P*. Es folgt: $v_0' = E^*\left[V_0'\right] \ge E^*\left[V_T'\right] \ge E^*\left[(cX_T-K)^+\right] \ge v_0$. $[]$

Würde die Bank nicht den fairen Preis für die Option nehmen, so ergäbe sich eine **Arbitrage**–Möglichkeit (free lunch). [Arbitrage ≅ Ausnutzung von Preis– oder Kursunterschieden]. Dann herrschte kein Marktgleichgewicht.

§ 11 Starke Lösungen stochastischer Differentialgleichungen.

Sei W eine 1–dim. standard. BB auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$, $\mathbb{F}=\mathbb{F}_+$ eine Filterung darauf, $T<\infty$. Eine Erweiterung der Resultate auf den Fall $T=\infty$ ist wie in §8 möglich.

Da der Existenzsatz in diesem §11 umso stärker ist, je kleiner $\mathbb{F}$ ist, kann man gleich $\mathbb{F} = \mathbb{F}_+^W$ als die kleinste rechtsstetige Filterung bzgl. der W adaptiert ist wählen.
Es soll die folgende Gleichung studiert werden:

(11.1) $\quad dX_t = b(t,X_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dW_t$, $t\geq 0$, $X_0=x_0\in\mathbb{R}$.

Def. 1. Sind die Funktionen $b,\sigma : [0,T]\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ mb, so heißen sie **Drift–** bzw. **Dispersions–koeffizient**; σ^2 heißt **Diffusionskoeffizient**.

Def. 2. Eine **starke Lösung** von (11.1) mit Startpunkt $x_0\in\mathbb{R}$ ist ein reeller Prozeß $X = X(x_0)$ mit rechtsstetigen und f.s. stetigen Pfaden, sodaß gilt:

(11.2) (i) X ist an $\mathbb{F}$ adaptiert;
(ii) $X_0=x_0$ auf Ω;
(iii) $\int_0^T \{|b(s,X_s)| + \sigma^2(s,X_s)\}\,ds < \infty$, f.s. ;
(iv) $X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dW_s$, $\forall\, t\geq 0$, f.s. .

Auf Grund von (iii) ist der Prozeß X ein Itô–Prozeß.

11.3 Anmerkung. (11.2)(iii) ist gemäß 8.17 stets erfüllt, wenn b und σ stetig sind.

Beispiel. Für den Fall b und σ konstant sind, ergibt sich die BB $(b\cdot t + \sigma\cdot W_t, t\geq 0)$ mit Drift b und Dispersionskoeffizienten σ gerade als starke Lösung von (11.1).

Beispiel. $X_t = x_0\cdot\exp\{b\cdot t + \sigma\cdot W_t\}$ ist nach dem Beipiel in §9 starke Lösung von

$dX_t = \mu\cdot X_t\,dt + \sigma\cdot X_t\,dW_t$, $t\geq 0$. mit $\mu=b+\frac{1}{2}\sigma^2$.

Beispiel. Ist $\int_0^T [|\beta(s)|+|B(s)|+\sigma^2(s)]\,ds < \infty$, $\varphi(t) := \exp\{\int_0^t B(s)ds\}$, so ist nach dem Beispiel in §9 $X_t = \varphi(t)\left[x_0 + \int_0^t \beta(s)/\varphi(s)\,ds + \int_0^t \sigma(s)/\varphi(s)\,dW_s\right]$ starke Lösung der linearen stochastischen Dgl.: $\quad dX_t = [B(t)\cdot X_t+\beta(t)]\,dt + \sigma(t)\,dW_t$, $t\geq 0$.

Def. 3. Für die stochastische DGl. (11.1) liegt **starke Eindeutigkeit** vor, wenn für alle $x_0\in\mathbb{R}$ gilt: Sind X und $\tilde{X}$ starke Lösungen von (11.1) mit Start in x_0, so sind X und $\tilde{X}$ nicht unterscheidbar.

Def. 4. b und σ heißen **lokal Lipschitz–stetig in x**, wenn gilt: $\forall\, n\in\mathbb{N}\ \exists\, K=K_n<\infty$ mit:

(11.4) $\quad |b(t,x)-b(t,y)| + |\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \le K\cdot|x-y|, \quad \forall\, t\ge 0,\ \forall\, x,y\in[-n,n].$

11.5 Eindeutigkeitssatz. Sind b und σ lokal Lipschitz–stetig in x, so liegt starke Eindeutigkeit vor bei (11.1).

Zum Beweis benötigt man folgende

11.6 Abschätzung. Ist J Itô–Prozeß mit $J_t = {}_0\!\int^t Z\,d\lambda + {}_0\!\int^t Y\,dW$, τ Stoppzeit $\le T$, so gilt:

$J_\tau^2 \le L\cdot({}_0\!\int^\tau Z^2\,d\lambda + \{{}_0\!\int^\tau Y\,dW\}^2) =: \hat J_\tau$ und

$E[J_\tau^2] \le E[\hat J_\tau] \le L\cdot E\left[{}_0\!\int^\tau (Z^2+Y^2)\,d\lambda\right]$ mit $L:=2(T+1)$.

Bew. Es gilt: $\{{}_0\!\int^\tau Z\,d\lambda\}^2 \le {}_0\!\int^\tau 1^2\,d\lambda \cdot {}_0\!\int^\tau Z^2\,d\lambda \le T\cdot {}_0\!\int^\tau Z^2\,d\lambda$ [Schwarzsche Ungleichung]. Aus $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$ folgt jetzt die erste Ungleichung. Die zweite ergibt sich aus: $E[\{{}_0\!\int^\tau Y\,dW\}^2] = E[{}_0\!\int^\tau Y^2\,d\lambda]$ [fundamentale Isometrie 8.23], falls o.E. die rechte Seite endlich ist. []

Bew. von 11.5. Seien X und $\tilde X$ starke Lösungen von (11.1) bei Start in x_0.

Setze $\tau_n := T \wedge \inf\{t\ge 0;\ |X_t| + |\tilde X_t| > n\}$. Aus

$X_{t\wedge\tau_n} - \tilde X_{t\wedge\tau_n} = {}_0\!\int^{t\wedge\tau_n}\{b(s,X_s)-b(s,\tilde X_s)\}ds + {}_0\!\int^{t\wedge\tau_n}\{\sigma(s,X_s)-\sigma(s,\tilde X_s)\}\,dW_s$

folgt mit 11.6 sowie mit K wie in 11.4, wobei $X_{t\wedge\tau_n}, \tilde X_{t\wedge\tau_n} \in [-n,n]$ f.s. :

$g(t) := E[\{X_{t\wedge\tau_n} - \tilde X_{t\wedge\tau_n}\}^2] \le L\cdot E[{}_0\!\int^{t\wedge\tau_n} K^2\cdot\{X_s-\tilde X_s\}^2\,ds]$

$\le L\cdot K^2\cdot E[{}_0\!\int^t \{X_{s\wedge\tau_n} - \tilde X_{s\wedge\tau_n}\}^2\,ds] = L\cdot K^2\cdot {}_0\!\int^t g(s)\,ds,$

wobei g wegen $g(t)\le n^2$ beschränkt ist. Aus der Grownwallschen Ungleichung 10.6 ergibt sich nun $g\equiv 0$, also $X_{t\wedge\tau_n} = \tilde X_{t\wedge\tau_n}$ f.s. . Für $n\uparrow\infty$ folgt $X_t = \tilde X_t$ f.s. wegen $\tau_n = T$ für

$n > \max\{|X_t| + |\tilde X_t|\ ,0\le t\le T\}$. Gemäß 1.1 sind also X und $\tilde X$ nicht unterscheidbar. []

Bei den in den obigen Beispielen angegebenen stochastischen DGl'en liegt offenbar starke Eindeutigkeit vor, wenn im Falle der linearen Gleichung B als beschränkt vorausgesetzt wird.

Im deterministischen Fall $\sigma\equiv 0$ wird aus (11.1) die **gewöhnliche Integralgleichung**:

$x(t) = x_0 + {}_0\!\int^t b(s,x(s))\,ds$, $t\ge 0$.

Lösungen erhält man bekanntlich über die **Picard–Lindelöf–Iteration**:

$x^{(0)} \equiv x_0$, $x^{(k+1)}(t) = x_0 + {}_0\!\int^t b(s,x^{(k)}(s))\,ds$.

Diese Iteration soll auf den stochastischen Fall übertragen werden.
Bereits im deterministischen Fall reicht aber eine lokale Lipschitzbedingung nicht aus, um die Existenz einer globalen Lösung zu sichern, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel. $X_t = (1-t)^{-1}$ ist Lösung von $dX_t = X_t^2\,dt$ mit $X_0=1$ für $T<1$ und nach 11.5 auch die einzige Lösung. Dabei gilt aber $X_t \to \infty$ für $t \to 1$. $[]$

Def. 5: b und σ genügen den **globalen Lipschitz– und linearen Wachstumsbedingungen**, falls:
$\exists\, K<\infty$ sodaß für $t\geq 0$. $x,y\in\mathbb{R}$ gilt:

(11.7) $\quad |b(t,x)-b(t,y)| + |\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \leq K\cdot|x-y|$;

(11.8) $\quad |b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K\cdot(1+|x|)\ \ [\ \leq K\cdot\{2(1+x^2)\}^{\frac{1}{2}}\ ]$.

11.9 Anmerkung. Die Bedingung (11.8) läßt sich abschwächen zu

(11.8)' $\quad \sup_{0\leq t\leq T}\{|b(t,0)|+|\sigma(t,0)|\} < \infty$,

denn aus (11.7) und (11.8)' folgt bereits (11.8) für ein geeignetes K. Im obigen Beispiel gilt natürlich (11.8)', aber nicht (11.7).

11.10 Existenzsatz. Mögen b und σ den globalen Lipschitz–und linearen Wachstums–bedingungen (11.7) und (11.8) genügen. Dann existiert zu jedem Startpunkt $x_0\in\mathbb{R}$ eine starke Lösung X von (11.1) mit $\sup_{t\leq T} E[X_t^2] < \infty$.

Der Beweis wird über die folgende **Iteration** geführt:

(11.11) $\quad X^{(0)}\equiv x_0,\ \ X_t^{(k+1)} = x_0 + {}_0\!\int^t b(s,X_s^{(k)})\,ds + {}_0\!\int^t \sigma(s,X_s^{(k)})\,dW_s$, $t\geq 0$.

11.12 Lemma. Seien b,σ wie in 11.10 und $X^{(k)}$ wie in (11.11). Dann gilt für $k\in\mathbb{N}_0$:

(a) $\quad E[\{X_t^{(k)}\}^2] \leq B\cdot(1+x_0^2)\cdot e^{Bt}$, $t\geq 0$, mit $B=B(T,K)$ $[:=2(1+L^2K^2)$ mit $L=2(T+1)]$.

(b) $\quad \{b(t,X_t^{(k)}),t\geq 0\}$ und $\{\sigma(t,X_t^{(k)}),t\geq 0\} \in \mathscr{L}_T^{<2>}$;

Bew. von 11.12. Der Fall k=0 ist klar. Mögen nun (a) und (b) für k gelten.

a) Dann ist $X^{(k+1)}$ insbesondere ein Itô–Prozeß und aus der Abschätzung 11.6 folgt:

$$
\begin{aligned}
E[\{X_t^{(k+1)}\}^2] &\leq 2(x_0^2 + E[\{X_t^{(k+1)}-x_0\}^2]) \\
&\leq 2\left[x_0^2 + L\cdot E[{}_0\!\int^t b^2(s,X_s^{(k)}) + \sigma^2(s,X_s^{(k)})\,ds\ ]\right] \\
&\leq 2\left[x_0^2 + L\cdot {}_0\!\int^t E[2K^2(1+\{X_s^{(k)}\}^2)]\ ds\right] \\
&\leq 2\left[x_0^2 + L\cdot 2K^2[t + {}_0\!\int^t B\cdot(1+x_0^2)\cdot e^{Bs}\,ds]\right] \\
&\leq 2\left[x_0^2 + 2L\cdot K^2[t + (1+x_0^2)\cdot e^{Bt}]\right] \\
&\leq 2\left[(1+x_0^2)\cdot e^{Bt} + 2L\cdot K^2\cdot(T+1)\cdot(1+x_0^2)\cdot e^{Bt}\right] = (1+x_0^2)\cdot e^{Bt}\cdot B\ .
\end{aligned}
$$

b) Als Itô–Prozeß ist $X^{(k+1)}$ progressiv. Aus der Meßbarkeit von b und σ folgt leicht, daß $\{b(t,X_t^{(k+1)}),t\geq 0\}$ und $\{\sigma(t,X_t^{(k+1},t\geq 0\}$ progressiv sind. Ferner gilt:

$$E\left[{}_0\int^T \{b^2(t,X_t^{(k+1)})+\sigma^2(t,X_t^{(k+1)})\}\,dt\right] = {}_0\int^T E\left[\{b^2(t,X_t^{(k+1)})+\sigma^2(t,X_t^{(k+1)})\}\right]\,dt$$
$$\leq {}_0\int^T 2K^2\cdot E\left[1+\{X_t^{(k+1)}\}^2\right]\,dt < \infty \quad \text{wegen Teil a). } []$$

Bew. von 11.10. Der Beweis verläuft ähnlich wie der der Vollständigkeit 7.17 von $\mathcal{M}_c^2$.

Es ist $X_t^{(k+1)}-X_t^{(k)} =: {}_0\int^t Z_k\,d\lambda + {}_0\int^t Y_k\,dW$ mit

$Z_{k,s} := \{b(s,X_s^{(k)})-b(s,X_s^{(k-1)})\}$ und $Y_{k,s} := \sigma(s,X_s^{(k)})-\sigma(s,X^{(k-1)})\}$;

dabei gilt $Z_k, Y_k \in \mathcal{L}_T^{<2>}$.Der Prozeß $\Delta_t^{(k)} := \{X_t^{(k+1)}-X_t^{(k)}\}^2$, $k\geq 0$, ist i.a. kein Quadrat eines Mart's, also i.a. kein Supmart. Er wird aber dominiert durch einen Prozeß $V_k+M_k^2$, der sich als Submart erweisen wird. Aus der Abschätzung 11.6 folgt nämlich:

$$\Delta_t^{(k)} \leq 2(T+1)({}_0\int^t Z_k^2\,d\lambda + \{{}_0\int^t Y_k\,dW\}^2) =: L\cdot(V_{k,t}+M_{k,t}^2)\,,\ k\geq 1, \text{ mit } L:=2(T+1),$$

sowie für $g_k(t) := E\left[V_{k,t}+M_{k,t}^2\right]$, $k\geq 1$,

$$g_k(t) \leq E\left[{}_0\int^t (Z_k^2+Y_k^2)\,d\lambda\right] \leq K^2\cdot E\left[{}_0\int^t \Delta^{(k-1)}\,d\lambda\right]$$
$$\leq L\cdot K^2\cdot E\left[{}_0\int^t (V_{k-1}+M_{k-1}^2)\,d\lambda\right] = L\cdot K^2\cdot {}_0\int^t g_{k-1}(s)\,ds$$

und $C_1 := \sup_{t\leq T} g_1(t) \leq K^2\cdot {}_0\int^t E\left[\Delta_s^{(0)}\right]\,ds < \infty$ nach 11.12a.

Aus dem Beweis der Gronwall–Ungleichung 10.6 folgt nun

$$g_k(t) = E\left[V_{k,t}+M_{k,t}^2\right] \leq C_1\cdot(L\cdot K^2 t)^k/k! \quad \text{für } k\geq 1, \text{ somit } \sum_k \sup_{0\leq t\leq T} E\left[\Delta_t^{(k)}\right] < \infty.$$

Wegen $Y_k \in \mathcal{L}_T^{<2>}$ ist M_k ein Mart; ferner hat V_k isotone Pfade. Also sind M_k^2, V_k und somit $V_k+M_k^2$ Submart'e Mit der Maximal–Ungleichung 6.7 erhält man nun

$$P\left[\sup_{[0,T]} \Delta^{(k)} > \varepsilon\right] \leq P\left[\sup_{[0,T]} (V_k+M_k^2) > \varepsilon/L\right]$$
$$\leq \frac{L}{\varepsilon}\cdot(E\left[V_{k,T}+M_{k,T}\right]) = \frac{2}{\varepsilon}L\cdot g_k(t) \leq \frac{2}{\varepsilon}L\cdot C_1\cdot(L\cdot K^2\cdot T)^k/k!.$$

Somit folgt: $\sum_k P\left[\sup_{[0,T]} \Delta^{(k)} > 2^{-k}\right] < \infty$. Insgesamt wissen wir also:

(11.13)
$$\sum_k \sup_{0\leq t\leq T} E\left[\{X_t^{(k+1)}-X_t^{(k)}\}^2\right] < \infty,$$
$$\sum_k P\left[\sup_{[0,T]} \{X_t^{(k+1)}-X_t^{(k)}\}^2 > 2^{-k}\right] < \infty\,.$$

Jetzt folgt wie im Beweis der Vollständigkeit 7.17 von $\mathcal{M}_c^2$ die Existenz eines Prozesses X mit:

(11.14)

(a) X ist adaptiert und hat rechtsstetige und f.s. stetige Pfade;

(b) $\sup_{[0,T]} |X - X^{(k)}| \to 0$ f.s. für $k\to\infty$,

(c) $\sup_{t\leq T} E\left[\{X_t - X_t^{(k)}\}^2\right] \to 0$ und $\sup_{t\leq T} E\left[X_t^2\right] < \infty$.

Damit ist also die Konvergenz des Iterationsverfahren gesichert. Zum Nachweis, daß X auch starke Lösung von (11.1) im Sinne von (11.2) ist, muß gezeigt werden, daß

$$J_t^{(k)} := {}_0\int^t b(s,X_s^{(k)}) - b(s,X_s)\,ds + {}_0\int^t \sigma(s,X_s^{(k)}) - \sigma(s,X_s)\,dW_s\,,$$

also die Differenz der rechten Seiten von (11.11) und 11.2 (iv) gegen Null strebt. Wir zeigen dabei $\mathscr{L}^2$–Konvergenz. Die Differenz der linken Seiten geht ja wegen (11.14)(c) in der $\mathscr{L}^2$–Konvergenz gegen Null. Also folgt dann aus (11.11) die Gleichung 11.2 (iv).
Aus (11.14c) ergibt sich zunächst mit dem linearen Wachstum (11.8):

$$E\left[{}_0\int^T b^2(s,X_s) + \sigma^2(s,X_s)\,ds\right] < \infty.$$

Also ist J_t Itô–Prozeß, und aus der Abschätzung 11.6 sowie der globalen Lipschitzstetigkeit (11.7) folgt:

$$E\left[\{J_t^{(k)}\}^2\right] \le L\cdot {}_0\int^t E\left[\{b(s,X_s^{(k)}) - b(s,X_s)\}^2 + \{\sigma(s,X_s^{(k)}) - \sigma(s,X_s)\}^2\right] ds$$
$$\le L\cdot K^2\cdot {}_0\int^t E\left[\{X_s^{(k)} - X_s\}^2\right] ds.$$

Wegen (11.14)(c) geht aber der letzte Ausdruck gegen Null. □

Def. 6: Zu Drift– bzw. Dispersionskoeffizienten b und σ sei definiert:

$$\mathfrak{A}_t f(x) := \tfrac{1}{2}\sigma^2(t,x)\cdot f''(x) + b(t,x)\cdot f'(x) \quad \text{für } f\in C^2(\mathbb{R})$$
$$\mathfrak{A} f(t,x) := \tfrac{1}{2}\sigma^2(t,x)\cdot f''(t,x) + b(t,x)\cdot f'(t,x) \quad \text{für } f\in C^{1,2}([0.T)\times\mathbb{R})\cap C([0.T]\times\mathbb{R}).$$

Im Falle $\sigma^2>0$ heißt $\mathfrak{A}_t$ elliptischer und $\frac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{A}$ parabolischer Differentialoperator.

11.15 Proposition. Sei $f\in C^{1,2}([0.T)\times\mathbb{R})\cap C([0.T]\times\mathbb{R})$ und X starke Lösung von (11.1). Dann gilt für $M_t^f := f(t,X_t) - f(0,x_0) - {}_0\int^t (\frac{\partial}{\partial s} + \mathfrak{A})f(s,X_s)\,ds$:
$M^f \in \mathscr{M}_c^2$, falls $E\left[{}_0\int^T f'^2(s,X_s)\cdot\sigma^2(s,X_s)\,ds\right] < \infty$.

Bew. X ist ein Itô–Prozeß. Aus der Itô–Formel folgt zunächst für t<T und dann aus Stetigkeitsgründen auch für t=T:

$$f(t,X_t) - f(0,x_0) = {}_0\int^t \{\dot f(s,X_s) + b(s,X_s)\cdot f'(s,X_s) + \tfrac{1}{2}\sigma^2(s,X_s)\cdot f''(s,X_s)\}\,ds$$
$$+ {}_0\int^t f'(s,X_s)\cdot\sigma(s,X_s)\,dW_s$$
$$= {}_0\int^t (\frac{\partial}{\partial s} + \mathfrak{A})f(s,X_s)\,ds + {}_0\int^t f'(s,X_s)\cdot\sigma(s,X_s)\,dW_s\,.$$

Also gilt: $M_t^f = {}_0\int^t f'(s,X_s)\cdot\sigma(s,X_s)\,dW_s$, wobei der Integrand nach Voraussetzung in $\mathscr{L}_T^{<2>}$ liegt. Damit ist alles gezeigt. □

11.16 Dynkin–Formel. Seien f und X wie in 11.15 und f, f', σ beschränkt. Dann gilt für Stoppzeiten $\tau\le T$: $E\left[f(\tau,X_\tau)\right] = f(0,x_0) + E\left[{}_0\int^\tau \{\dot f(s,X_s) + \mathfrak{A}f(s,X_s)\}\,ds\right]$, $0\le t\le T$.

Bew. Da f' und σ beschränkt sind, ist die Integrierbarkeitsvoraussetzung in 11.15 erfüllt. Mit dem Stoppsatz 6.6 erhält man: $E[M^f_\tau] = E[M^f_{T\wedge\tau}] = E[M^f_0] = 0$. Wegen der Beschränktheit von f läßt sich schließlich $E[f(\tau,X_\tau)]$ abspalten. $[]$

Im Vergleich zur Dynkin–Formel 5.15 für zeitstetige Markoff–Ketten spielt jetzt der Differentialoperator $\mathfrak{A}_t$ die Rolle des durch die Q–Matrix definierten Operators. Die Analogie wird besonders im homogenen Fall deutlich, wo b und σ nicht von t abhängen. Beide Fälle lassen sich einbetten in den Begriff des **infinitesimalen Operators** eines Markoff–Prozesses.

Da der Stoppsatz hier zur Verfügung stand, konnte die Dynkin–Formel gleich für Stoppzeiten anstelle von festen Zeitpunkten t wie in 5.15 formuliert werden.

§12 Schwache Lösungen stochastischer Differentialgleichungen und Diffusionsprozesse.

Es soll wieder die folgende Gleichung studiert werden:

(11.1) $dX_t = b(t,X_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dW_t$, $0\le t\le T<\infty$, $X_0=x_0\in\mathbb{R}$.

zu mb Funktionen $b,\sigma : [0,T]\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$. Der Zeithorizont T sei wieder endlich.

Es soll jetzt der Fall behandelt werden, daß an b keinerlei Stetigkeitsforderungen gestellt werden. Das ist wichtig etwa für den Fall, daß b durch eine unstetige Kontrolle gesteuert wird, z.B. b nur die Werte ±1 annimmt. Der deterministische Fall $\sigma\equiv0$ ist hier ausgeschlossen.

Es kann dann die Existenz einer schwachen Lösung gezeigt werden. Bei einer solchen kann der zugrundeliegende W–Raum wie bei der internen Markoff–Familie zu einem Markoff–Prozeß noch frei gewählt werden. Eigenschaften wie die Stetigkeit fast aller Pfade können dann überall verlangt werden.

Def. 1. Eine **schwache Lösung** von (11.1) ist ein Quadrupel $(\Omega,\mathfrak{F},P)$, $\mathbb{F}$, W, X mit

(12.1) (i) $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ ist ein W–Raum und $\mathbb{F}=\mathbb{F}_+$ eine Filterung darauf;
(ii) $(W,\mathbb{F})$ ist 1–dim. standard. BB auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit stetigen Pfaden;
(iii) X ist starke Lösung von (11.1) zu $(W,\mathbb{F})$ auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit stetigen Pfaden.

$(\Omega,\mathfrak{F},P)$, $\mathbb{F}$ und W sind also Bestandteil der Lösung. Jede starke Lösung ist schwache Lösung $[$nach einer eventuellen Verkleinerung von Ω, damit X überall stetige Pfade hat$]$.

12.2 Existenzsatz. Seien $b,\sigma : [0,T]\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ mb Funktionen, so daß ein $K\in(0,\infty)$ existiert mit:
$|b(t,x)/\sigma(t,x)|\le K$, $\sigma(t,x)\le K(1+|x|)$, $|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\le K\cdot|x-y|$ $\forall$ t,x,y.
Dann existiert eine schwache Lösung von (11.1).

Bew. Sei $(W,\mathbb{F})$ 1–dim. standard. BB auf einem W–Raum $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit stetigen Pfaden, etwa wie in §2; aus 3.7 folgt insbesondere, daß $\mathbb{F}=\mathbb{F}_+$ gewählt werden kann. Sei X starke Lösung von $dX_t = \sigma(t,X_t)\,dW_t$, $X_0=0$. Die Existenz ist nach 11.10 gesichert.

Der Driftterm b soll nun durch die Girsanov–Transformation hinzugefügt werden. Setze dazu:

$$\vartheta = b/\sigma,\ G_T := \exp\{{}_0\int^T \vartheta(s,X_s)\,dW_s - \tfrac{1}{2}\,{}_0\int^T \vartheta^2(s,X_s)\,ds\}\ ,$$

$$W_t =: \tilde{W}_t + {}_0\int^t \vartheta(s,X_s)\,ds\ ,\ 0\le t\le T,\ \text{und}\ d\tilde{P} = G_T\,dP.$$

Wegen der Beschränkheit von ϑ ist $(\tilde{W},\mathbb{F})$ gemäß Girsanov 10.11 1–dim. standard. BB auf $(\Omega,\mathfrak{F},\tilde{P})$, und es gilt:

$$X_t = x_0 + {}_0\int^t b(s,X_s)\,ds + {}_0\int^t \sigma(s,X_s)\,d\tilde{W}_s,\ 0\le t\le T,$$

wegen $dW_s = d\tilde{W}_s + \vartheta(s,X_s)\,ds$ in Hinblick auf 10.13. Also ist das Tripel $(\Omega,\mathfrak{F},\tilde{P})$, $\mathbb{F}$, $\tilde{W}$, X schwache Lösung von (11.1). $[]$

Def. 2. Für (11.1) liegt **schwache Eindeutigkeit** vor, wenn für je zwei schwache Lösungen $(\Omega^{(i)},\mathfrak{F}^{(i)},P^{(i)})$, $W^{(i)}$, $X^{(i)}$, i=1,2, von (11.1) die endlich dimensionalen Randverteilungen von $X^{(i)}$ unter $P^{(i)}$ unabhängig von i sind und somit auch die Verteilungen selbst von $X^{(i)}$ unter $P^{(i)}$ als W–Maße auf $C[0,T]$ [vgl. W.th. II 8.5 mit

$$P(X_{t_1},...,X_{t_n})^{-1} = PX^{-1}(\Pi_{t_1},...,\Pi_{t_n})^{-1}].$$

12.3 Eindeutigkeitssatz. Sei $b : [0,T]\times\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mb und beschränkt sowie σ konstant und >0. Dann liegt bei (11.1) schwache Eindeutigkeit vor.

Bew. Sei $(\Omega,\mathfrak{F},P),W,X$ schwache Lösung von (11.1). Der Driftterm soll jetzt wegtransformiert werden; deshalb wird im Vergleich zum Beweis von 12.2 b durch –b ersetzt. Setze also:

$$G_T := \exp\{-{}_0\int^T b(s,X_s)/\sigma\,dW_s - \tfrac{1}{2}\,{}_0\int^T b^2(s,X_s)/\sigma^2\,ds\}\ ,$$

$$W_t =: \tilde{W}_t - {}_0\int^t b(s,X_s)/\sigma\,ds\ ,\ 0\le t\le T,\ \text{und}\ d\tilde{P} = G_T\,dP.$$

Nach Girsanov 10.11 ist dann $\tilde{W}$ 1–dim.standard.BB unter $\tilde{P}$. Mit 10.13 folgt:

$$X_t = x_0 + \sigma\cdot\tilde{W}_t \ \text{sowie}$$

$$G_T = \exp\{-{}_0\int^T b(s,X_s)/\sigma\,d\tilde{W}_s + {}_0\int^T b^2(s,X_s)/\sigma^2\,ds - \tfrac{1}{2}\,{}_0\int^T b^2(s,X_s)/\sigma^2\,ds\}$$

$$= \exp\{-{}_0\int^T b(s,X_s)/\sigma\,d\tilde{W}_s + \tfrac{1}{2}\cdot{}_0\int^T b^2(s,X_s)/\sigma^2\,ds\}\ .$$

X_t ist insbesondere $\tilde{\mathfrak{F}} := \sigma(\tilde{W}_t,0\le t\le T)$ mb , $0\le t\le T$, und $\tilde{W}$ ist BB auf $(\Omega,\tilde{\mathfrak{F}},P)$. Also ist auch G_T auf $(\Omega,\tilde{\mathfrak{F}},P)$ erklärt, insbesondere $\tilde{\mathfrak{F}}$–mb. Damit gilt: $G_T = f((\tilde{W}_t,0\le t\le T))$ für eine mb Funktion f [vgl. Übung W.th.II]. Sei $\{t_1,...,t_n\}$ gegeben; dann gilt mit

$$1_{\{(X_{t_1},...,X_{t_n})\in\Gamma\}}/f((\tilde{W}_t,0\le t\le T)) =: g((\tilde{W}_t,0\le t\le T)) :$$

$$P[(X_{t_1},...,X_{t_n})\in\Gamma] = \int 1_{\{(X_{t_1},...,X_{t_n})\in\Gamma\}}/G_T \, d\tilde{P} = \int g((\tilde{W}_t,0\le t\le T)) \, d\tilde{P}$$
$$= \int g((\Pi_t,0\le t\le T)) \, d\mu ,$$

wobei μ das Wienermaß und Π der Koordinatenprozeß auf $C[0.\infty)$ ist; denn $\tilde{W}$ hat als BB unter $\tilde{P}$ die gleiche Verteilung wie $(\Pi_t,0\le t\le T)$ unter μ. Dabei ist $\int g((\Pi_t,0\le t\le T)) \, d\mu$ unabhängig von der gegebenen Lösung. []

12.4 Bemerkung. Schwache Eindeutigkeit liegt auch unter der Voraussetzungen von 12.2 vor [Karatzas & Shreve Proposition 5.17 S. 341]

Wir betrachten nun die **zeithomogene Gleichung**

(12.5) $$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t \,, \; t\ge 0, \; X_0=x \,.$$

12.6 Satz. Es liege schwache Eindeutigkeit für (12.5) vor. Sei $((\Omega,\mathfrak{F},P), \mathbb{F},W, X) = ((\Omega^{T,x},\mathfrak{F}^{T,x},P^{T,x}), \mathbb{F}^{T,x},W^{T,x}, X^T(x))$ schwache Lösung von (12.5) für den Horizont $T\le\infty$, wobei Ω Borelsche Teilmenge eines polnischen Raums ist. Ist Π der Koordinatenprozeß auf $C[0,\infty)$, so ist $(P_x, x\in\mathbb{R})$ durch

$$P_x[(\Pi_{t_1},...,\Pi_{t_n})\in\Gamma] := P[(X_{t_1},...,X_{t_n})\in\Gamma]$$

wohl definiert und es gilt für $\mathbb{F}$ Stoppzeiten τ :

(12.7) $$P[X_{\tau+s}\in B \,|\, \mathfrak{F}_\tau] = P_{X_\tau}[\Pi_s\in B] \quad \text{f.s. auf } \{\tau+s\le T\}.$$

Die Annahme, daß Ω Borelsche Teilmenge eines polnischen Raums ist, ist nicht sehr stark. Im Existenzsatz 12.2 konnte Ω als eine Borelsche Teilmenge Ω_0 des polnischen Raums $C[0,\infty)$ gewählt werden, sodaß die Lösung X stetige Pfade auf Ω_0 hat.

Beweisskizze von 12.6. [vgl. von Weizsäcker & Winkler, 12.5.1 S. 309] Zur Vereinfachung kann man sich $T=\infty$ oder τ konstant vorstellen.

(i) Aus der schachen Eindeutigkeit folgt, daß die Def. von P_x nicht von der speziellen Lösung und T abhängt. Sei jetzt x und T fest; sie werden wieder als Index weggelassen.

(ii) Auf Grund der Voraussetzung an Ω existiert [vgl. W.th.II 1.5] eine ÜW Q von $(\Omega,\mathfrak{F}_\tau)$ nach $(\Omega,\mathfrak{F})$ mit $P[A \,|\, \mathfrak{F}_\tau](\omega) = Q(\omega,A)$ f.s. .

(iii) Mit der starken ME für W folgt, daß $W^* := (W_{\tau+t}-W_t, \; 0\le t\le (T-\tau)^+)$ eine BB unter $Q(\omega,\cdot)$ und $\tau(\omega)$ konstant für P–f.a. ω ist.

(iv) Setzt man für $Y\in\mathscr{P}^2$: $J_t := \int_\tau^{\tau+t} Y_s \, dW_s$ und $J^*_t := \int_0^t Y_{\tau+s} \, dW^*_s$, so gilt:
Jede Version von J unter P ist eine Version von J* unter P und unter $Q(\omega,\cdot)$ für P–f.a. ω .

Zum Beweis betrachtet man erst $Y\in\mathscr{H}$, dann $Y\in\mathscr{L}^{<2>}$ und schließlich $Y\in\mathscr{P}^2$.

(v) Wegen (iv) gilt:

$$X_{\tau+t} = X_\tau + \int_\tau^{\tau+t} b(X_s)\,ds + \int_\tau^{\tau+t} \sigma(X_s)\,dW_s$$
$$= X_\tau + \int_0^t b(X_{\tau+s})\,ds + \int_0^t \sigma(X_{\tau+s})\,dW^*_s ;$$

also ist $(\Omega,\mathfrak{F},Q(\omega;\cdot))$, $\mathbb{F}^*:=(\mathfrak{F}_{\tau+t},t\geq 0)$, W^*, $X^*:=(X_{\tau+t},t\geq 0)$ schwache Lösung von (12.5) für P–f.a. ω. Wegen der schwachen Eindeutigkeit folgt für diese ω:

$$P[X_{\tau+s}\in B\,|\,\mathfrak{F}_\tau](\omega) = Q(\omega;\{X_{\tau+s}\in B\}) = P_{X_\tau(\omega)}[\Pi_s\in B]\,.\ \square$$

12.8 Bemerkung. Liegt für (12.5) schwache Eindeutigkeit vor, so ist $x \mapsto P_x[\Gamma]$ mb für jede Borelsche Teilmenge von $C[0,\infty)$ [vgl. Strook & Varadhan (1979): exercise 6.7.4].

12.9 Korollar. Es liege schwache Eindeutigkeit für (12.5) vor. Sei $(\Omega,\mathfrak{F},P)$, $\mathbb{F},W,X$ schwache Lösung von (12.5) für den Horizont $T\leq\infty$, wobei Ω Borelsche Teilmenge eines polnischen Raums ist. P_x, $x\in\mathbb{R}$; sei wie in 12.6 definiert. Ist Π der Koordinatenprozeß auf $C[0,\infty)$, so ist $(\Pi,\{P_x,x\in\mathbb{R}\})$ eine Markoff–Familie und X starker Markoff– Prozeß mit interner MF $(\Pi,\{P_x,x\in\mathbb{R}\})$.

Bew. Es folgt für $t+s\leq T$ mit 2.6 und der Definition von P_x :

$$P_x[(\Pi_{t_0},...,\Pi_t)\in D,\Pi_{t+s}\in B] = P[(X_{t_0},...,X_t)\in D,X_{t+s}\in B]$$
$$= E[\,P_{X_t}[\Pi_s\in B];(X_{t_0},...,X_t)\in D] = E_x[\,P_{\Pi_t}[\Pi_s\in B];(\Pi_{t_0},...,\Pi_t)\in D]\,.$$

Wegen 2.2 liegt also eine MF vor. Aus 12.6 ergibt sich nun die Behauptung. $\square$

Def. 3. Für zeitunabhängige Drift– bzw. Dispersionskoeffizienten $b,\sigma:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ sei der Differentialoperator $\mathfrak{A}$ definiert durch: $\mathfrak{A}f(x) := \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x) + b(x)f'(x)$, $f\in C^2(\mathbb{R})$.

Ferner sei $C_c^2(\mathbb{R})$ die Menge der Funktionen aus $C^2(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger.

Def. 4. Seien $(\Omega,\mathfrak{F},P)$, eine Filterung $\mathbb{F}=\mathbb{F}_+$ sowie Drift– bzw. Dispersionskoeffizienten $b,\sigma:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ gegeben. Ein starker Markoff–Prozeß $(X,\mathbb{F})$ mit Zustandsraum $\mathbb{R}$ und stetigen Pfaden heißt dann ein 1–dim. **Diffusionsprozeß** zu b und σ, falls eine Familie Φ von Testfunktionen existiert mit $C_c^2(\mathbb{R})\subset\Phi\subset C^2(\mathbb{R})$ und

(12.10) M^φ ist ein Mart $\forall\,\varphi\in\Phi$ mit $M^\varphi_t := \varphi(X_t) - \varphi(X_0) - \int_0^t \mathfrak{A}\varphi(X_u)\,du$.

Man sagt auch, X löst das **Martingalproblem** zum Operator $\mathfrak{A}$ definiert auf Φ bzgl. $\mathbb{F}$.

12.11 Satz. Sei σ stetig oder allgemeiner lokal beschränkt, d.h. $\sup_K|\sigma|<\infty$ für alle Kompakta K, dann ist unter den Voraussetzungen von 12.9 X ein Diffusionsprozeß zu b und σ.

Der **Bew.** folgt aus 11.15 wegen der Beschränktheit von $\sigma\cdot f'$ für $\varphi\in C_c^2(\mathbb{R})$. $\square$
Aus 12.11 folgt jetzt wie bei 11.16 die Dynkin–Formel.