Stochastische Analyis
WS 1995/96

§1 Stochastische Prozesse und Stoppzeiten.

Im folgenden sei ein metrischer Raum (S,d) gegeben, $\mathcal{S}$ bezeichne die Borelsche σ–Algebra bzgl. der Metrik d. Falls nichts anderes gesagt wird, ist $X = (X_t, t \geq 0)$ ein zeitstetiger stochastischer Prozeß auf einem W–Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit dem Zustandsraum $(S, \mathcal{S})$.
Die Überlegungen übertragen sich in der Regel direkt auf den Fall, daß zu einem endlichen Zeithorizont $T \in (0,\infty)$ ein Prozeß $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$ gegeben ist. Einen solchen kann man etwa durch $X_s := X_T$ für $s > T$ fortsetzen und darauf die folgenden Überlegungen anwenden.

Def. 1. X heißt stetig bzw. rechtsstetig [bzw. linksstetig], wenn alle Pfade von X stetig bzw. bzw. rechtsseitig stetig [bzw. linksseitig stetig] sind.

Es soll ein Gleichheitsbegriff für stochastische Prozesse untersucht werden.

Def. 2: Seien X und Y stochastische Prozesse auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Zustandsraum $(S, \mathcal{S})$. Dann heißen X und Y **nicht unterscheidbar** oder **Versionen** von einander, falls gilt:

$$X_t = Y_t \quad \forall\, 0 \leq t < \infty \text{ P–f.s. .}$$

Bei NIchtunterscheidbarkeit existiert also eine von t unabhängige Nullmenge, außerhalb derer Gleichheit von X_t und Y_t vorliegt.

1.1 Lemma. Sind X und Y rechtsstetig [oder beide linksstetig], so sind sie bereits nicht unterscheidbar, wenn gilt: $X_t = Y_t$ P–f.s. $\forall\, 0 \leq t < \infty$.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert eine Menge Ω' vom Maß eins, so daß gilt:
$X_t(\omega) = Y_t(\omega) \quad \forall\, \omega \in \Omega',\ t \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty)$. Es folgt:
$X_t(\omega) = \lim_{r \downarrow t, r \in \mathbb{Q}} X_r(\omega) = \lim_{r \downarrow t, r \in \mathbb{Q}} Y_r(\omega) = Y_t(\omega) \quad \forall\, \omega \in \Omega',\ t \geq 0.$ [ ]

Def. 3. Eine **Filterung** (in $\mathcal{F}$) ist eine Familie $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ von σ–Algebren mit:
$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \quad \forall\, 0 \leq s < t < \infty$. Man nennt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ auch eine **stochastische Basis.**
Man definiert $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\cup_{s \geq 0} \mathcal{F}_s) \subset \mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_{t+} := \cap_{s > t} \mathcal{F}_s$, $\mathbb{F}_+ = (\mathcal{F}_{t+}, t \geq 0)$.
$\mathbb{F}$ wird als **rechtsstetig** bezeichnet, wenn gilt: $\mathbb{F} = \mathbb{F}_+$. Zu einem Prozeß X ist die **kanonische Filterung** $\mathbb{F}^X$ definiert durch $\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s, s \leq t)$, $t \geq 0$.

Def. 4. Ein Prozeß X heißt an eine Filterung $\mathbb{F}$ **adaptiert** [oder $\mathbb{F}$–adaptiert], wenn gilt:

X_t ist $\mathfrak{F}_t$–mb $\forall$ t, d.h. $\mathbb{F}^X \subset \mathbb{F}$. X heißt $\mathbb{F}$–**progressiv**, wenn gilt:
die Abbildung $[0,t]\times\Omega \ni (s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$ ist $[0,t]\cap\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{F}_t$ – mb $\forall$ t.

Die Meßbarkeit auch in t wird etwa benötigt, wenn Integrale über Zeitintervalle oder der Prozeß zu einem zufälligen mb Zeitpunkt τ, also X_τ, betrachtet werden.

Lemma 1.2. (a) $\mathbb{F}_+$ ist wieder eine Filterung.
(b) $\mathbb{F}_+$ ist immer rechtsstetig, d.h. $(\mathbb{F}_+)_+ = \mathbb{F}_+$.
(c) Ist X $\mathbb{F}$–progressiv, so ist X $\mathbb{F}$–adaptiert und die Abbildung
$[0,\infty)\times\Omega \ni (t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$ ist $[0,\infty)\cap\mathfrak{B}_1\otimes\mathfrak{F}_\infty$ – mb.

Der Beweis ist sehr einfach.

1.3 Beispiel. Um sich klar zu machen, daß die Kenntnis von $\mathfrak{F}_{t+}$ mehr Information liefern kann als $\mathfrak{F}_t$, betrachten für einen reellwertigen Prozeß X das Ereignis A, daß der Prozeß nach t nach oben tendiert, also etwa: $A := \{\underline{\lim}_{h\downarrow 0, h\in\mathbb{Q}} \frac{1}{h}(X_{t+h}-X_t) \geq 0\}$. Dann gilt offenbar: $A \in \mathfrak{F}_{t+}$ aber in der Regel: $A \notin \mathfrak{F}_t$. Andere Beispiele werden im Zusammenhang mit Eintrittszeiten auftreten.

1.4 Proposition. Ist X $\mathbb{F}$–adaptiert und rechtsstetig [oder linksstetig], so ist X $\mathbb{F}$–progressiv.

Beweis: Sei X etwa rechtsstetig. Für t>0 und $n\in\mathbb{N}$ definiert man Zeitintervalle
$I^n_k := [\frac{k-1}{n}t, \frac{k}{n}t)$, $1\leq k<n$, und $I^n_n := [\frac{n-1}{n}t, t]$ sowie Prozesse $(X^n_s, 0\leq s\leq t)$ gemäß
$X^n_s := X_{\frac{k}{n}t}$ für $s \in I^n_k$. Dann gilt für $B \in \mathfrak{S}$:

$$\{(s,\omega)\in [0,t]\times\Omega;\ X^n_s(\omega) \in B\} = \cup_{1\leq k\leq n} I^n_k \times X^{-1}_{\frac{k-1}{n}t}(B) \in [0,t]\cap\mathfrak{B}_1\otimes\mathfrak{F}_t.$$

Also ist $(s,\omega) \mapsto X^n_s(\omega)$ $[0,t]\cap\mathfrak{B}_1\otimes\mathfrak{F}_t$ – mb. Diese Eigenschaft überträgt sich auf
$X_s(\omega) = \lim_{n\to\infty} X^n_s(\omega)$. [ ]

Def. 5. Sei $\mathbb{F}$ eine Filterung in $\mathfrak{F}$. Eine Abbildung $\tau : \Omega \mapsto [0,\infty]$ heißt eine $\mathbb{F}$–**Stoppzeit**,
wenn gilt: $\{\tau\leq t\} \in \mathfrak{F}_t$ $\forall$ t.

Offenbar ist jede konstante Abb. τ eine Stoppzeit und jede Stoppzeit eine Zva. Da $\mathbb{F}_+$ mit $\mathbb{F}$ auch eine Filterung ist, ist auch der Begriff der $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit erklärt. Er ist eine Abschwächung des Begriffs $\mathbb{F}$–Stoppzeit.

1.5 Lemma. Jede $\mathbb{F}$–Stoppzeit ist eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit.

Beweis: Es gilt: $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_{t+}$. $[]$

1.6 Lemma. Folgende Auusagen sind äquivalent:

i) τ ist $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit;

ii) $\{\tau<t\} \in \mathfrak{F}_t \quad \forall\, t$;

iii) $\tau\wedge t$ ist $\mathfrak{F}_t$–mb $\quad \forall\, t$.

Beweis: "(ii) $\Rightarrow$ (i)" $\{\tau \le t\} = \cap_{n>m} \{\tau < t + \frac{1}{n}\} \subset \mathfrak{F}_{t+(1/m)} \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$.
Offenbar gilt nun: $\cap_m \mathfrak{F}_{t+(1/m)} = \mathfrak{F}_{t+}$.
"(iii) $\Rightarrow$ (ii)" $\{\tau < t\} = \{\tau\wedge t < t\} \in \mathfrak{F}_t$.
"(i) $\Rightarrow$ (iii)" $\{\tau\wedge t \le s\} = \begin{cases} \{\tau \le s\} \in \mathfrak{F}_{s+} \subset \mathfrak{F}_t & \text{für } s<t \\ \Omega & \text{für } s\ge t \end{cases}$. $[]$

1.7 Lemma. (a) Mit σ und τ sind auch $\tau\wedge\sigma$ und $\tau\vee\sigma$ $\mathbb{F}$–Stoppzeiten.

(b) Ist τ eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit und $s>0$, so ist $\tau+s$ eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit.

Beweis: a) $\{\tau\wedge\sigma \le t\} = \{\tau \le t\} \cup \{\sigma \le t\}$, $\{\tau\vee\sigma \le t\} = \{\tau \le t\} \cap \{\sigma \le t\}$.
b) $\{\tau+s \le t\} = \{\tau \le t-s\} \in \mathfrak{F}_{(t-s)+} \subset \mathfrak{F}_t$. $[]$

Def. 6. Für $B \in \mathfrak{S}$ ist die **Eintrittszeit** von X in B definiert als

$$\tau_B := \inf \{t\ge 0;\, X_t \in B\} \quad \text{mit } \inf \emptyset = \infty.$$

Haben die Pfade von X linksseitige Limites X_{t-}, so ist die **Kontaktzeit** von X zu B

$$\tilde{\tau}_B := \tau_B \wedge \inf \{t\ge 0;\, X_{t-} \in B\}.$$

Die Kontaktzeit wird für rechtsstetige Sprungprozesse interessant werden. Ist X linksstetig, so stimmen offenbar Eintrittszeit und Kontaktzeit überein. Für beliebige $B \in \mathfrak{S}$ ist die Meßbarkeit der Eintrittszeit kompliziert. Jedoch gilt:

1.8 Proposition. Sei X $\mathbb{F}$–adaptiert. Dann gelten:

(a) Ist X rechtsstetig [oder linksstetig] und ist B offen, so ist τ_B eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit.

(b) Hat X rechtsstetige Pfade mit linksseitigen Limites und ist B abgeschlossen, so ist $\tilde{\tau}_B$ $\mathbb{F}$–Stoppzeit.

(c) Ist X stetig und ist B abgeschlossen, so ist τ_B $\mathbb{F}$–Stoppzeit.

Beweis: a) Wir verwenden 1.6. Es gilt: $\{\tau_B < t\} = \cup_{s\in [0,t)} \{X_s \in B\} = \cup_{s\in [0,t)\cap\mathbb{Q}} \{X_s \in B\}$.
Dabei gilt die erste Gleichung stets und bei der zweiten stets "$\supset$". Ferner folgt "$\subset$" aus den Stetigkeitseigenschaften der Pfade und der Offenheit von B.

Aus der Adaptiertheit ergibt sich nun $\{\tau_B < t\} \in \mathfrak{F}_t$.
b) Aus der Rechsstetigkeit folgt offenbar für $s_n \downarrow s$ auch: $X_{s_n -}(\omega) \to X_s(\omega)\ \forall\ \omega$.

Sei $B_n := \{x \in S;\ d(x,B) < \frac{1}{n}\}$; dann ist B_n offen und wegen der Abgeschlossenheit Von B gilt: $\cap_n B_n = B$. Es wird nun folgende Gleichung gezeigt werden:

(*) $\quad \{\tilde{\tau}_B \le t\} = \{X_t \in B\} \cup \cap_n \{\tau_{B_n} < t\} \quad \forall\ t.$

Dann folgt die Beh. aus (a).

"(*) $\subset$" Sei ω geg. mit $s := \tilde{\tau}_B(\omega) \le t$ Dann ex. (s_n) mit $s_n \downarrow s$ und
(i) $X_{s_n}(\omega) \in B\ \forall\ n$ oder (ii) $X_{s_n -}(\omega) \in B\ \forall\ n$.
Wegen der Rechtsstetigkeit von X und der Abgeschlossenheit von B folgt in beiden Fällen:
$X_s(\omega) \in B$.
Ist $s = t$, so ist $X_t(\omega) \in B$.
Ist $s < t$, so gilt: $\tau_{B_n}(\omega) \le \tau_B(\omega) \le s < t$.

"(*) $\supset$" Ist $X_t(\omega) \in B$, so folgt $\tilde{\tau}_B(\omega) \le \tau_B(\omega) \le t$.
Gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $\tau_{B_n}(\omega) < t$, so existiert eine Folge (s_n) mit $s_n < t$ und $X_{s_n}(\omega) \in B_n$.
Sei nun $s \in [0,t]$ ein Häufungspunkt von (s_n). Wir unterscheiden zwei Fälle.
Existiert eine Teilfolge $(n') \subset \mathbb{N}$ mit $s_{n'} \uparrow s$ und $s_{n'} < s$, so folgt leicht: $X_{s-}(\omega) \in B$.
Existiert eine Teilfolge $(n') \subset \mathbb{N}$ mit $s_{n'} \downarrow s$, so folgt aufgrund der Rechtsstetigkeit: $X_s(\omega) \in B$.

In beiden Fällen gilt: $\tilde{\tau}_B(\omega) \le t$.

c) Da X stetig ist, gilt $\tilde{\tau}_B = \tau_B$, und die Beh. folgt aus Teil (b). $[]$

Def. 7. Ist τ eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit, so heißt

$$\mathfrak{F}_\tau := \{\ A \in \mathfrak{F}_\infty;\ A \cap \{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_t\ \ \forall\ t \ge 0\}$$

σ–Algebra der τ–Vergangenheit.

Der Name ist gerechtfertigt aufgrund des folgenden Lemmas.

1.9 Lemma. Seien τ und σ $\mathbb{F}$–Stoppzeiten. Dann gelten:

(a) $\mathfrak{F}_\tau$ ist eine σ–Algebra;
(b) $\mathfrak{F}_\tau = \{\ A \subset \Omega;\ A \cap \{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_t\ \ \forall\ t \ge 0,\ A \cap \{\tau = \infty\} \in \mathfrak{F}_\infty\}$;
(c) τ ist $\mathfrak{F}_\tau$–mb, insbesondere gilt: $\{\tau < \infty\} \in \mathfrak{F}_\tau$;
(d) ist $\tau = s$ konstant, so gilt: $\mathfrak{F}_\tau = \mathfrak{F}_s$;
(e) aus $\sigma \le \tau$ folgt $\mathfrak{F}_\sigma \subset \mathfrak{F}_\tau$.

Beweis: a) Die Abgeschlossenheit gegenüber der Komplementbildung z.B. folgt aus:

$$A^C \cap \{\tau \le t\} = \{\tau \le t\} - A \cap \{\tau \le t\}.$$

b) "⊃" Für $A \in \mathfrak{F}_\tau$ hat man: $A = A \cap \{\tau = \infty\} \cup \cup_n A \cap \{\tau \le n\} \in \mathfrak{F}_\infty$.
"⊂" $A \cap \{\tau = \infty\} = A \setminus \cup_n A \cap \{\tau \le n\}$.
c) Wir zeigen $\{\tau \le s\} \in \mathfrak{F}_\tau$ mit (b). Einmal gilt: $\{\tau \le s\} \cap \{\tau \le t\} = \{\tau \le s \wedge t\} \in \mathfrak{F}_t$ und zum anderen: $\{\tau \le s\} \cap \{\tau = \infty\} = \emptyset \in \mathfrak{F}_\infty$.
d) ist leicht zu sehen.
e) Für $A \in \mathfrak{F}_\sigma$ gilt: $A \cap \{\tau \le t\} = A \cap \{\sigma \le t\} \cap \{\tau \le t\}$ mit $A \cap \{\sigma \le t\} \le \mathfrak{F}_t$. []

Def. 8. Zu einer $\mathbb{F}$–Stoppzeit τ definieren wir X_τ mit Hilfe einer beliebig vorgegebenen $\mathfrak{F}_\infty$–mb Zva X_∞ gemäß $X_\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega)$. Der **gestoppte Prozeß** ist $X^\tau := \{X_{\tau \wedge t},\ t \ge 0\}$.
Die Wahl von X_∞ wird keine Rolle spielen, da X_τ nur auf $\{\tau < \infty\}$ betrachtet wird. X_∞ kann als Konstante oder im Falle eines reellwertigen Prozesses z.B. gewählt werden als

$$X_\infty := \overline{\lim}_{\mathbb{Q}} X_t := \inf_n \sup_{t > n,\, t \in \mathbb{Q}} X_t .$$

Bedingungen dafür, daß X_τ eine Zva und X^τ ein stochastischer Prozeß ist, liefert:

1.10 Proposition. Sei X $\mathbb{F}$–progressiv.

(a) Ist τ eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit, so ist $X^\tau := \{X_{\tau \wedge t},\ t \ge 0\}$ $\mathbb{F}$–progressiv;
(b) Ist τ eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit, so ist X_τ $\mathfrak{F}_\tau$–mb.

Beweis: a) Sei t fest und $([0,t] \times \Omega\ ,\ [0,t] \cap \mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{F}_t) =: (D, \mathfrak{D})$. Nach Voraussetzung ist $D \ni (s,\omega) \mapsto X_s(\omega) =: h(s,\omega)$ $\mathfrak{D}$–mb.
Z.z. ist, daß auch $D \ni (s,\omega) \mapsto X_{\tau(\omega) \wedge s}(\omega) =: g(s,\omega)$ $\mathfrak{D}$–mb ist.
Wir werden g in $g = h \circ f$ faktorisieren. Zunächst ist in Hinblick auf 1.6

$$D \ni (s,\omega) \mapsto \tau(\omega) \wedge s = \tau(\omega) \wedge t \wedge s =: \varphi(\tau(\omega) \wedge t, s)\ \ \mathfrak{D} - [0,t] \cap \mathfrak{B}_1 - \text{mb};$$

denn φ ist sogar stetig, vgl. W.th.I [8.11]. Somit ist auch

$$D \ni (s,\omega) \mapsto (\tau(\omega) \wedge s, \omega) =: f(s,\omega)\ \ \mathfrak{D}\text{–}\mathfrak{D}\text{–mb}.$$

b) Für $B \in \mathfrak{S}$ gilt: $\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \le t\} = \{X_{\tau \wedge t} \in B\} \cap \{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_t$,
da nach (a) X^τ insbesondere adaptiert ist. Ferner gilt auch $\{X_\infty \in B,\ \tau = \infty\} \in \mathfrak{F}_\infty$.
Nach 1.9b haben wir also: $\{X_\tau \in B\} \in \mathfrak{F}_\tau$. []

Def. 9. Ist τ eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit, so wird die **σ–Algebra $\mathfrak{F}_{\tau+}$ der (τ+)–Vergangenheit** definiert als σ–Algebra der τ–Vergangenheit bzgl. $\mathbb{F}_+$, d.h.

$$\mathfrak{F}_{\tau+} := \{A \in \mathfrak{F}_\infty;\ A \cap \{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_{t+}\ \ \forall\, t\}.$$

1.11 Lemma. (a) Ist τ eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit, so gilt:

$$\mathfrak{F}_{\tau+} = \{A \in \mathfrak{F}_\infty;\ A \cap \{\tau < t\} \in \mathfrak{F}_t\ \ \forall\, t\}.$$

(b) Ist τ sogar eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit, so gilt: $\mathfrak{F}_\tau \subset \mathfrak{F}_{\tau+}$.

Beweis: a) vgl. Beweis von 1.6. b) ist klar wegen $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_{t+}$. []

1.12 Bemerkung. Ist τ eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit und ist (τ_n) eine Folge von $\mathbb{F}$–Stoppzeiten mit $\tau_n > \tau$, $\tau_n \downarrow \tau$ auf Ω; so gilt: $\mathfrak{F}_{\tau+} = \bigcap_n \mathfrak{F}_{\tau_n}$.

Der Beweis ist eine einfache Übungsaufgabe. Ein Beispiel ist nach 1.7b: $\tau_n = \tau + \frac{1}{n}$ []

1.13 Lemma. Seien τ und σ $\mathbb{F}$–Stoppzeiten. Dann gilt:

(a) $\mathfrak{F}_{\tau\wedge\sigma} = \mathfrak{F}_\tau \cap \mathfrak{F}_\sigma$;

(b) $\{\sigma < \tau\}, \{\sigma \le \tau\} \in \mathfrak{F}_\tau \cap \mathfrak{F}_\sigma$.

Beweis: a) "$\subset$" folgt aus 1.9e. Sei nun $A \in \mathfrak{F}_\tau \cap \mathfrak{F}_\sigma$; dann hat man:

$$A \cap \{\tau\wedge\sigma \le t\} = A \cap \{\tau \le t\} \cup A \cap \{\sigma \le t\} \in \mathfrak{F}_t \quad \forall\, t \ge 0.$$

b) Es gilt $\{\sigma \le \tau\} \in \mathfrak{F}_\tau$ wegen $\{\sigma \le \tau\} \cap \{\tau \le t\} = \{\sigma\wedge t \le \tau\wedge t\} \cap \{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_t$ nach 1.6;
ebenso $\{\sigma < \tau\} \in \mathfrak{F}_\tau$ wegen $\{\sigma < \tau\} \cap \{\tau \le t\} = \{\sigma\wedge t < \tau\wedge t\} \cap \{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_t$.
Die übrigen Aussagen erhält man durch Komplementbildung. []

§2 Markoff–Prozesse

Es sei wieder (S,d) ein metrischer Raum mit der Borelschen σ–Algebra $\mathfrak{S}$. $X = (X_t, t\geq 0)$ ist ein stochastischer Prozeß auf $(\Omega,\mathfrak{F})$ mit Zustandsraum S.
Nun werden Operatoren eingeführt, die den Übergang zwischen zwei Zeitpunkten, etwa Gegenwart und Zukunft, beschreiben.

Def. 1. Es heißt $\{\vartheta_t, t\geq 0\}$ eine Familie von **Shift–Operatoren**, falls
$\vartheta_t : \Omega \mapsto \Omega$ eine Abbildung ist mit

(2.1) $X_s \circ \vartheta_t = X_{t+s} \quad \forall\, s,t.$

Bei Markoff–Prozessen ist es günstig, wenn man für jeden möglichen Startpunkt $x \in S$ ein Modell hat.

Def. 2. $(X, \{P_x, x\in S\})$ ist eine **Markoff–Familie** (MF), falls folgende Bedingungen erfüllt sind:
$\{P_x\}$ ist eine Familie von W–Maßen auf $(\Omega,\mathfrak{F})$, sodaß mit der kanaonischen Filterung $\mathbb{F}^X$ gilt:

i) $P_x[X_0 = x] = 1 \quad \forall\, x;$

ii) die Abbildung $x \mapsto P_x[X_s \in B]$ ist $\mathfrak{S}$–mb $\forall\, s, \forall\, B \in \mathfrak{S}$;

iii) eine Version von $P_x[X_{t+s} \in B \mid \mathfrak{F}_t^X]$ ist $P_{X_t}[X_s \in B] \quad \forall\, x, t,s, B$.

iv) es existiert eine Familie von Shift–Operatoren $\{\vartheta_t, t\geq 0\}$.

Eigenschaft (iii) ist gerade die Markoff–Eigenschaft (ME).
Hat man einen zeitdiskreten Markoff–Prozeß auf dem gemäß Ionescu–Tulcea konstruierten kanonischen Raum $\Omega = \overset{\infty}{\underset{0}{\times}} S$, sind also X_n die Koordinatenvariablen [Projektionen], so ist immer eine Familie von Shift–Operatoren $\{\vartheta_n, n\geq 0\}$ gegeben durch

$$\vartheta_n(x_0,x_1,\ldots) = (x_n,x_{n+1},\ldots).$$

Eine ähnliche Konstruktion kann man auch im zeitstetigen Fall machen.

2.2 Lemma. In Def. 2 kann die ME (iii) ersetzt werden durch

iii)' eine Version von $P_x[X_{t+s} \in B \mid X_{t_1},\ldots,X_{t_n},X_t]$ ist $P_{X_t}[X_s \in B]$
$\forall\, x, B, 0\leq t_1<\ldots<t_n<t<t+s, n \in \mathbb{N}_0.$

Beweis: "(iii) ⇒ (iii)' " ist klar wegen $\sigma(X_t) \subset \sigma(X_{t_1},\ldots,X_{t_n},X_t) \subset \mathfrak{F}_t^X$.
"(iii)' ⇒ (iii)" wird mit einem Dynkinsystem gezeigt.

$$\mathfrak{E} := \cup_{0\leq t_1<\ldots<t_n\leq t, n\in\mathbb{N}_0} \sigma(X_{t_1},\ldots,X_{t_n},X_t)$$

ist ein $\cap$–stabiles Erzeugendensystem von $\mathfrak{F}_t^X$ und

$$\mathfrak{D} := \left\{ A \in \mathfrak{F}_t^X ; P_x[A \cap \{X_{t+s} \in B\}] = \int_A P_{X_t}[X_s \in B]\, dP_x \right\}$$

ist offensichtlich ein Dynkinsystem, für das nach Vorausetzung $\mathfrak{D} \supset \mathfrak{E}$ gilt. $[]$

2.3 Konstruktion einer d–dim. Brownschen Familie.

Sei μ das Wienermaß auf $(C[0,\infty),\mathfrak{C})$.

$\Omega := \overset{d}{\underset{1}{\times}} C[0,\infty)$ kann mit der Menge der stetigen Abbildungen $\omega : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^d$ identifiziert werden;

$\mathfrak{F} := \overset{d}{\underset{1}{\otimes}} \mathfrak{C}$.

$W^{(i)} : \Omega \mapsto C[0,\infty)$ bezeichne die i–te Projektion.

$W_t^{(i)}(\omega^{(1)},...,\omega^{(d)}) := \omega^{(i)}(t)$ für $\omega^{(i)} \in C[0,\infty)$.

$W = (W^{(1)},...,W^{(d)})$ ist die Identität auf Ω, $W_t := (W_t^{(1)},...,W_t^{(d)})$.

$P_0 := \overset{d}{\underset{1}{\times}} \mu$.

Auf dem W–Raum $(\Omega,\mathfrak{F},P_0)$ sind $W^{(1)},...,W^{(d)}$ unabhängig mit $W^{(i)} \sim \mu$, d.h. $W^{(1)},...,W^{(d)}$ sind unabhängige 1–dim. standardisierte Brownsche Bewegungen.
Somit ist W eine d–dim. standardisierte Brownsche Bewegung.

Durch eine Translation um $x \in \mathbb{R}^d$ erhält man den Prozeß $x + W = (x + W_t, t\geq 0)$. In der Definition einer MF sollte sich die Abhängigkeit vom Startpunkt jedoch im W.Maß ausdrücken. Dies kann auch erreicht werden. Offenbar ist $x+W : (\Omega,\mathfrak{F}) \mapsto (\Omega,\mathfrak{F})$ mb , etwa als stetige Abb., also ist durch

$$P_x := P_0(x+W)^{-1}$$

ein W–Maß P_x auf $(\Omega,\mathfrak{F})$ definiert mit $P_x W^{-1} = P_0(x+W)^{-1}$.
$x+W$ hat offenbar die gleichen Zuwächse wie W, also haben die Zuwächse von W unter P_x die gleichen (endliche–dim. Rand–) Verteilungen wie die Zuwächse von $x+W$ unter P_0 und damit wie die Zuwächse von W unter P_0.

Für $x \in \mathbb{R}^d$ gilt: $P_x[W_0 = x] = P_0[W_0 \circ (x+W) = x] = P_0[x+W_0 = x] = P_0[W_0 = 0] = 1$.
Eine Familie von Shift–Operatoren $\vartheta_t : \Omega \mapsto \Omega$ definiert man gemäß:

$$(\vartheta_t\omega)(\cdot) := \omega(t+\cdot)\ ,\ \omega \in \Omega.$$

Dann hat man $W_s(\vartheta_t\omega) = W_s(\omega(t+\cdot)) = \omega(t+s) = W_{t+s}(\omega)$.
Damit ist eine Brownsche Familie gemäß folgender Definition konstruiert:

Def. 3. $(W, \{P_x, x\in\mathbb{R}^d\})$ heißt d–dim. Brownsche Familie (BF), falls W ein stochastischer Prozeß auf $(\Omega,\mathfrak{F},P_x)$ ist, $x\in\mathbb{R}^d$, mit Zustandsraum $(\mathbb{R}^d,\mathfrak{B}_d)$, sodaß gilt:

0) W ist stetig;

i) $P_x[W_0 = x] = 1 \quad \forall\, x$;

ii) W hat stationäre und unabhängige Zuwächse unter $P_x \;\forall\, x$;

iii) $W_{t+s} - W_s \sim \overset{d}{\underset{1}{\times}} N(0,s)$ unter $P_x \quad \forall\, s,t, \forall\, x$;

iv) es existiert eine Familie von Shift–Operatoren.

Es soll nun gezeigt werden, daß eine Brown'sche Familie eine Markoff–Familie ist. Dazu brauchen wir noch einige Vorbereitungen.

Def. 4. Sei Y eine Zva auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit Werten in $(S,\mathfrak{S})$ und $\mathfrak{G}$ eine Unter–σ–Algebra von $\mathfrak{F}$. Dann heißt Y **unabhängig** von $\mathfrak{G}$, wenn gilt:

$$P[\{Y\in B\}\cap G] = P[Y\in B]\cdot P[G] \quad \forall\, G\in\mathfrak{G},\ B\in\mathfrak{S}.$$

2.4 Lemma. Sei X ein d–dimensionaler Prozeß auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit unabhängigen und stationären Zuwächsen. Dann gelten mit $Q(s,x;B) := P[x + X_s - X_0\in B]$:

(a) die Abb. $x \mapsto Q(s,x;B)$ ist mb $\forall\, s, \forall\, B\in\mathfrak{B}_d$;

(b) $X_{t+s} - X_s$ ist unabhängig von $\mathfrak{F}_t^X \quad \forall\, s,t$;

(c) eine Version von $P[X_{t+s}\in B \mid \mathfrak{F}_t^X]$ ist $Q(s,X_t;B)$ (Markoff–Eigenschaft).

Bew. a) folgt leicht aus der Vorstufe zu Fubini.

b) Für $0<t_1<...<t_n<t$, $n\in\mathbb{N}$, sind $X_0, X_{t_1} - X_0, ..., X_t - X_{t_n}, X_{t+s} - X_t$ unabhängig.

Somit ist $(X_0, X_{t_1}, ..., X_{t_n}, X_t)$ als Funktion von $(X_0, X_{t_1} - X_0, ..., X_t - X_{t_n})$ unabhängig von $X_{t+s} - X_t$. Mit einem Dynkinargument folgt nun wie bei 2.2 die Beh. .

c) Gemäß (b) und W.th.II [1.7a] ist $(\omega,B) \mapsto P[X_{t+s} - X_t\in B] = P[X_s - X_0\in B]$ eine bedingte Verteilung von $X_{t+s} - X_t$ bzgl. $\mathfrak{F}_t^X$. Gemäß W.th.II [1.7c oder 1.10h] folgt dann, daß $(\omega,B) \mapsto Q(s,X_t(\omega);B)$ eine bedingte Verteilung von $X_{t+s} = f(X_t, X_{t+s} - X_t) := X_t + X_{t+s} - X_t$ ist. []

2.5 Proposition. Eine d–dim. Brownsche Familie ist eine MF.

Bew. Die Punkte (i) und (iv) aus Def. 2 sind klar. Nun gilt

$$P_x[W_s\in B] = P_x[x + W_s - W_0\in B]$$
$$= \overset{d}{\underset{1}{\times}} N(x_i,s) = P_0[x + W_s\in B] =: Q(s,x;B).$$

2.4a,c liefert nun die (ii) und (iii) aus Def. 2. []

Nun soll die allgemeine Definition eines Markoff–Prozesses erfolgen. Üblicherweise geht man dazu von ÜW P(t,x,B) aus, die die Chapman–Kolmogoroff– Gleichungen erfüllen. Für die Existenz wird dann die zeitstetige Version des Satzes von Kolmogoroff (vgl. die zeitdiskrete Version in W.th. II [2.7]). Hier soll gleich die Existenz einer MF vorausgestzt werden. Die ÜW können ohnehin nur in den seltensten Fällen, so bei der BB und beim Poisson–Prozeß, explizit angegeben werden. In den Beispielen, die wir betrachten, kann in der Tat direkt die MF konstuiert werden. Damit sind auch die ÜW gemäß $P(t,x,B) = P_x[X_t \in B]$ gegeben. Der Satz von Kolmogoroff wird bei diesem Zugang nicht benötigt.

Def. 5. (X,𝔽) heißt (homogener) **Markoff–Prozeß (MP)** auf (Ω,ℑ,P) mit Zustandsraum (S,𝔖), falls gilt:

(1) X ist eine stochastischer Prozeß;

(2) 𝔽 ist eine Filterung in ℑ;

(3) X ist 𝔽–adaptiert;

(4) es existiert eine MF $(X^o,\{P_x, x\in S\})$ mit der Eigenschaft:

(ME) eine Version von $P[X_{t+s} \in B \mid \mathfrak{F}_t]$ ist $P_{X_t}[X^o_s \in B]$ $\forall$ s,t, B∈𝔖.

$(X^o,\{P_x, x\in S\})$ heißt **interne MF** und PX_0^{-1} heißt **Startverteilung**.

In der Regel ist die interne MF ein auf einem kanonischen Raum definiertes Modell für den vorliegenden MP, das für jeden möglichen Startpunkt konstruiert werden kann.
Nach folgenden Lemma gilt alles, was für P gezeigt wird, auch für P_x.

2.6 Lemma. Ist $(X,\{P_x, x\in S\})$ eine MF, so ist für $x_0\in S$ $(X.\mathbb{F}^X)$ unter P_{x_0} ein MP mit Startverteilung δ_{x_0} und interner MF $(X,\{P_x, x\in S\})$.

Beweis: Gemäß Def. 2 ist $P_{X_t}[X_s \in B]$ eine Version von $P_{x_0}[X_{t+s} \in B \mid \mathfrak{F}^X_t]$. Die übrigen Eigenschaften sind klar. []

Def.6. Sei W ein 𝔽–adaptierter Prozeß auf (Ω,ℑ,P) mit Zustandsraum $\mathbb{R}^d$ [für eine beliebigen Filterung 𝔽 in ℑ]. Dann heißt (W,𝔽) **d–dim. Brownsche Bewegung** (BB), falls gilt:

(0) W ist stetig;

(i) die Zuwächse $W_{t+s} - W_t$ sind unabhängig von $\mathfrak{F}_t$ [unter P] $\forall$ s,t;

(ii) $W_{t+s} - W_t \sim \overset{d}{\underset{1}{\times}} N(0,s)$ [unter P] $\forall$ s,t.

Für $b\in\mathbb{R}^d$ und eine invertierbare Matrix $\sigma\in\mathbb{R}^{d\times d}$ sei X := $(X_t, t\geq 0)$:= $(t\,b + \sigma\, W_t, t\geq 0)$; dann heißt (X,𝔽) **d–dim. Brownsche Bewegung mit Drift b und und Dispersions–koeffizienten σ**.

Im Fall d = 1 etwa kann man sich vorstellen, daß ein Wind ein Partikel mit konstanter Geschwindigkeit b driften läßt und σ ein Maß für die Höhe der Amplituden der Zickzack– kurven ist, welche mit steigender Temperatur wachsen.

2.7 Beispiel. Ist W eine d–dim. BB wie in 2.3, so ist [etwa in Hinblick auf 2.4b] $(W^i,\mathbb{F}^W)$ eine 1–dim. BB , $1\le i\le d$, mit $\mathbb{F}^{W^i} \neq \mathbb{F}^W$.

2.8 Proposition. Eine d–dim. BB $(X,\mathbb{F})$ auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit Drift b und Dispersionskoeffizienten σ ist ein MP mit interner MF $\left[X^o := ((tb + \sigma W_t^o), t\ge 0), \{P_{\sigma^{-1}x}, x\in\mathbb{R}^d\}\right]$, wo $(W^o,\{P_x\})$ die in 2.3 konstruierte Brownsche Familie ist.

Beweis: 1) Als erstes zeigen wie die ME für W. Es gilt:

$$Q(s,x;B) := P[x+W_{t+s}-W_t \in B] = \overset{d}{\underset{1}{\times}} N(x_i,s) = P_x[W_s^o \in B].$$

Wie in 2.4 ergibt sich: $P[W_{t+s} \in B \mid \mathfrak{F}_t] = P[W_t + (W_{t+s}-W_t) \mid \mathfrak{F}_t] = Q(s.W_t,B)$.

2) Jetzt wird sich die ME für X ergeben.

$P[X_{t+s} \in B \mid \mathfrak{F}_t] = P[(t+s)b + \sigma W_{t+s} \in B \mid \mathfrak{F}_t]$

$= P[W_{t+s} \in B_t \mid \mathfrak{F}_t]$ mit $B_t := \sigma^{-1}(B - (t+s)b)$, also $B_0 = \sigma^{-1}(B - sb)$

$= P_{W_t}[W_s^o \in B_t]$ nach Schritt 1). Nun ist für $x \in \mathbb{R}^d$

$P_x[W_s^o \in B_t] = P_0[x + W_s^o \in B_t] = P_0[(t+s)b + \sigma(x + W_s^o) \in B]$

$= P_0[sb + \sigma(\sigma^{-1}(tb + \sigma x) + W_s^o) \in B] = P_0[\sigma^{-1}(tb + \sigma x) + W_s^o \in B_0]$

$= P_{\sigma^{-1}(tb + \sigma x)}[W_s^o \in B_0] = P_{\sigma^{-1}(tb + \sigma x)}[sb + \sigma W_s^o \in B]$

$= P_{\sigma^{-1}(tb + \sigma x)}[X_s^o \in B]$.

Also folgt: $P_{W_t}[W_s^o \in B_t] = P_{\sigma^{-1}X_t}[X_s^o \in B]$.

3) Es bleibt z.z.: $(X^o,\{P_{\sigma^{-1}x}\})$ ist eine MF. Wir haben

$P_{\sigma^{-1}x}[X_0^o = x] = P_{\sigma^{-1}x}[\sigma W_0^o = x] = P_{\sigma^{-1}x}[W_0^o = \sigma^{-1}x] = 1$,

$P_{\sigma^{-1}x}[X_s^o \in B] = P_{\sigma^{-1}x}[W_s^o \in B_0]$; dieser Ausdruck ist mb in x. Obige Überlegungen in den Schritten 1) und 2) gelten auch für P_y, W^o und $\mathbb{F}^W = \mathbb{F}^{X^o}$ anstelle von P, W und $\mathbb{F}$.

Also ist mit $y := \sigma^{-1}x$ auch $P_{\sigma^{-1}X_t^o}[X_s^o \in B]$ eine Version von $P_{\sigma^{-1}x}[X_{t+s}^o \in B \mid \mathfrak{F}_t^W]$.

Die Existenz einer Familie von Shiftoperatoren folgt aus der Existenz einer solchen für W^o. []

2.9 Konstruktion einer (zusammengesetzten) Poisson–Familie.

In der W.th.I wurde ein zusammengesetzter Poissonprozeß konstruiert mit Hilfe einer unabhängigen Folge $Y_0,Z_1,Y_1,Z_2,Y_2,...$ mit $Z_m \sim Exp(\lambda)$, $Y_0 = x$ f.s. und $Y_m \sim Q$, $m\geq 1$, für ein $0<\lambda<\infty$ und ein W–Maß Q auf $\mathbb{R}$. Dabei galt $\sum_1^\infty Z_m = \to \infty$ f.s. . Ein kanonischer Raum ist dafür ist der folgende:

Sei $\bar\Omega := \mathbb{R}\times\overset{\infty}{\underset{1}{\times}}((0,\infty)\times\mathbb{R})$, $\bar{\mathfrak{F}} := \mathfrak{B}_1 \otimes\overset{\infty}{\underset{1}{\otimes}}((0,\infty)\times\mathbb{R})\cap\mathfrak{B}_2$, $\bar P_x := \delta_x\times\overset{\infty}{\underset{1}{\times}}(Exp(\lambda)\times Q)$.

Es erfolgt noch die Verkleinerung von $\bar\Omega$ um eine Nullmenge. Sei

$$\Omega := \{\omega = (y_0,z_1,y_1,z_2,y_2,...) \in \bar\Omega;\ \textstyle\sum_1^\infty z_m = \infty\},\quad \mathfrak{F} := \Omega\cap\bar{\mathfrak{F}},\quad P_x := \bar P_x\,\big|\,\mathfrak{F}.$$

Zu $\omega = (y_0,z_1,y_1,z_2,y_2,...) \in \Omega$ sind definiert: $Z_m(\omega) := z_m$, $Y_m(\omega) := y_m$. Setze

$T_0 := 0$, $T_n := Z_1+...+Z_n$, $N_t = n$ auf $\{T_n\leq t<T_{n+1}\}$, $n\in\mathbb{N}_0$, $X_t := \sum_0^{N_t} Y_m$, $t\geq 0$.

Nach Konstruktion gilt: $T_0<...<T_{n-1}<T_n \to \infty$ $(n\to\infty)$ auf Ω.

Dann haben $(X,N) = \{(X_t,N_t),\ t\geq 0\}$ und somit $N = \{(N_t),\ t\geq 0\}$ und $X = \{(X_t),\ t\geq 0\}$ unabhängige und stationäre Zuwächse gemäß W.th.I [20.11]; dort wurde nur der Fall $Y_0\equiv 0$ betrachtet. Die Zuwächse hängen aber nicht von der Wahl von Y_0 ab. $\{(N_t),\ t\geq 0\}$ ist ein Poisson–Prozeß mit Intensität λ und $N_t \sim \pi(\lambda t)$ und $\{(X_t),\ t\geq 0\}$ ist eine zusammengesetzter Poisson–Prozeß. Eine Familie von Shift–Operatoren $\vartheta_t : \Omega \mapsto \Omega$ definiert man gemäß

$$\vartheta_t(\omega) := (y_0+...+y_n,z_1+...+z_{n+1}-t,y_{n+1},z_{n+2},y_{n+2},...)$$

für $N_t(\omega) = n$, d.h. $z_1+...+z_n \leq t < z_1+...+z_{n+1}$.

Aus $\sum z_m = \infty$ folgt wieder $z_1+...+z_{n+1}-t + \sum_{n+2}^\infty z_m = \infty$, also $\vartheta_t(\omega)\in\Omega$.

Es gilt: $X_s(\vartheta_t(\omega)) = X_{t+s}(\omega)$ gemäß

$X_s(\vartheta_t(\omega)) = (Y_0 + \sum_{m\geq 1,T_m\leq t} Y_m)(\vartheta_t(\omega))$

$= y_0+...+y_n + \sum_{m\geq n+1,z_1+...+z_{n+1}-t+z_{n+2}+...+z_m\leq s} y_m$

$= \sum_{m\geq 0,z_1+...+z_m\leq t+s} y_m = X_{t+s}(\omega)$ für $z_1+...+z_n \leq t < z_1+...+z_{n+1}$.

Nach Konstruktion ist $P_x[X_0=x] = 1$. Nun soll 2.4 mit P_y , y bel. , statt P angewendet werden. Dabei gilt:

$Q(s,x;B) := P_y[x+X_s-X_0 \in B] = P_x[x+X_s-X_0 \in B] = P_x[X_s \in B]$.

Nach 2.4a ist $x \mapsto P_x[X_s \in B]$ mb. Nach 2.4c folgt: $P_y[X_{t+s} \in B\,|\,\mathfrak{F}_t^X] = Q(s,X_t;B)$.

Also ist $(X,\{P_x\})$ eine MF. Ebenso zeigt man, daß (X,N) nach geeigneter Wahl von W–Maßen $P_{x,n}$ eine MF ist.

Da $Y_n=0$ zugelassen ist, finden zu den Zeiten T_n eventuell nur "virtuelle" Sprünge statt, die man nicht aus den Pfaden von X ablesen kann. Insofern kann $\mathfrak{F}_t^{X,N}$ größer als $\mathfrak{F}_t^X$ sein. Es folgt auch sofort wie im Beweis von 2.4 "(b)⇒(c)": $P_x[X_{t+s} \in B\,|\,\mathfrak{F}_t^{X,N}] = Q(s,X_t;B)$. Also ist auch $(X,\mathbb{F}^{X,N})$ ein MP auf $(\Omega,\mathfrak{F},P_0)$ mit Zustandsraum $(\mathbb{R},\mathfrak{B}_1)$ und interner MF $(X,\{P_x\})$. []

Wie bei der Brownschen Bewegung läßt sich ein Poisson–Prozeß mit einem allgemeineren Filterung definieren; dazu gilt dann ein zu 2.8 analoges Resultat.
Es soll die ME bzgl. allgemeinerer Ereignisse der Zukunft untersucht werden.

Def. 7. Sei $S^{[0,\infty)} := \{\xi : [0,\infty) \mapsto S\}$ und $\pi_t : S^{[0,\infty)} \mapsto S$ die Kordinatenabb. [Projektion] mit $\pi_t(\xi) := \xi(t)$. Ferner sei $\otimes_t \mathfrak{S} = \otimes_{0\le t<\infty} \mathfrak{S} := \sigma(\pi_t, t\ge 0)$.
Bei einem Prozeß X stehe $X_{t+\cdot}$ für den Prozeß $X_{t+\cdot} := (X_{t+s}, s\ge 0)$.

2.10 Lemma. Sei $(\Omega,\mathfrak{F})$ ein Meßraum und $X = (X_t, t\ge 0)$ eine Familie von Abb. $X_t : \Omega \mapsto S$.
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) X_t ist $\mathfrak{F}$–mb $\forall$ t, d.h. X ist ein stochastischer Prozeß;

ii) $X : \Omega \mapsto S^{[0,\infty)}$ ist $\mathfrak{F} - \otimes_t \mathfrak{S} - \text{mb}$;

iii) $X : \Omega \mapsto D$ ist $\mathfrak{F} - D \cap \otimes_t \mathfrak{S} - \text{mb}$ $\forall D$ mit $X(\Omega) \subset D \subset S^{[0,\infty)}$.

Ein Beispiel für D in (iii) wäre $D = C[0,\infty)$ bei $S = \mathbb{R}$.

Beweis von 2.10. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Diese Richtung folgt mit W.t.I [8.2] daraus, daß $\cup_t \sigma(X_t)$ ein Erzeugendensystem von $\otimes_t \mathfrak{S}$ ist.
"(ii) $\Rightarrow$ (iii)" folgt mit W.th.I [8.8] aus $X^{-1}(D \cap A) = X^{-1}(A)$.
Die Richtungen "(ii) $\Rightarrow$ (i)" und "(iii) $\Rightarrow$ (ii)" sind offensichtlich. []

Gemäß 2.10 ist die Verteilung PX^{-1} von X definiert. Als kanonischer Prozeß würde sich also wie im zeitdiskreten Fall $\pi = (\pi_t)$ auf $(S^{[0,\infty)}, \otimes_t \mathfrak{S}, PX^{-1})$ anbieten. Da π die Identität auf $S^{[0,\infty)}$ ist, hat π dann die gleiche Verteilung wie X. Allerdings hat dann π keine besonderen Pfadeigenschaften, die im zeitstetigen Fall jedoch wichtig werden wie §1 zeigt. Insofern ist dies Modell für den zeitstetigen Fall nicht günstig.

2.11 Satz. Sei $(X,\mathbb{F})$ ein MP auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit interner MF $(X^o,\{P_x\})$, so daß die Pfade von $X_{t+\cdot}$ und X^o in einer Pfadmenge $D \subset S^{[0,\infty)}$ liegen $\forall$ t. Dann gelten für $\Gamma \in D \cap \otimes_t \mathfrak{S}$:

i) die Abb. $x \mapsto P_x[X^o \in \Gamma]$ ist mb, also ist $(x,A) \mapsto P_x[A]$ eine ÜW von S nach $\mathfrak{F}_\infty^{X^o}$;

ii) eine Version von $P[X_{t+\cdot} \in \Gamma \mid \mathfrak{F}_t]$ ist $P_{X_t}[X^o \in \Gamma]$ $\forall$ t;

iii) $P[X \in \Gamma] = \int \nu[dx]\, P_x[X^o \in \Gamma]$ mit $\nu := PX_0^{-1}$.

Gemäß (iii) ist also die Verteilung PX^{-1} von X durch die Startverteilung ν und die interne MF gegeben.

Beweis: Sei $\Gamma \in D \cap \bigotimes_t \mathfrak{S}$, also $\Gamma = D \cap \Gamma'$ mit $\Gamma' \in \bigotimes_t \mathfrak{S}$. Dann gilt: $\{X_{t+\cdot} \in \Gamma\} = \{X_{t+\cdot} \in \Gamma'\}$. Also können wir o.E. $D = S^{[0,\infty)}$ wählen.

Die Menge $\{ \Gamma \in \bigotimes_t \mathfrak{S}$; es gelten (i) und (ii) $\}$ ist ein Dynkinsystem. Somit genügt es, (i) und (ii) für Elemente aus einem $\cap$–stabilen Erzeugendensystem zu zeigen. Ein solches bilden die Mengen der Form: $\{\pi_{s_1} \in B_1,...,\pi_{s_n} \in B_n\}$. Wir zeigen noch allgemeiner:

(2.12) $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $0\le s_1<...<s_n<\infty$, $f_m : S \mapsto [0,\infty)$ mb , $1\le m\le n$, gelten:

i)' $x \mapsto E_x[\prod_1^n f_m(X^o_{s_m})]$ ist mb;

ii)' eine Version von $E[\prod_1^n f_m(X_{t+s_m}) \mid \mathfrak{F}_t]$ ist $E_{X_t}[\prod_1^n f_m(X^o_{s_m})]$.

Der Beweis wird induktiv geführt. Im Falle n=1 gelten (i)'und (ii)' für Indikatorfunktionen $f_1 = \mathbf{1}_B$. Der allgemeine Fall folgt mit maßtheoretischer Induktion.

"1,n → n+1" Gemäß 11.6 können wir die Induktionvorauss. auch für E_x, X^o und $\mathbb{F}^{X^o}$ anstelle von E,X und $\mathbb{F}$ benutzen. Sei dazu $A \in \mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_{t+s_m}$. Wir verwenden den Fall n=1:

$$E[f_{n+1}(X_{t+s_{n+1}}) \mid \mathfrak{F}_{t+s_n}] = E_{X_{t+s_n}}[f_{n+1}(X^o_{s_{n+1}-s_n})] =: g(X_{t+s_n}) :$$

$$\int_A \prod_1^{n+1} f_m(X_{t+s_m})\, dP = \int_A E[\prod_1^n f_m(X_{t+s_m}) \cdot f_{n+1}(X_{t+s_{n+1}}) \mid \mathfrak{F}_{t+s_n}]\, dP$$

$$= \int_A \prod_1^n f_m(X_{t+s_m}) \cdot g(X_{t+s_n})\, dP$$

$$= \int_A E_{X_t}[\prod_1^n f_m(X^o_{s_m}) \cdot g(X^o_{s_n})]\, dP \quad \text{nach Inkuktionvorauss. mit } \tilde{f}_n := f_n \cdot g.$$

Ebenso folgt: $E_x[\prod_1^{n+1} f_m(X^o_{s_m})] = E_x[\prod_1^n f_m(X^o_{s_m}) \cdot g(X^o_{s_n})]$.

Also ist $x \mapsto E_x[\prod_1^{n+1} f_m(X^o_{s_m})]$ nach Induktionsvorauss. mb und es gilt (ii)' für n+1.

Mit (i) und (ii) folgt nun:

$$P[X \in \Gamma] = E[P[X \in \Gamma \mid \mathfrak{F}_0]] = E[P_{X_0}[X^o \in \Gamma]] = \int \nu[dx]\, P_x[X^o \in \Gamma] \;.\; [\,]$$

2.13 Korollar. Sei $(X,\{P_x\})$ eine MF und $Y : \Omega \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{F}^X_\infty$–mb und nach unten beschränkt.

Dann gilt: eine Version von $E_x[Y\circ\vartheta_t \mid \mathfrak{F}^X_t]$ ist $E_{X_t}[Y]$ $\forall\, t\ge 0$, $x\in S$.

Der Beweis ist eine Übungsaufgabe.

Def. 8. Ist $(X,\mathbb{F})$ ein MP mit interner MF $(X^o,\{P_x\})$, so heißen

$$(x,B) \mapsto P(t,x,B) := P_x[X^o_t \in B],\ t\ge 0,$$

die zugehörigen **Übergangswahrscheinlichkeiten (ÜW)**.

2.14 Korollar. Sei $(X,\mathbb{F})$ ein MP mit ÜW $P(t,\cdot,\cdot)$ und Startverteilung ν. Dann gilt:

(a) $P(t+s,x,B) = \int P(t,x;dy)\, P(s,y,B)$ (**Chapman–Kolmogoroff–Gleichung**);

(b) $P[X_0 \in B_0, X_{t_1} \in B_1, ..., X_{t_n} \in B_n] =$

$$\int_{B_0} \nu[dx] \int_{B_1} P(t_1,x,dx_1) \cdots \int_{B_{n-1}} P(t_{n-1}-t_{n-2}, x_{n-2}; dx_{n-1})\, P(t_n-t_{n-1}, x_{n-1}; B_n)$$

$\forall\ 0 \le t_1 < \ldots < t_n < \infty,\ B_m \in \mathfrak{S},\ 0 \le m \le n \in \mathbb{N}.$

Der **Beweis** ist eine Übungsaufgabe.

2.15 Beispiel. Sei $(X,\{P_x\})$ eine deterministische MF, d.h. es ex. eine Funktion $\varphi : [0,\infty)\times S \mapsto S$ mit $X_t = \varphi(t,x)$ P_x–f.s. . Dann ist $x \mapsto \varphi(t,x)$ notwendigerweise mb wegen $\{x;\ P_x[X_t \in B] = 1\} = \{x;\ \varphi(t,x) \in B\}$. Aus der ME folgt:

$1 = P_x[X_{t+s} \in \{\varphi(t+s,x)\}] = E_x[P_{X_t}[X_s \in \{\varphi(t+s,x)\}]] = P_{\varphi(t,x)}[X_s \in \{\varphi(t+s,x)\}]$.

Also ergibt sich:

(2.16) $\varphi(s,\varphi(t,x)) = \varphi(t+s,x)$.

Ist umgekehrt φ eine mb Funktion mit (2.16), so ist dazu eine deterministische MF definiert.

Wegen $\varphi(\cdot,x) \in S^{[0,\infty)}$ kann $\Omega = S^{[0,\infty)}$, $P_x = \delta_{\varphi(\cdot,x)}$ gewählt werden. $[]$

2.17 Beispiel für $Y\circ\vartheta_t$.

Sei $\tau := \tau_B := \inf\{s\ge 0;\ X_s \in B\}$, $B \subset S$, dann ergibt sich:

$t + \tau\circ\vartheta_t = t + \inf\{s\ge 0;\ X_s\circ\vartheta_t \in B\} = \inf\{t+s;\ s\ge 0,\ X_{t+s} \in B\} = \inf\{s\ge t;\ X_s \in B\} =: \tau_t$.

Damit erhält man: $X_\tau\circ\vartheta_t = X_{t+\tau\circ\vartheta_t}$.

wegen $X_\tau\circ\vartheta_t = X_{\tau\circ\vartheta_t}(\vartheta_t) = X_{\tau_t - t}(\vartheta_t) = X_{\tau_t}$.

Ist $(X,\{P_x\})$ eine MF, ist X rechtsstetig und B offen, so ist $\tau = \tau_B$ nach 1.8a eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit und es gilt: $P_x[\tau_t < t+u \mid \mathfrak{F}_t] = P_{X_t}[\tau < u]$ gemäß 2.13.

Mit 2.11 würde dies ebenfalls folgen wegen [vgl. 1.8a]:

$\{\tau < u\} = \cup_{s\in[0,u)\cap\mathbb{Q}} \{X_s \in B\} = \{X \in \Gamma\}$ mit $\Gamma := \cup_{s\in[0,u)\cap\mathbb{Q}} \{\pi_s \in B\} \in \otimes_t \mathfrak{S}$.

Wählt man $D \subset S^{[0,\infty)}$ so, daß D nur rechtsstetige Funktionen und alle Pfade von X enthält, so muß man nicht auf den Beweis von 1.8a zurückgreifen, sondern kann die Aussage von 1.8a direkt benutzen. Faßt man dazu den Koordinatenprozeß $\pi = (\pi_t,\ t\ge 0)$ auf als Prozeß auf D und setzt $\tau^\pi := \tau_B^\pi := \inf\{s\ge 0;\ \pi_s \in B\}$, so ist τ^π nach 1.8a $D \cap \otimes_t \mathfrak{S}$ – mb.

Also gilt wegen $\tau = \tau^\pi\circ X$: $\{\tau \in C\} = \{X \in (\tau^\pi)^{-1}(C)\}$ mit $(\tau^\pi)^{-1}(C) =: \Gamma \in D \cap \otimes_t \mathfrak{S}$. $[]$

§3 Starke Markoff–Prozesse

Sei (S,d) und (S,$\mathcal{S}$) wie in §2. Jetzt soll die Markoff–Eigenschaft (ME) mit einer Stoppzeit τ als Gegenwart formuliert werden. Diese starke ME gilt im zeitdiskreten Fall stets, kann aber umgangen werden wegen der Zerlegung: $\{\tau<\infty\} = \cup_n \{\tau=n\}$.
Es wird eine Beschränkung auf $\{\tau<\infty\}$ nötig sein, da nur dort zukünftige Ereignisse nach τ in natürlicher Weise betrachtet werden können. Dazu die

Def. 1. Sei $(\Omega,\mathcal{F},P)$ und eine Unter–σ–Algebra $\mathcal{G}$ von $\mathcal{F}$ gegeben. Für $G\in\mathcal{G}$, $C\in\mathcal{F}$ heißt f **Version von $P[C|\mathcal{G}]$ auf G**, falls $f : G \mapsto [0,1]$ $G\cap\mathcal{G}$–mb ist und falls gilt:

(3.1) $$P[A\cap C] = \int_A f\, dP\,,\quad A \in G\cap\mathcal{G},$$

Entsprechend ist **eine Version von $E[Y|\mathcal{G}]$ auf $\mathcal{G}$** definiert.

Die Restriktion von $P[C\cap G|\mathcal{G}]$ auf G ist eine solche Version von $P[C|\mathcal{G}]$ auf G.

Def. 2. (X,$\mathbb{F}$) heißt ein (zeithomogener) **starker MP** auf $(\Omega,\mathcal{F},P)$ mit Zustandsraum (S,$\mathcal{S}$), falls X $\mathbb{F}$–progressiv ist und eine MF $(X^o,\{P_x,s\in S\})$ ex., sodaß für $\mathbb{F}_+$–Stoppzeiten τ, $B\in\mathcal{S}$, $s\geq 0$, gilt:

eine Version von $P[X_{\tau+s}\in B|\mathcal{F}_{\tau+}]$ auf $\{\tau<\infty\}$ ist $P_{X_\tau}[X^o_s \in B]$ **(starke ME)**.

Die Def. ist sinnvoll, denn $\tau+s$, $s\geq 0$, ist $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit nach 1.7b. also gilt:

$\{X_{\tau+s}\in B,\tau<\infty\} \in \mathcal{F}_{(\tau+s)+}\subset\mathcal{F}_\infty\subset\mathcal{F}$ gemäß 1.10. $P_{X_\tau}[X^o_s \in B]$ ist ferner $\{\tau<\infty\}\cap\mathcal{F}_{\tau+}$– mb nach 1.9c, 1.10b. Die Formulierung der starken ME mit $\mathbb{F}_+$ ist stärker als die mit $\mathbb{F}$. Jeder starke MP ist MP; wähle $\tau\equiv t$.

Def. 3. Eine MF $(X,\{P_x\})$ heißt **stark**, falls $(X,\mathbb{F}^X)$ starker MP auf $(\Omega,\mathcal{F},P_x)$ ist $\forall$ $x\in S$, wobei sie interne MF zu sich selbst ist, d.h. $(X^o,\{P_x\}) = (X,\{P_x\})$.
Die entsprechende Aussage zu 2.6 gilt bei einer starken MF also per def. .

3.2 Satz. Sei (X,$\mathbb{F}$) starker MP auf $(\Omega,\mathcal{F},P)$ mit interner MF $(X^o,\{P_x\})$, so daß die Pfade von $X_{t+\cdot}$ und X^o in einer Pfadmenge $D\subset S^{[0,\infty)}$ liegen $\forall$ t.
Dann gilt für $\mathbb{F}_+$–Stoppzeiten τ, $\Gamma\in D\cap\otimes_t\mathcal{S}$:

eine Version von $P[X_{\tau+\cdot}\in\Gamma|\mathcal{F}_{\tau+}]$ auf $\{\tau<\infty\}$ ist $P_{X_\tau}[X^o\in\Gamma]$.

Beweis: Es ist $X_{\tau+s}$ mb; somit ist nach 2.10 $X_{\tau+\cdot}$ $\{\tau<\infty\}\cap\mathcal{F}$ – $D\cap\otimes_t\mathcal{S}$ – mb. Ferner ist nach 2.11 $x\mapsto P_x[X^o\in B]$ mb und somit $P_{X_\tau}[X^o\in\Gamma]$ $\{\tau<\infty\}\cap\mathcal{F}_{\tau+}$– mb. Jetzt kann der Beweis wie in 2.11 geführt werden. Dabei wird die starke ME auch für $\tau+s_n$ benutzt. []

Def. 4. Sei X stoch. Prozeß auf Ω, $\tau : \Omega \mapsto [0,\infty]$ eine Abb., $\{\vartheta_t,\ t\geq 0\}$ eine Familie von Shiftoperatoren. Dann wird $\vartheta_\tau : \{\tau<\infty\} \mapsto \Omega$ definiert durch

$$\vartheta_\tau = \vartheta_t \text{ auf } \{\tau=t\},\ 0\leq t<\infty.$$

3.3 Folgerung. $X\circ\vartheta_\tau = X_{\tau+\cdot}$ auf $\{\tau<\infty\}$.

Im nächsten Satz wird die starke ME formuliert für einen Fall, wo der Abstand $t-\tau$ zwischen der Gegenwart τ und der Zukunft $t = \tau + (t-\tau)$ zufallsabhängig ist. Dies kann zurückgeführt werden auf die Tatsache, daß bei der Bildung von $E[...|\mathfrak{F}^X_{\tau+}]$ die $\mathfrak{F}^X_{\tau+}$–mb Zva $Z = t-\tau$ als Konstante s betrachtet werden können und man somit wieder in der Situation von Def. 2 ist.

3.4 Satz. Sei $(X,\{P_x\})$ eine starke MF auf $(\Omega,\mathfrak{F})$, τ $\mathbb{F}^X_+$–Stoppzeit.

(a) Seien $(E,\mathfrak{E})$ Meßraum, $Z : \Omega \mapsto E$ $\mathfrak{F}^X_{\tau+}$–$\mathfrak{E}$–mb, $T : E\times\Omega \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{E}\otimes\mathfrak{F}^X_\infty$– mb und nach unten beschränkt. Dann gilt für $f(z,x) := E_x[T(z,\cdot)]$,$z\in E, x\in S$:

f ist $\mathfrak{E}\otimes\mathfrak{S}$–mb und eine Version von $E_x[T(Z,\vartheta_\tau)|\mathfrak{F}^X_{\tau+}]$ auf $\{\tau<\infty\}$ ist $f(Z,X_\tau)$, $x\in S$.

(b) Für $B\in\mathfrak{S}$ ist $(s,x)\mapsto P(s,x,B) = P_x[X_s\in B]$ $[0,\infty)\cap\mathfrak{B}_1\otimes\mathfrak{S}$–mb , und eine Version von $P_x[X_t\in B|\mathfrak{F}^X_{\tau+}]$ auf $\{\tau\leq t\}$ ist $P(t-\tau,X_\tau;B)$, $x\in S$.

Beweis: a) Nach 2.10 haben wir $\mathfrak{F}^X_\infty = \sigma(X)$. Für $A\in\mathfrak{F}^X_\infty$, also $A = \{X\in\Gamma\}$, gilt wegen 3.3:

(*) $\{X_{\tau+\cdot}\in\Gamma,\ \tau<\infty\} = \{\vartheta_\tau\in A,\ \tau<\infty\}$

und somit gemäß 3.2

(3.5) eine Version von $P_x[\vartheta_\tau\in A|\mathfrak{F}^X_{\tau+}]$ auf $\{\tau<\infty\}$ ist $P_{X_\tau}[A]$ für $A\in\mathfrak{F}^X_\infty, x\in S$.

Dabei gilt mit $Q(x;A) := P_x[A]$, $A\in\mathfrak{F}^X_\infty$, gemäß 2.11(i):

(**) Q ist eine ÜW von $(S,\mathfrak{S})$ nach $(\Omega,\mathfrak{F}^X_\infty)$.

Es sollen zwei Beweise für (a) gegeben werden.

1. Beweis: Betrachte erst $T(z,\omega) = \mathbf{1}_C(z)\cdot\mathbf{1}_A(\omega)$, $C\in\mathfrak{E}$, $A\in\mathfrak{F}^X_\infty$.

Dann gilt $f(z,x) = \mathbf{1}_C(z)\cdot P_x[A]$ und mit W.th.II [1.10g]:

$$E[T(Z,\vartheta_\tau)|\mathfrak{F}^X_{\tau+}] = \mathbf{1}_C(Z)\cdot P[\vartheta_\tau\in A|\mathfrak{F}^X_{\tau+}] = \mathbf{1}_C(Z)\cdot P_{X_\tau}[X\in\Gamma].$$

Der allgemeine Fall folgt jetzt mit einem Dynkin–Argument und maßtheoretischer Induktion.

2. Beweis: Mit $\Omega_\tau := \{\tau<\infty\}\in\mathfrak{F}^X_{\tau+}$ ist wegen 1.10b $X_{\tau+s}$ $\forall$ s und somit $X_{\tau+\cdot}$ $\Omega_\tau\cap\mathfrak{F}^X_\infty$–mb. In Hinblick auf (*) ist also die Abb. $\vartheta_\tau : \Omega_\tau\mapsto\Omega$ $\Omega_\tau\cap\mathfrak{F}^X_\infty - \mathfrak{F}^X_\infty$ – mb.

Nun ist f mb nach (**) und der Vorstufe zu Fubini [W.th.II 1.2: setze dort (x,z) statt x].

Nach (3.5) ist $Q(X_\tau;A)$ Version von $P_x[\vartheta_\tau\in A|\mathfrak{F}^X_{\tau+}]$ auf Ω_τ $\forall$ $x\in S$.

Jetzt kann W.th. II [1.10h mit Z anstelle von X und ϑ_τ anstelle von Y] angewendet werden. Aus formalen Gründen benötigen wir eigentlich eine Version von $P_x[\vartheta_\tau \in A \,|\, \mathfrak{F}^X_{\tau+}]$ die f.s. auf Ω definiert ist. Für die Anwendung auf (b) kann allerdings $\tau=\tau\wedge t$ und somit bereits $\Omega_\tau=\Omega$ angenommen werden. Andernfalls kann man entweder zu $P_x[\,\cdot\,|\,\tau<\infty]$ übergehen oder $P_x[\vartheta_\tau \in A \,|\, \mathfrak{F}^X_{\tau+}]$ fortsetzen. Dazu definieren wir etwa $\vartheta_\infty := \omega_\infty$ für ein bel. $\omega_\infty \in \Omega$ und $Q(X_\infty;\cdot) := \delta_{\omega_\infty}$.

Dann folgt leicht , daß $Q(X_\tau(\cdot);\cdot)$ bed. Vert. von ϑ_τ bzgl. $\mathfrak{F}^X_{\tau+}$ ist.

b) Betrachte $T(s,\omega) := \mathbf{1}_{[0,\infty)}(s)\cdot \mathbf{1}_B(X_s(\omega))$; dann ist T $\mathfrak{B}_1\otimes\mathfrak{F}^X_\infty$–mb nach 1.2c.
Es gilt $T(s,\vartheta_\tau) = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(s)\cdot \mathbf{1}_B(X_{\tau+s})$ nach 3.3 und $T(t-\tau,\vartheta_\tau) = \mathbf{1}_{\{\tau\le t\}}\cdot \mathbf{1}_B(X_t)$.
Ferner ist die Abbildung $Z := t-\tau$ nach 1.9c $\mathfrak{F}_{\tau+}$–mb.
Mit $f(s,x) = E_x[T(s,\cdot)] = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(s)\cdot P(s,x,B)$ folgt aus (a) die Beh. []

Es folgt ein hinreichendes Kriterium für die starke ME.

3.6 Satz. Sei $(X,\mathbb{F})$ rechtsstetiger MP auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit ÜW $P(s,x;\cdot)$. Dann ist $(X,\mathbb{F})$ eine starker MP unter der folgenden **Feller–Bedingung**:

$x \mapsto P(s,x;\cdot)$ ist w–folgenstetig, d.h. $P(s,x_n;\cdot) \overset{w}{\to} P(s,x_0;\cdot)$ für $x_n \to x_0$ $\forall$ s.

3.6A Zusatz. In 3.6 genügt sogar die schwächere Bedingung:

(*) $\quad P(s,X_{t_n}(\omega);\cdot) \overset{w}{\to} P(s,X_{t_0}(\omega);\cdot)$ für $t_n \downarrow t_0 \in [0,\infty)$, $\omega\in\Omega$.

Beweis: Für $f \in C_b(S)$ ist nach Vorauss. $x \mapsto E_x[f(X^o_s)]$ stetig und somit $t \mapsto E_{X_t}[f(X^o_s)]$ rechtsstetig, und zwar auch unter (*).

Sei τ $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit und $\tau_n := \frac{k}{n}$ für $\frac{k-1}{n} \le \tau < \frac{k}{n}$ bw. $\tau_n := \infty$ für $\tau=\infty$.
[Dann ist τ_n übrigens $\mathbb{F}$–Stoppzeit mit abzählbar vielen Werten. Für solche gilt – wie im zeitdiskreten Fall – die starke ME stets. Dies wird hier gerade ausgenutz werden.] Es gilt:

$$\tau \le \tau_n \le \tau + \frac{1}{n} \text{ und } f(X_{\tau_n+s}) \to f(X_{\tau+s}) \text{ für } n\to\infty \text{ auf } \{\tau<\infty\}.$$

Sei nun $A \in \mathfrak{F}_{\tau+}$; dann ist $A^n_k := A \cap \{\frac{k-1}{n} \le \tau < \frac{k}{n}\} \in \mathfrak{F}_{k/n}$ gemäß 1.11 und wegen der ME:

$$A^n_k\!\int f(X_{\tau_n+s})\,dP = A^n_k\!\int f(X_{k/n+s})\,dP$$
$$= A^n_k\!\int E_{X_{k/n}}[f(X^o_s)]\,dP = A^n_k\!\int E_{X_{\tau_n}}[f(X^o_s)]\,dP.$$

Durch Summation über k ergibt sich mit $A_\tau := A \cap \{\tau<\infty\}$:

$$A_\tau\!\int f(X_{\tau_n+s})\,dP = A_\tau\!\int E_{X_{\tau_n}}[f(X^o_s)]\,dP.$$

Für $n\to\infty$ folgt wegen maj. Konv.:

(**) $\quad {}_{A_\tau}\!\int f(X_{\tau+s})\,dP = {}_{A_\tau}\!\int E_{X_\tau}[f(X_s^o)]\,dP.$

Die starke ME ergibt sich nun, wenn man den Schluß von $f\in C_b(S)$ auf $\mathbf{1}_B$ durchführen kann. Sei dazu o.E. $P[A_\tau]>0$. Mit

$\mu[B] := {}_{A_\tau}\!\int \mathbf{1}_B(X_{\tau+s})\,dP / P[A_\tau]$ und $\nu[B] := {}_{A_\tau}\!\int E_{X_\tau}[\mathbf{1}_B(X_s^o)]\,dP / P[A_\tau]$

werden W–Maße auf $\mathfrak{S}$ definiert, sodaß die linke Seite von (**) gerade $\int f d\mu \cdot P[A_\tau]$ und die rechte Seite $\int f d\nu \cdot P[A_\tau]$ ist. Dies erhält man mit maßtheoretischer Induktion.
Nach (**) gilt $\int f d\mu = \int f d\nu \;\forall\, f\in C_b(S)$. Dann folgt $\mu=\mu$ gemäß W.th.I [7.2]. □

Die Ergebnisse sollen nun auf die BB angewendet werden.

3.7 Korollar. Eine d–dim. BB $(W,\mathbb{F})$ mit Drift b und Dispersionskoeff. σ ist ein starker MP.

Beweis: Sei $f\in C_b(S)$. Es ist z.z.: $x \mapsto E_{\sigma^{-1}x}[f(sb + \sigma W_s^o)] = E_0[f(sb + \sigma(\sigma^{-1}x + W_s^o))] = E_0[f(sb + x + \sigma W_s^o)]$ ist stetig; dies folgt aber sofort wegen maj. Konv. . □

3.8 Lemma. Sei $U \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine orthogonale Matrix. Dann ist mit W auch $UW := \{UW_t,\ t\ge 0\}$ eine d–dim. standardisierte BB mit $\mathbb{F}^W = \mathbb{F}^{UW}$; also ist die Verteilung von UW, aufgefaßt als Zva mit Werten in $C[0,\infty)^d$, das Wienermaß auf $C[0,\infty)^d$.

Beweis: UW hat wieder stetige Pfade und startet in 0. Die Zuwächse sind als Funktionen von unabhängigen Zva wieder unabhängig. Mit W.th.I [16.6k] folgt:

$$UW_t - UW_s = U(W_t - W_s) \sim \overset{d}{\underset{1}{\times}} N(0,t-s).$$

Wegen $W_t = U_t^{-1}(U_t W_t)$ folgt leicht $\mathbb{F}^W = \mathbb{F}^{UW}$. □

In der zweiten Hälfte des Paragraphen sollen nun **Eigenschaften der BB** mit Hilfe der starken ME hergeleitet werden.

Sei dazu $(W,\{P_x\})$ die in 2.3 konstruierte BF auf $\Omega = C[0,\infty)^d$, $P := P_0$. Gemäß 3.7 ist $(W,\{P_x\})$ eine starke MF. Wegen $W = id_\Omega$ und $P_x = P(x+W)^{-1}$ gilt $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_\infty^W$ und für die zugehörigen ÜW

$$P(s,x;B) = P_x[W_s \in B] = P[x+W_s \in B],$$

und die starke ME läßt sich wie folgt schreiben:

(3.9) Sei $Y : \Omega \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{F}$–mb und nach unten beschränkt,
$h(x) := E_x[Y] = E[Y \circ (x+W)]$.
Eine Version von $E_x[Y \circ \vartheta_\tau \mid \mathfrak{F}_{\tau+}]$ auf $\{\tau<\infty\}$ ist $h(W_\tau)$ $\forall$ $\mathbb{F}_+$–Stoppzeiten τ.

Beispiel aus der Potentialtheorie: **Lösung eines Dirichletproblems.**

Sei G offen in $\mathbb{R}^d$, $f : \partial G \mapsto \mathbb{R}$ nach unten beschränkt und stetig. Gesucht ist $u : \bar{G} = G \cup \partial G \mapsto \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

u ist stetig auf $\bar{G}$, harmonisch in G (d.h. $\Delta u := \sum \partial^2 u / \partial x_i^2 = 0$ in G) und $u \big|_{\partial G} = f$.

Sei $B_r := \{y \in \mathbb{R}^d;\ \|y\|<r\}$ und μ_r die ((d–1)–dim.) Gleichverteilung auf ∂B_r, also $\mu_r = \mu_r U^{-1}$ für alle orthogonalen $U \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Damit gilt:
u ist genau dann harmonisch in G, wenn u dort die Mittelwerteigenschaft besitzt, d.h. wenn

$u(x) = \int_{\partial B_r} u(x+y)\, \mu_r[dy]$ $\forall$ r>0 mit $x+\bar{B}_r \subset G$ gilt (vgl. Karatzas & Shreve §4.2).

Setze $\sigma := \inf\{t \geq 0;\ W_t \notin G\}$; dann ist σ nach 1.8c eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit und es gilt wegen der Stetigkeit der Pfade:

$W_\sigma \in \partial G$ auf $\{W_0 = x, \sigma<\infty\}$, $x \in \bar{G}$.

Sei nun $u(x) := E_x[f(W_\sigma) \cdot \mathbf{1}_{\{\sigma<\infty\}}]$. Für $x \in \partial G$ gilt $u(x) = f(x)$.
Für u soll nun die Mittelwerteigenschaft bei $x \in G$ nachgewiesen werden.

Wähle r>0, sodaß $x+\bar{B}_r \subset G$, und definiere

$\tau := \inf\{t \geq 0;\ W_t - W_0 \notin B_r\}$

Dann ist τ nach 1.8c eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit mit $P_x[\tau<\infty]=1$; denn

$P_x[\tau=\infty] \leq P[\|W_m - W_{m-1}\| < 2r,\ \forall\, m \leq n] = P[\|W_1\|<2r]^n \to 0$ für $n \to \infty$.
Auf $\{W_0 = x, \sigma<\infty\}$ gilt $\tau \leq \sigma$ und $\tau + \sigma \circ \vartheta_\tau = \inf\{t \geq \tau;\ W_t \notin G\} = \sigma$, also

$W_\sigma = W_{\tau+\sigma\circ\vartheta_\tau} = W_\sigma \circ \vartheta_\tau$

(vgl. Bsp. 2.17). Somit ergibt sich

$$u(x) = \int_{\{\tau<\infty\}} f(W_\sigma \circ \vartheta_\tau) \cdot \mathbf{1}_{\{\sigma\circ\vartheta_\tau<\infty\}}\, dP_x$$
$$= \int_{\{\tau<\infty\}} E_x[f(W_\sigma)\circ\vartheta_\tau \cdot \mathbf{1}_{\{\sigma<\infty\}}\circ\vartheta_\tau \mid \mathfrak{F}_{\tau+}]\, dP_x = \int_{\{\tau<\infty\}} u(W_\tau)\, dP_x$$
$$= \int u(W_\tau)\, dP_x = \int u(x+W_\tau)\, dP = \int u(x+y)\, dPW_\tau^{-1}.$$

Dabei wurde benutzt, daß τ invariant gegenüber Translationen $\omega \mapsto x + \omega$ ist.

Wegen der Stetigkeit der Pfade gilt: $W_\tau - W_0 \in \partial B_r$, also ist PW_τ^{-1} auf ∂B_r konzentriert. Für eine orthogonale Matrix U definiere $\bar{U} : \Omega \mapsto \Omega$ durch $(\bar{U}\omega)(t) := \omega(0) + U(\omega(t) - \omega(0))$.

Dann gilt: $\tau = \tau \circ \bar{U}$ wegen $U^{-1}(B_r) = B_r$ sowie $W_\tau \circ \bar{U} = W_0 + U(W_\tau - W_0)$.

Nach 3.9 gilt: $P = P\bar{U}^{-1}$. Damit ergibt sich schließlich:

$$PW_\tau^{-1} = P\bar{U}^{-1}W_\tau^{-1} = P(W_\tau \circ \bar{U})^{-1} = P(UW_\tau)^{-1} = (PW_\tau^{-1})U^{-1}.$$

d.h. PW_τ^{-1} ist rotationsinvariant. Somit muß PW_τ^{-1} die Gleichverteilung μ_r sein.
Es ist noch zu klären, ob $u<\infty$ gilt und u stetig auf ∂G ist. Das erste kann durch Vorauss. an f und/oder G gesichert werden; das zweite hängt von der Regularität von ∂G ab (vgl. wieder Karatzas & Shreve]. []

Es sollen nun mit Hilfe der starken ME, insbesondere mit dem Spiegelungsprinzip, die Verteilungen von Zva bestimmt werden, die zu einer BB W definiert sind.

Def. 4. Sei d=1.

$\tau_y := \inf\{t\geq 0, W_t > y\}$ ist die **Passierzeit des Niveaus** y>0,
$M_t := \max_{0\leq s\leq t} W_s$ ist das **laufende Maximum**,
$(|W_t|, t\geq 0)$ ist die (bei Null) **reflektierte BB**,
$(Z_t, t\geq 0)$ mit $Z_t := W_t - \inf_{0\leq s\leq t} 0\wedge W_s$ (≥ 0) ist die **regulierte BB**,
$Z_t(x,b,\sigma) := X_t - \inf_{o\leq s\leq t} 0\wedge X_s$ mit $X_s := x + bs + \sigma W_s$, $x,b\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$,
definiert die regulierte BB bei Start in x mit Drift b und Dispersionskoeff. σ.

Nach 1.8a gilt:

(3.10) τ_y ist $\mathbb{F}$–Stoppzeit, $\{\tau_y < t, W_0 = 0\} = \{M_t > y, W_0 = 0\}$.

Interpretation von (Z_t): (X_t) ist ein Modell für einen sog. netput–Prozeß,, d.h. für die Differenz von einem kumulativen input–Prozeß (Produktion, Ankünfte) (A_t) und einem kumulativen potentiellen output–Prozeß (Nachfrage, Bedienung) (B_t). Der wirkliche (effektive) output–Prozeß ist derjenige, bei dem etwa die Nachfrage bei leerem Lager verlorengeht oder keine Bedienungen beendet werden, wenn keine Kunden mehr da sind. Dann beschreibt Z_t gerade den Lagerbestand bzw. die Warteschlangenlänge z.Zt. t.

Ein Problem des Brownschen Modells liegt darin, daß ein typischer Pfad stetig und in keinem Intervall von endlicher Variation ist, also nicht Differenz zweier isotoner Pfad $A_\cdot(\omega)$ und $B_\cdot(\omega)$ sein kann. Der Vorteil liegt darin, daß explizite Formeln zur Verfügung stehen. Dazu bestehen ähnliche Grenzwertsätze wie das Invarianzprinzip, die das Brownsche Modell als Approximation für realistischere Modelle auszeichnen.

3.11 Satz. Für $t>0$, $x\le y$, $y>0$ gelten folgende Aussagen:

(0) $W_t \sim N(0,t) \sim \sqrt{t}\cdot W_1$ mit $W_1 \sim N(0,1)$ unter P;
(a) $P[W_t \le x, M_t \le y] = P[x-2y < W_t \le x]$, $x\le y$;
(b) $P[M_t \le y] = P[|W_t| \le y] = P[M_t - W_t \le y]$;
(c) $P[\tau_y \le t] = 2\cdot P[W_t > y]$, $P[\tau_y < \infty] = 1$, $E[\tau_y] = \infty$.

Gemäß 3.11b haben der Prozeß $M = (M_t)$ des laufenden Maximums und die reflektierte BB $|W|$ die gleichen 1–dim. Randverteilungen. Dies ist für die 2–dim. Randverteilungen nicht mehr richtig; denn es gilt z.B. für $s<t$: $P[M_t < M_s] = 0 < P[|W_t| < |W_s|]$. Dagegen haben die reflektierte BB $|W|$ und der Prozeß $M-W$ sogar als Zva mit Werten in $C[0,\infty)$ die gleiche Verteilung (vgl. 3.17).
Die Aussagen von 3.11c gelten entsprechend auch für negative Niveaus y, da W gemäß 3.8 durch $-W$ ersetzt werden kann. Die BB ist gemäß 3.11c also **nullrekurrent** im gleichen Sinne wie die 1–dim. symmetrische Irrfahrt.

3.12 Bemerkung. Mit Hilfe von 3.11 lassen sich auch die [gemeinsamen] Dichten berechnen.

Die **Beweisidee** soll zunächst für $\tau := \tau_y$ an 3.11 (c) erläutert werden. Es ist

$$P[\tau < t] = P[\tau < t, W_t > y] + P[\tau < t, W_t < y] = P[W_t > y] + P[\tau < t, W_t - W_\tau < 0]$$
$$\stackrel{?}{=} \ldots + P[\tau < t, -(W_t - W_\tau) < 0] = \ldots + P[\tau < t, W_t > y] = 2\cdot P[W_t > y].$$

Der Schritt " $\stackrel{?}{=}$ " wird **Spiegelungsprinzip** genannt. Der Prozeß $(W_t - W_\tau\ ,\ t\ge\tau)$ verhält sich unabhängig von der Vergangenheit $\mathfrak{F}^W_{\tau+}$ so wie der Prozeß (W_t) unter P, seine Verteilung ist also unabhängig gegenüber einer Spiegelung [gemäß 3.8 mit UW = $-W$]. Zu seiner Rechtfertigung muß die starke ME herangezogen werden.

Beweis von 3.11. Sei wieder $\tau := \tau_y$. (0) ist bekannt.
a) Wegen $P[y+W_s < x] = P[y-W_s < x] = P[2y-x < y+W_s]$ gilt:
(*) $P(s,y;(-\infty,x)) = P(s,y;(2y-x,\infty))$ (Spiegelungsinvarianz).
Somit ergibt sich mit 3.4b, sowie $P[W_t=x]=0$ und $2y-x\ge y$:

$$P[M_t > y, W_t \le x] = P[M_t > y, W_t < x] = P[\tau < t, W_t \le x]$$
$$= \int_{\{\tau<t\}} P(t-\tau,y;(-\infty,x))\, dP \stackrel{(*)}{=} P[\tau < t, W_t > 2y-x]$$
$$= P[W_t > 2y-x] = P[W_t < x-2y] = P[W_t \le x-2y] \ .$$

b) $P[M_t \le y] = P[W_t \le y, M_t \le y]$; jetzt kann (a) benutzt werden.
Die Verteilung von $M_t - W_t$ ergibt sich aus der gemeinsamen Verteilung von M_t und W_t, also aus (a) und 3.12 oder mit einer **Zeitumkehr**:

$M_t - W_t = \max_{0\le s\le t}(W_s - W_t) = \max_{0\le s\le t} \tilde{W}_s$ mit $\tilde{W}_s := W_{t-s} - W_t$. Dabei gilt:

(3.13) $(\tilde{W}_s,\ 0\le s\le t)$ ist eine standard. BB auf $[0,t]$

wegen $\tilde{W}_0 = 0$, $\tilde{W}_s - \tilde{W}_u = W_{t-s} - W_{t-u} = -(W_{t-u} - W_{t-s}) \sim N(0,s-u)$ $\forall\ u\le s$; die Unabhängigkeit der Zuwächse folgt direkt.

c) Mit (b) und (3.10) folgt: $P[\tau < t] = P[M_t > y] = P[|W_t| > y] = 2\cdot P[W_t > y]$, also

(3.14) $P[\tau_y < t] = 2\cdot P[W_1 > y/\sqrt{t}\,] = P[W_1^2 > y^2/t] = P[y^2/W_1^2 < t]$;

dieser Ausdruck ist stetig in t, also $= P[\tau\le t]$ und konvergiert für $t\to\infty$ gegen: $2\cdot P[W_1 > 0] = 1$. Wegen (3.14) gilt:

$$E[\tau] = y^2\cdot E[W_1^{-2}] = y^2/\sqrt{2\pi}\cdot\int x^{-2}\exp\{-x^2/2\}\,dx \ge \text{const}\cdot\int_0^1 x^{-2}\,dx = \infty.\ [\,]$$

Für die reguliert BB $Z(y,b,\sigma) := (Z_t(y,b,\sigma),\ t\ge 0)$ gilt:

$Z_t(y,0,1) = y+W_t - \inf_{s\le t} 0\wedge(y+W_s)$

$= W_t - \inf_{s\le t}(-y)\wedge W_s = \sup_{0\le s\le t} y\vee(-W_s) - (-W_t)$.

Wegen 3.8 hat $-W$ unter P die gleiche Verteilung wie W. Es folgt:

(3.15) Unter P ist $Z(y,0,1)$ verteilungsgleich mit $y\vee M - W := (y\vee M_t - W_t,\ t\ge 0)$.

Deshalb sollen nun der Prozeß $y\vee M - W$ und seine Beziehungen zur reflektierten BB untersucht werden.

3.16 Satz.

(a) Für $y\in\mathbb{R}$ ist $(|y+W|,\mathbb{F})$ starker MP auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit interner (starker) MF $(|W|,\{P_x,\ x\ge 0\})$.

(b) Für $y\in\mathbb{R}$ ist $(y\vee M - W,\mathbb{F})$ starker MP auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit interner MF $(|W|,\{P_x,\ x\ge 0\})$.

I.a. ist eine Funktion $(f(X_t))$ eines MP X kein MP; die Kenntnis der Gegenwart $f(X_t)$ braucht nicht auszureichen für die Beschreibung der Zukunft $f(X_{t+\cdot})$.

Beweis von 3.16. a1) Wir wählen allgemeiner P_x anstelle von P in Hinblick auf Teila2), wo die Eigenschaften einer MF nachgewiesen werden sollen. Dann sei o.E. y=0 wegen

$$P_x(y+W)^{-1} = P_{x+y}W^{-1}.$$

Wegen $P_x[|W_s|\in B] = P[|x+W_s|\in B] = P[|-x+W_s|\in B]$ $P_{-x}[|W_s|\in B]$

hat man $P_x[|W_{\tau+s}|\in B\,|\,\mathfrak{F}_{\tau+}] = P_{W_\tau}[|W_s|\in B] = P_{|W_\tau|}[|W_s|\in B]$.

a2) Es bleiben die Eigenschaften einer MF z.z. Nach Teile (a1) ist aber $P_{|W_t|}[|W_s|\in B]$ Version auch von $P_x[|W_{t+s}|\in B\,|\,\mathfrak{F}_{\tau+}^{|W|}]$, da $\mathfrak{F}_{\tau+}^{|W|} - \text{mb}$.

b) Mit Hilfe von 3.4a ergibt sich [Übung]:

$$P\left[y\vee M_{\tau+s}-W_{\tau+s}\in B \mid \mathfrak{F}_{\tau+}\right] = P\left[y\vee M_{\tau}\vee\max_{0\le u\le s} W_{\tau+u}-W_{\tau+s}\in B \mid \mathfrak{F}_{\tau+}\right]$$

hat die Version $\bar{q}(W_\tau,M_\tau)$ mit $\bar{q}(x,z) := P_x\left[y\vee z\vee M_s - W_s \in B\right]$.

Es ist $\bar{q}(x,z) = P\left[y\vee z\vee(x+M_s)-(x+W_s)\in B\right]$
$= P\left[(y\vee z - x)\vee M_s - W_s \in B\right] =: q(y\vee z - x);$

also gilt $\bar{q}(W_\tau,M_\tau) = q(y\vee M_\tau - W_\tau)$. Damit ist bereits die ME gezeigt, also daß man sich nur die Gegenwart $y\vee M_\tau - W_\tau$ merken muß.
Es bleibt z.z.: $q(y) = P_y\left[\,|W_s| \in B\right]$. Sei o.E. $y\ge 0$, $B = (u,\infty)$, $u\ge 0$. dann gilt:
$P\left[y\vee M_s - W_s \in B\right] = P\left[M_s \le y,\, W_s < y-u\right] + P\left[M_s > y;\, M_s - W_s > u\right] =: \alpha + \beta$, wobei gilt:
$\alpha = P\left[\pm W_s \le y-u\right] - P\left[W_s \le -y-u\right] = P\left[y+W_s \ge u\right] - P\left[y+W_s \le -u\right]$ gemäß 3.11a.
Es bleibt z.z.: $\beta = 2\cdot P\left[y+W_s \le -u\right]$.
Sei $\tau := \tau_y$. Wegen (3.10) und $M_s = \max_{\tau\le t\le s} W_t$ auf $\{W_0=0,\, \tau<s\}$ ergibt sich:

$\beta = P\left[\tau < s,\, M_s - W_s > u\right] = P\left[\tau < s,\, (M_s - W_\tau) - (W_s - W_\tau) > u\right]$
$= P\left[\tau < s,\, \max_{\tau\le t\le s}(W_t - W_\tau) - (W_s - W_\tau) > u\right]$.

Wie beim Spiegelungsprinzip liegt es nahe, daß sich der Prozeß $(W_t - W_\tau,\, t\ge 0)$ unabhängig von der Vergangenheit $\mathfrak{F}_{\tau+}$ so verhält wie W. In Hinblick auf 3.11b müßte somit folgendes gelten [eine strenge Rechtfertigung mit Hilfe der starken ME ist eine Übung]:
$\beta = P\left[\tau < s,\, \max_{\tau\le t\le s}(W_t - W_\tau) > u\right] = P\left[\tau < s,\, M_s > u+y\right] = P\left[M_s > u+y\right]$,
also mit 3.11b: $\beta = P\left[\,|W_s| > u+y\right] = 2\cdot P\left[W_s \le -u-y\right]$. []

Mit 2.11(iii) folgt, da $|y+W|$ und $y\vee M - W$ bei $y\ge 0$ P–f.s. den gleichen Startpunkt haben:

3.17 Korollar. $y\vee M - W$ hat unter P die gleiche Verteilung wie die reflektierte BB $|y+W|$ mit Start in $y\ge 0$.

3.18 Korollar. Im symmetrischen Fall b=0, also im Fall ohne Drift gilt:
$Z(x,0,\sigma)$ hat unter P die gleiche Verteilung wie $|X| = |x+\sigma W|$.

Beweis: Wie in (3.15) folgt, daß $Z(x,0,\sigma)$ die gleiche Verteilung hat wie

$x\vee\sigma\cdot M - \sigma\cdot W = \sigma(\frac{x}{\sigma}\vee M - W)$ und somit wie $\sigma\left|\frac{x}{\sigma} + W\right| = |x + \sigma\cdot W|$ gemäß 3.17. []

3.19 Bemerkung. [Harrison, J.M. (1985): Brownian Motion and Stoch. Flow Systems, S. 49]

Im allgemeinen Fall $b\in\mathbb{R}$ gilt: $P\left[Z_t(x,b,\sigma) > y\right] = P\left[X_t > y\right] + e^{2by/\sigma^2}\cdot P\left[X_t < -y\right]$.

Der Beweis kann so geführt werden, daß man den Fall $b\ne 0$ mit Hilfe der sog. Girsanov–Transformation (s.u.) auf den Fall b=0 zurückführt. []

§4 Markoffsche Sprungprozesse

Seien X, $(S,\mathcal{S})$, $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ wie in §2.

Def. 1. Ein **Sprungprozeß** X ist ein rechtsstetiger Prozeß mit stückweise konstanten Pfaden, **(4.1)**
d.h. $\forall\, t\geq 0,\ \omega\in\Omega\ \exists\ \varepsilon(t,\omega)>0\ \forall\ 0\leq s<\varepsilon(t,\omega)$: $X_{t+s}(\omega) = X_t(\omega)$.
Ein Sprungprozeß, der auch MP ist, heißt **Markoffscher Sprungprozeß**.
Ist $(X,\{P_x,\ x\in S\})$ eine MF und X ein Sprungprozeß, so heißt $(X,\{P_x,\ x\in S\})$ eine **Markoffsche Sprungfamilie.** Ein Markoffscher Sprungprozeß bzw. eine Markoffsche Sprungfamilie mit abzählbarem Zustandsraum S heißt (zeitstetige) **Markoff–Kette** (MK) bzw. **Markoff–Ketten–Familie** (MKF).

Wir betrachten in diesem Paragraphen die folgende Situation.

Generalvoraussetzung. $(X,\{P_x,\ x\in S\})$ ist eine Markoffsche Sprungfamilie auf $(\Omega,\mathfrak{F})$ und $\mathbb{F} = \mathbb{F}^X$.

Die Verteilung eines MP ist nach 2.11 durch die Startverteilung und die interne MF bestimmt. Deswegen wird es hier genügen, eine MF zu betrachten.

4.2 Bemerkung. Wegen (4.1) gilt [vgl. §5]: $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_t^X = \mathfrak{F}_{t+}^X = \mathfrak{F}_{t+}$.

Dies erklärt, warum hier $\mathfrak{F}_{t+}$ nicht benutz werden wird. □

Aus 2.14 ergibt sich unmittelbar:

4.3 Proposition. Ist S abzählbar, also $(X,\{P_x\})$ eine MKF, so wird durch
(4.4) $P_{ij}(t) := P_i[X_t = j]$ eine Ü–Matrix $\mathbb{P}(t) := (P_{ij}(t))$
definiert; $\mathbb{P}(0)$ ist die Einheitsmatrix. Es gelten die
Chapman–Kolmogoroff–Gleichungen: $\mathbb{P}(t+s) = \mathbb{P}(t)\cdot\mathbb{P}(s)$, $s,t\geq 0$.

4.5 Lemma. (a) $|P(t\pm h,x,B) - P(t,x,B)| \leq 1 - P(h,x,\{x\})$, $t,h\geq 0$;
(b) die Abb. $t \mapsto P(t,x,B)$ ist glm. stetig, $x\in S$, $B\in\mathcal{S}$.

Beweis. a) Betrachte o.E. t–h (sonst verwende t+h anstelle von t).
Mit Chapman–Kolmogoroff (2.14) folgt:
$P(t–h,x,B) – P(t,x,B) = P(t–h,x;B) – \int P(h,x;dy)\, P(t–h,y;B)$
$= [1 – P(h,x;\{x\})]\cdot P(t–h,x;B) – \int_{S\setminus\{x\}} P(h,x;dy)\, P(t–h,y;B) =: A – B$
mit $0\leq A,B \leq 1 – P(h,x;\{x\})$.
b) $\lim_{h\downarrow 0} P(h,x;\{x\}) = \lim_{h\downarrow 0} E[\mathbf{1}_{\{x\}}(X_h)] = P_x[X_0 = x] = 1$ wegen (4.1) und maj. Konvergenz. □
Wegen (4.1) ist die abgeschwächte Feller– Bedingung aus 3.6A erfüllt. Somit folgt:

4.6 Korollar. $(X,\{P_x\})$ ist eine starke MF.

Def. 2. $\sigma := \inf\{s>0;\ X_s \neq X_0\}$ ist der **erste Sprungzeitpunkt**.

4.7 Lemma. Mit τ ist auch $\tau + \sigma\circ\vartheta_\tau$ $(:=\infty$ auf $\{\tau=\infty\})$ $\mathbb{F}$–Stoppzeit; insbesondere ist σ $\mathbb{F}$–Stoppzeit. Auf $\{\tau<\infty\}$ gilt dabei:

$$\tau + \sigma\circ\vartheta_\tau = \inf\{s>\tau;\ X_s \neq X_\tau\} > \tau \text{ und } X_\sigma\circ\vartheta_\tau = X_{\tau+\sigma\circ\vartheta_\tau}.$$

Eine Version von $P[\sigma\circ\vartheta_\tau \in D,\ X_\sigma\circ\vartheta_\tau \in B \mid \mathfrak{F}_\tau]$ auf $\{\tau<\infty\}$ ist $P_{X_\tau}[\sigma \in D,\ X_\sigma]$ für $D \in [0,\infty]\cap\bar{\mathfrak{B}}$, $B\in\mathfrak{S}$.

Beweis: Die Darstellungen von $\tau + \sigma\circ\vartheta_\tau$ und $X_\sigma\circ\vartheta_\tau$ wurden im Beispiel 2.17 behandelt. Dabei ist $\tau + \sigma\circ\vartheta_\tau > \tau$ wegen (4.1). Für $t>0$ gilt mit $\mathbb{Q}_t := \{t\} \cup \mathbb{Q}\cap[0,t]$:
$\{\tau + \sigma\circ\vartheta_\tau \le t\} = \cup_{s\in\mathbb{Q}_t}\{\tau < s;\ X_s \neq X_{\tau\wedge s}\}$ und $\{\tau < s;\ X_s \neq X_{\tau\wedge s}\} \in \mathfrak{F}_s$ nach §1.
Daß σ eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit ist, folgt auch aus 1.8a und 4.2. Da per def. $\mathfrak{F}_\sigma \subset \mathfrak{F}_\infty$ gilt und σ und X_σ somit $\mathfrak{F}_\infty$–mb sind, kann in Hinblick auf 4.6 nun 3.4a angewendet werden. []

Aus der ME wird folgen, daß σ eine gedächtnislose Verteilung haben muß.

4.8 Lemma. Es existiert eine mb Funktion $\lambda : S \mapsto [0,\infty)$ mit $\sigma \sim \text{Exp}(\lambda(x))$ unter P_x. Dabei ist $\text{Exp}(0) := \delta_\infty$.

Beweis: Für $s,t\ge 0$ ergibt sich aus 4.7 mit $\tau=t$:
$P_x[\sigma > t+s] = P_x[\sigma > t,\ \sigma\circ\vartheta_t > s] = \int_{\{\sigma>t\}} P_{X_t}[\sigma>s]\, dP_x = P_x[\sigma > t]\cdot P_x[\sigma > s]$.
Also [vgl. W.th.I 5.18] ex. ein $\lambda(x)$ mit $P_x[\sigma > t] = \exp\{-\lambda(x)\cdot t\}$; wegen $\sigma>0$ ist $\lambda(x)<\infty$. Gemäß 2.11(i) ist $x \mapsto P_x[\sigma > 1] = \exp\{-\lambda(x)\}$ und somit λ mb. []

4.9 Lemma. Unter P_x sind σ und X_σ unabhängig, falls $\lambda(x)>0$.

Im Fall $\lambda(x)=0$ wird X_σ in Def.3 so defininiert werden, daß 4.9 auch dann gilt.

Beweis: Mit 4.7 ergibt sich: $X_\sigma = X_\sigma\circ\vartheta_t$ auf $\{\sigma > t\}$ sowie:
$P_x[X_\sigma \in B,\ \sigma > t] = P_x[X_\sigma\circ\vartheta_t \in B,\ \sigma > t]$
$= \int_{\{\sigma>t\}} P_{X_t}[X_\sigma \in B]\, dP_x = P_x[X_\sigma \in B]\cdot P_x[\sigma > t]$.
Daraus folgt die Unabhängigkeit [vgl. W.th. I 13.1c] []

Def. 3. σ_n sei der **n–te Sprungzeitpunkt**, also:

$\sigma_0 := 0$, $\sigma_1 := \sigma$, $\sigma_{n+1} := \sigma_n + \sigma\circ\vartheta_{\sigma_n}$ $(:= \infty$ auf $\{\sigma_n = \infty\})$;

$\sigma_\infty := \sup \sigma_n$ heißt **Explosionszeitpunkt**;

$\lambda(\cdot)$ heißt die **Sprungrate**.

Sei $e \notin S$ ein externer (Friedhofs–) Zustand, der als isolierter Punkt im Raum $S_e := S\cup\{e\}$ gewählt wird. Dann ist S_e wieder metrisierbar, und $\mathfrak{S}_e$ sei die Borel–σ–Algebra auf S_e. Setze nun $X_\infty := e$, $\lambda(e) = 0$.

$p(x;B) := P_x[X_\sigma \in B]$, $x\in S$, $p(e;\cdot) := \delta_e$.

p ist die ÜW des **eingebetteten (zeitdiskreten) MP** $(X_{\sigma_n}, n\in\mathbb{N}_0)$;

bei abzählb. Zustandsraum S sei $p_{ij} := p(i;\{j\})$, $i,j\in S_e$.

Es gilt offenbar nach Def. von $(X_{\sigma_n}, n\in\mathbb{N}_0)$:

(4.10) $p(x;S\setminus\{x\}) = 1$, für $\lambda(x)>0$;

$p(x;\{e\}) = 1$, für $\lambda(x)=0$.

4.11 Lemma. (a) σ_n ist Stoppzeit für $n\in\mathbb{N}$;

(b) für $x \in S$, $B \in \mathfrak{S}$, $D \in [0,\infty]\cap\bar{\mathfrak{B}}$ gilt:

$$P_x[\sigma_{n+1}-\sigma_n \in D, X_{\sigma_{n+1}}\in B \mid \mathfrak{F}_{\sigma_n}] = \mathrm{Exp}(\lambda(X_{\sigma_n}))[B]\cdot p(X_{\sigma_n};B) \quad \text{auf } \{\sigma_n<\infty\}.$$

Beweis: Die Aussage folgt unmittelbar aus 4.6 – 4.9 wegen

$$\sigma_{n+1}-\sigma_n = \sigma\circ\vartheta_{\sigma_n}, \quad X_{\sigma_{n+1}} = X_\sigma\circ\vartheta_{\sigma_n}. \ []$$

Der Name eingebetteter MP wird nun gerechtfertigt.

4.12 Satz. Unter jedem Maß P_x ist $((X_{\sigma_n}, n\ge0), (\mathfrak{F}_{\sigma_n}, n\ge0))$ ein zeitdiskreter MP mit ÜW p und mit Zustandsraum S, falls $\lambda(x)>0\ \forall\ x\in S$, bzw. S_e sonst.

Beweis: Es gilt $\mathfrak{F}_{\sigma_n} \subset \mathfrak{F}_{\sigma_{n+1}}$ nach 1.9e, also ist $(\mathfrak{F}_{\sigma_n}, n\ge0)$ eine Filterung. X_{σ_n} ist $\mathfrak{F}_{\sigma_n}$ – mb nach 1.10b. Falls $\lambda(x)>0\ \forall\ x\in S$, folgt aus 4.11 mit Induktion: $P_x[\sigma_n<\infty] = 1\ \forall\ n, x\in S$. Der Rest ist Hinblick auf 4.11 klar. Im Fall $\lambda(x)=0$ gilt: $P_x[\sigma = \infty, X_\sigma = e] = 1$. Nun sind einfache Sonderbetrachtungen nötig. So ist

$$\{\sigma_n = \infty\} = \{\sigma_n = \infty, X_{\sigma_n} = e\} \subset \{\sigma_{n+1} = \infty, X_{\sigma_{n+1}} = e\}. \ []$$

Def. 4. Die Markoffsche Sprungfamilie $(X,\{P_x\})$ heißt **regulär**, falls gilt:

$$\sigma_\infty = \infty \quad P_x\text{–f.s. } \forall\ x\in S.$$

Es soll nun ein Kriterium für die Regularität gegeben werden.

4.13 Satz. (a)$P_x[\sigma_\infty < \infty] = P_x[\sum_{m=1}^{\infty} 1/\lambda(X_{\sigma_m}) < \infty]$, $x \in S$.

(b) $(X,\{P_x\})$ ist genau dann regulär, wenn gilt:

(4.14) Regularitätskriterium. $\sum_{m=1}^{\infty} 1/\lambda(X_{\sigma_m}) < \infty$ P_x– f.s. $\forall\, x \in S$.

Wegen $1/\lambda(X_{\sigma_m}) = E[\sigma_{m+1}-\sigma_m \,|\, \mathfrak{F}_{\sigma_m}]$ auf $\{\sigma_m<\infty\}$ interessiert also gerade die Äquivalenz von $\sum_m E[\sigma_{m+1}-\sigma_m \,|\, \mathfrak{F}_{\sigma_m}] = \infty$ f.s. und $\sum_m (\sigma_{m+1}-\sigma_m) = \infty$ f.s. .

Dabei wird sich das folgende Lemma als nützlich erweisen.

4.15 Lemma. Sei $0 \le b_m \le \infty$; dann gilt: $\lim_{\alpha \downarrow 0} \prod_1^{\infty} \frac{1}{1+\alpha \cdot b_m} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sum b_m > \infty \\ 0 & \sum b_m = \infty \end{cases}$.

Beweis: Sei o.E. $\sup b_m \le 1$. Benutze jetzt: $\frac{1}{2}x \le \ln(1+x) \le x \;\; \forall\, 0 \le x \le 1$. []

Beweis von 4.13: Für mb Funktionen $f_m : S \mapsto [0,\infty)$, $g : [0,\infty) \mapsto [0,\infty]$ gilt :

(4.16)
$$E_x[\prod_{m=1}^{n} g(\sigma_m-\sigma_{m-1}) \cdot f_m(X_{\sigma_m})]$$
$$= E_x[\prod_{m=1}^{n} \int g\, dExp(\lambda(X_{\sigma_m})) \cdot f_m(X_{\sigma_m})] \,.$$

Der Beweis erfolgt mit Induktion nach n. Der Fall n=0 ist klar.

Für den Schritt "n → n+1" setze: $f_n'(x) := \int g\, dExp(\lambda(x)) \cdot \int p(x;dy)\, f_{n+1}(y)$,

dann folgt mit 4.11:

$$E_x[g(\sigma_{n+1}-\sigma_n) \cdot f_{n+1}(X_{\sigma_{n+1}}) \,|\, \mathfrak{F}_{\sigma_n}] = f_n'(X_{\sigma_n})$$
$$= E_x[\int g\, dExp(\lambda(X_{\sigma_n})) \cdot f_{n+1}(X_{\sigma_{n+1}}) \,|\, \sigma_m, X_{\sigma_m} \,.\, m \le n] \,.$$

Mit $f_n \cdot f_n'$ anstelle von f_n kann jetzt die Induktionsvoraussetzung eingesetzt werden [vgl. auch den Beweis von 2.11].

Setzt man in (4.16) nun $g(t) := e^{-\alpha t}$ und $f_m \equiv 1$, so gilt:

$\int g\, dExp(\lambda) = (1 + \frac{\alpha}{\lambda})^{-1}$ (auch für $\lambda=0$) und man erhält:

$$E_x[e^{-\alpha \cdot \sigma_n}] = E_x[\prod_{m=1}^{n} \frac{1}{1 + \alpha/\lambda(X_{\sigma_m})}] \,.$$

Wegen maj. Konvergenz folgt: $E_x[e^{-\alpha \cdot \sigma_\infty}] = E_x[\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha/\lambda(X_{\sigma_m})}]$.

Wegen monotoner Konv. ergibt schließlich mit 4.14:

$\lim_{\alpha \downarrow 0} E_x[e^{-\alpha \cdot \sigma_\infty}] = P_x[\sigma_\infty < \infty]$ und

$\lim_{\alpha \downarrow 0} E_x[\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha/\lambda(X_{\sigma_m})}] = P_x[\sum_{m=1}^{\infty} 1/\lambda(X_{\sigma_m}) < \infty]$ []

4.17 Lemma. Das Regularitätskriterium (4.14) ist erfüllt unter jeder der folgenden Bedingungen: (i) die Sprungrate ist beschränkt;

(ii) der Zustandsraum S ist endlich;

(iii) S ist abzählbar und es gilt: $P_i[X_{\sigma_n} \in T] \to 0$ $(n\to\infty)$, $i\in T$, wobei T die Menge der transienten Zuständie der MK (X_{σ_n}) ist.

(iv) S ist abzählbar, und die MK (X_{σ_n}) ist rekurrent. **Beweis:** Unter (i) ist die Bedingung klar, (ii) impliziert (i) und (iv) impliziert (iii).

Es gelte nun (iii). Dann ergibt sich mit $X_n := X_{\sigma_n}$:

$P_i[\sum 1/\lambda(X_m) = \infty] \geq \sum_{j\notin T} P_i[X_n = j,\ X_m = j \text{ für } \infty \text{ viele } m>n]$

$= \sum_{j\notin T} p_{ij}^{(n)} P_j[X_m = j \text{ für } \infty \text{ viele } m>0] = \sum_{j\notin T} p_{ij}^{(n)}$ [vgl. W.th.II 7.4].

Dabei gilt: $\sum_{j\notin T} p_{ij}^{(n)} \to 1$ für $i\in T$ nach Vorauss. und $\sum_{j\notin T} p_{ij}^{(n)} = 1$ für $i\notin T$; da man nur von einem transienten Zustand in einen transienten Zustand gelangen kann [vgl. W.th.II 7.14]. □

4.18 Beispiel: **Poissonprozeß.**

Für die in 2.9 konstruierte Poissonfamilie [setze dort $Q = \delta_1$] kann $S = \mathbb{N}_o$, $\lambda(\cdot) \equiv \lambda \in (0,\infty)$, $p_{i,i+1} = 1$ gewählt werden. Hier liegt einer der wenigen zeitstetigen MPe vor, bei denen die ÜW berechnet werden. Es gilt [vgl. W.th.I 20.11.]:

$$P_{ij}(t) = P_{0,i-j} = e^{-\lambda t}\cdot(\lambda t)^{j-i}/(j-i)!,\ j\geq i\ .$$ □

4.19 Beispiel: Zusammengesetzter Poissonprozeß.

Für die in 2.9 konstruierte zusammengesetzte Poissonfamilie kann $S = \mathbb{R}$, $\lambda(\cdot) \equiv \lambda \in (0,\infty)$, $p(x; x+B) = Q(B)$ gewählt werden mit $x+B := \{x+y;\ y\in B\}$. Ist Q auf $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{N}_0$) konzentriert, so kann auch $S = \mathbb{Z}$ (bzw. $\mathbb{N}_0$) gewählt werden.

So kann etwa der zeitliche Verlauf der Ankünfte von Kunden in Gruppen modelliert werden. Die Verteilung der Größe einer ankommenden Gruppe ist dabei durch Q gegeben. Die Verteilung der Zeitdauer zwischen zwei Gruppenankünften ist gerade Exp(λ). Dann beschreibt X_t bei einem Start in 0 die Zahl der angekommenden Kunden in $(0,t]$. □

4.20 Lemma. Seien $[0,\infty) \ni s \mapsto \lambda_{ms} \in [0,\infty)$ mb Funktionen mit $\Lambda_m(t) := \int_0^t \lambda_{ms}\, ds < \infty$, $t>0$, und $\Lambda(\infty) \equiv \infty$. Seien $Y_1,...,Y_n$ unabhängige $[0,\infty)$–wertige Zva mit

$$P[Y_m > t] = \exp\{-\Lambda_m(t)\}.$$

Sei $Z := \min(Y_1,...,Y_n)$, $J := \min\{m \le n;\ Y_m = Z\}$. Dann gilt:

(a) $Y_m \neq Y_\ell$, $\forall\, m \neq \ell$ f.s. ;

(b) $P[Z > t] = \exp\{-\sum_1^n \Lambda_m(t)\}$;

(c) $P[J = j \mid Z = s] = \lambda_{js} / \sum_1^n \lambda_{ms}$;

(d) Sind die $\lambda_{ms} = \lambda_m$ unabhängig von s, so sind J und Z unabhängig mit $Z \sim \mathrm{Exp}(\sum_1^n \lambda_m)$.

Der Beweis von 4.20 ist eine einfache Übungsaufgabe. Die Zva Y_m aus 4.20 habem sogenannte **Lebensdauerverteilungen**. Dies sind Verallgemeinerungen der Exponentialverteilung.

4.21 Beispiel: **M/M/1–Warteschlange.** Es interesssiert die Warteschlange X_t z.Zt. t.

Modellannahme I: Die Zwischenankunftszeiten bilden eine iid Folge von Exp(λ)–verteilten Zva, d.h. der Ankunftsstrom wird durch einen Possonprozeß mit Intensität λ beschrieben. Die Servicezeiten sind eine iid Folge von Exp(μ)–verteilten Zva, die auch unabhängig von den Zwischenankunftszeiten sind.

Es soll eine Beschreibung durch eine MKF gegeben werden. Zunächst einige heuristische Überlegungen. Auf Grund der Gedächtnislosigkeit von Exp(λ) und Exp(μ) ist es für die Beschreibung der Entwicklung nach t ohne Belang, wenn man das System z.Zt. t neu starten läßt mit X_t als Anfangslänge der Warteschlange und mit einer neu beginnenden Bedienung im Falle "X_t>0". Also scheint eine Beschreibung durch eine zeitstetige MK gerechtfertigt. Einen Ansatz für die Daten p_{ij}, λ(i), $i,j \in \mathbb{N}_0$, liefert das obige Lemma 4.20.

Sei A die erste Ankunftszeit mit $A \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, B die Länge der ersten Bedienungszeit mit $B \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ und k die Anfangslänge.

Im Fall k>0 ist $\sigma = A \wedge B$ und $X_\sigma = k+1$ bei A>B und $X_\sigma = k-1$ bei B<A.

Im Fall k=0 ist $\sigma = A$. Mit 4.20 gelangt man also zu der folgenden

Modellannahme II: $(X,\{P_k\})$ ist eine MKF mit

(4.22) $S = \mathbb{N}_0$, $\lambda(0) = \lambda$, $p_{01} = 1$ und

$$\lambda(k) = \lambda+\mu,\ p_{k,k+1} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu},\ p_{k,k-1} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \text{ für } k>0.$$

Es scheint also auf Grund von z.T. heuristischen Überlegungen klar zu sein, daß die Modellannahme I die Modellannahme II impliziert. Ein formaler Beweis ist aber kompliziert.

Andererseits ist auch durch die Modellannahme II eine mathematisches Modell festgelegt [vgl. §6]. Deshalb kann und soll diese Modellannahme II zugrunde gelegt und dann natürlich nicht mehr auf die Modellannahme I zurückgegriffen werden. □

4.23 Lemma. Für $h>0$ ist $((X_{nh}, n\in\mathbb{N}_0), (\mathfrak{F}_{nh}, n\in\mathbb{N}_0))$ ein zeitdiskreter MP mit ÜW $P(h,\cdot;\cdot)$ und $P(h,x;\{x\}) > 0$.

Bew. Die ME ist offensichtlich. Es gilt: $P(h,x;\{x\}) \geq P_x[\sigma > h] = \exp\{-\lambda(x)\cdot h\} > 0$. []

4.24 Satz. Sei $x\in S$, $B\in\mathfrak{S}$. Existiert $\lim_{n\to\infty} P(n/2^m,x;B)$ $\forall\, m\in\mathbb{N}$, so existiert
$\lim_{t\to\infty} P(t,x;B)$.

Beweis: Wegen $\{n/2^m\} \supset \{n/2^{m+1}\}$ ist $\lim_{n\to\infty} P(n/2^m,x;B) =: P(\infty,x;B)$ unabhängig von $m\in\mathbb{N}$. Nun gilt:

$$|P(t,x;B) - P(\infty,x;B)| \leq |P(t,x;B) - P(n/2^m,x;B)| + |P(n/2^m,x;B) - P(\infty,x;B)| ,$$
$\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0 : |P(t,x;B) - P(s,x;B)| < \varepsilon/2$ für $|t-s|<\delta$ in Hinblick auf 4.5.

Wähle nun m mit $1/2^m < \delta$ und dazu n_0 mit $|P(n/2^m,x;B) - P(\infty,x;B)| < \varepsilon/2$ $\forall\, n\geq n_0$. Setze $t_0 := n_0/2^m$. Für $t\geq t_0$ existiert dann ein $n\geq n_0$ mit $n/2^m \leq t < (n+1)/2^m$.

Es folgt: $|n/2^m - t| < \delta$. []

4.25 Korollar. Ist S abzählbar, so existiert $\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$ $\forall\, i,j\in S$.

Beweis: gemäß 4.23 ist für $h>0$ $((X_{nh}, n\in\mathbb{N}_0), (\mathfrak{F}_{nh}, n\in\mathbb{N}_0))$ eine zeitdiskrete MK mit Ü–Matrix $\mathbb{P}(h)$. Diese ist stets aperiodisch wegen $P_{ii}(h) > 0$ $\forall\, i\in S$. Somit existiert stets

$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)}(h) = \lim_{n\to\infty} P_{ii}(nh)$ [vgl. W.th.II 7.30].

Also ist die Voraussetzung von 4.24 erfüllt. []

Sätze über die Darstellung der Limes–W. $P_{ij}(\infty) := \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$ und ein Zusammenhang mit stationären Verteilungen und mit Rekurrenzeigenschaften ergeben sich wie bei einer zeitdiskreten MK unter Benutzung von

$$P_{ij}(\infty) := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t P_{ij}(s)\ ds.$$

§5 Maßtheoretische Eigenschaften von Sprungprozessen.

Es wird ein Sprungprozeß betrachtet, bei dem (T_n) die Sprungzeiten und (Z_n) die Sprungziele bezeichnen sollen.

Generalvoraussetzung: Seien $(\Omega,\mathfrak{F})$, $(S,\mathfrak{S})$ Meßräume, $(S_n,\ n\in\mathbb{N})$ und $(Z_n,\ n\in\mathbb{N}_0)$ mb Abb. auf $(\Omega,\mathfrak{F})$ mit Werten in $(0,\infty]$ bzw. S. Sei o.E. $e \in S$ (also bereits $S = S_e$). Es gelte:

(5.0a) $S_n = \infty \ \Rightarrow\ Z_n = e,\ S_{n+1} = \infty$ für $n \in \mathbb{N}$.

Sei $T_n := \sum_1^n S_m$, $0 \le n \le \infty$, $H_n := ((T_m,Z_m), 0\le m\le n)$, $N_t := \sum_1^\infty \mathbf{1}_{\{T_n\le t\}}$,

$X_t := \begin{cases} Z_n & \text{für } T_n \le t < T_{n+1} \\ e & t \ge T_\infty \end{cases}$, und $X_\infty = e$,

$\mathfrak{F}_t := \sigma(X_s,N_s,\ 0\le s<\infty,\ s\le t),\ 0\le t\le\infty,\ \mathbb{F} := (\mathfrak{F}_t)$.

Wegen $\{T_n = \infty\} = \cup_1^n \{S_m = \infty\}$ folgt aus (5.0a):

(5.0b) $X_{T_n} = Z_n$ wegen $T_n = \infty \Rightarrow Z_n = e$.

Der Prozeß (X,N) ist rechtsstetig und somit progressiv.

5.1 Lemma. (a) T_n, $n\in\mathbb{N}$, und T_∞ sind $\mathbb{F}$–Stoppzeiten;

(b) $\mathfrak{F}_t = \sigma(\{Z_n \in B,\ T_n \le s\},\ n\in\mathbb{N}_0,\ 0\le s<\infty,\ s\le t,\ B\in\mathfrak{S}),\ 0\le t\le\infty$;

$\mathfrak{F}_\infty = \sigma(T_n,Z_n^e,\ n\in\mathbb{N}_0)$

(c) $\sigma(H_n) \subset \mathfrak{F}_{T_n}$, $0\le n\le\infty$.

Es wird noch gezeigt werden, daß in (c) "=" gilt.

Beweis: a) Es ist $\{T_n \le t\} = \{N_t \ge n\} \in \mathfrak{F}_t$ und $\{T_\infty \le t\} = \cap_n \{T_n \le t\}$.

b) "$\subset$" folgt aus a) und: $\{X_s \in B\ ,\ N_s = n\} = \{T_n \le s,\ Z_n \in B\} \setminus \{T_{n+1} \le s\}$.

"$\supset$" folgt aus a) und: $\{Z_n \in B,\ T_n \le s\} = \{X_{T_n} \in B,\ T_n \le s\} \in \mathfrak{F}_s$;

denn X_{T_n} ist $\mathfrak{F}_{T_n}$–mb nach §1. Nun folgt:

$\mathfrak{F}_\infty = \sigma(\{Z_n \in B,\ T_n \le s\},\ n\in\mathbb{N}_0,\ 0\le s<\infty,\ B\in\mathfrak{S}) \subset \sigma(T_n,Z_n,\ n\in\mathbb{N}_0) = \sigma(T_n,X_{T_n},\ n\in\mathbb{N}_0) \subset \mathfrak{F}_\infty$.

c) Nach §1 hat man: $\{Z_m \in B,\ T_m \in D\} = \{X_{T_m} \in B,\ T_n \in D\} \in \mathfrak{F}_{T_m} \subset \mathfrak{F}_{T_n}$, $m\le n$. $[\,]$

5.2 Satz. Sei Y ein Sprungprozeß , τ eine $\mathbb{F}^Y$–Stoppzeit. Dann gilt:

(a) $\mathbb{F}^Y_+ = \mathbb{F}^Y$.

(b) $\mathfrak{F}^Y_\tau = \sigma(Y^\tau) := \sigma(Y_{s\wedge\tau},\ s\ge 0)$.

Beweis: a) Sei Y ein stochastischer Prozeß auf $(\Omega,\mathfrak{F})$ mit Zustandsraum $(E,\mathfrak{E})$.

Sei $A \in \mathfrak{F}^Y_{t+2^{-k}}$ $\forall\, k\in\mathbb{N}$; zu zeigen ist: $A \in \mathfrak{F}^Y_t$.

Es gilt: $A = \{(Y_s,\, s\le t+2^{-k}) \in \Gamma_k\}$ mit $\Gamma_k \in \otimes_{s\le t+2^{-k}} \mathfrak{E}$ [vgl. 2.10]. Setze

$B_k = \{Y_{t+s} = Y_t,\, 0\le s\le 2^{-k}\} \uparrow \Omega$ und $A_k := \{(Y_{s\wedge t},\, s\le t+2^{-k}) \in \Gamma_k\} \in \mathfrak{F}^Y_t$.Dann gilt:

$A\cap B_k = A_k\cap B_k$.

Es folgt für die symmetrische Differenz: $A_k \,\Delta\, A \subset B_k^c \downarrow \emptyset$ und somit:

(*) $A = \lim A_k$ (= lim inf A_k = lim sup A_k).

Aus (*) folgt $A \in \mathfrak{F}^Y_t$ wegen $A_k \in \mathfrak{F}^Y_t$.

b) (i) Die Beziehung $\mathfrak{F}^Y_\tau \supset \sigma(Y^\tau)$ gilt stets, da $Y_{s\wedge\tau}$ $\mathfrak{F}_{s\wedge\tau}$–mb ist mit $\mathfrak{F}_{s\wedge\tau} \subset \mathfrak{F}_\tau$.

(ii) Wir setzen wie im Beweis von 3.6:

$\tau_k := m/2^k =: t_m$ auf $A_m := \{t_{m-1} \le \tau < t_m\}$ bzw. $\tau_k := \infty$ auf $A_\infty := \{\tau = \infty\}$.

und zeigen zunächst: $\mathfrak{F}^Y_\tau \subset \sigma(Y^{\tau_k})$.

Es ist $A_m := \{\tau_k = t_m\} \in \mathfrak{F}^Y_{t_m}$ und τ_k Stoppzeit mit $\tau_k \downarrow \tau$.

Wir haben: $\mathfrak{F}^Y_t = \{\, \{(Y_s,\, s\le t) \in C\};\ C \in \otimes_{s\le t} \mathfrak{E}\,\}$ (vgl. 2.10).

Wir zeigen mit Inkuktion nach m: $A_m \in \sigma(Y^{\tau_k})$.

Für m = 1 gilt: $A_1 =: \{(Y_s,\, s\le t_1) \in C_1\} = \{(Y_{s\wedge\tau_k},\, s\le t_1) \in C_1\} \in \sigma(Y^{\tau_k})$, da $\tau_k \ge t_1$.

Für "$\{1,...,m\} \to m+1$" beachte: $s = s\wedge\tau_k$ $\forall\, s\le t_{m+1}$ auf $\{\tau_k \ge t_{m+1}\} = \Omega \setminus \cup_1^m A_n$. Es folgt:

$A_{m+1} = \{\tau < t_{m+1}\} \setminus \cup_1^m A_n =: \{(Y_s,\, s\le t_{m+1}) \in C_{m+1}\} \setminus \cup_1^m A_n$

$= \{(Y_{s\wedge\tau_k},\, s\le t_{m+1}) \setminus \cup_1^m A_n \in \sigma(Y^{\tau_k})$.

Es folgt auch $A_\infty = \Omega \setminus \cup_1^\infty A_n \in \sigma(Y^{\tau_k})$.

(iii) Sei $A \in \mathfrak{F}_\tau$, dann ist $A \cap A_m = A \cap \{t_{m-1} \le \tau < t_m\} \in \mathfrak{F}_{t_m}$. Also haben wir:

$A \cap A_m =: \{(Y_s,\, s\le t_m) \in \Gamma_m\} = \{(Y_s,\, s\le t_m) \in \Gamma_m\} \cap A_m$

$= \{(Y_{s\wedge\tau_k},\, s\le t_m) \in \Gamma_m\} \cap A_m \in \sigma(Y^{\tau_k})$ nach (ii)

und somit $A = \cup_{1\le m\le\infty} A \cap \{\tau_k = t_m\} \in \sigma(Y^{\tau_k})$.

(iv) Setze $B_k := \{Y_{\tau+s} = Y_\tau,\, 0\le s\le 1/2^k,\, \tau < \infty\} \cup \{\tau = \infty\} \uparrow \Omega$. Dann ergibt sich aus (iii):

$A \cap B_k =: \{(Y_{s\wedge\tau_k},\, 0\le s<\infty) \in \tilde\Gamma_k\} \cap B_k = \{(Y_{s\wedge\tau},\, 0\le s<\infty) \in \tilde\Gamma_k\} \cap B_k$,

also $A \,\Delta\, \{(Y_{s\wedge\tau},\, 0\le s<\infty) \in \tilde\Gamma_k\} \subset B_k^c \downarrow \emptyset$. Somit gilt:

$A = \lim \{(Y_{s\wedge\tau},\, 0 \le s < \infty) \in \tilde\Gamma_k\} \in \sigma(Y^\tau)$. []

5.3 Korollar. (a) $\mathbb{F}_+ = \mathbb{F}$.

(b) $\mathfrak{F}_\tau = \sigma((X,N)^\tau) := \sigma((X_{s\wedge\tau},N_{s\wedge\tau}), s\geq 0)$ für jede $\mathbb{F}$–Stoppzeit τ..

(c) $\mathfrak{F}_{T_n} = \sigma(H_n)$, $0\leq n\leq\infty$.

(d) Sei τ $\mathbb{F}$–Stoppzeit, $n\in\mathbb{N}_0$, dann existiert zu $A\in\mathfrak{F}_\tau$ ein $A_n\in\sigma(H_n)$ mit $A\cap\{\tau<T_{n+1}\} = A_n\cap\{\tau<T_{n+1}\}$.

Beweis: Setze $Y_t := (X_t,N_t)$. Dann folgen (a) und (b) aus 5.2.
c) Gemäß 5.1c ist nur noch "$\subset$" zu zeigen. Nach Teil b) gilt: $\mathfrak{F}_{T_n} = \sigma((X_{s\wedge T_n},N_{s\wedge T_n}), s\geq 0)$. Nach Def. von (X,N) folgt aber leicht $\sigma((X_{s\wedge T_n},N_{s\wedge T_n}), s\geq 0)\subset\sigma(T_m,Z_m;\ 0\leq m\leq n)$.
Der Beweis von d) ist eine Übungsaufgabe. []

Unser nächstes Ziel ist eine Darstellung von Stoppzeiten. Es soll zunächst der Fall betrachtet werden, daß höchstens ein Sprung vorliegt. Dazu betrachten wir

$$(X,N)^{S_1} = ((X,N)_{s\wedge S_1},\ s\geq 0).$$

5.4 Lemma. $\mathfrak{H}_t := \sigma((X,N)_{s\wedge S_1},\ 0\leq s\leq t) = \sigma(Z_0,S_1^t,Z_1^t)$ mit $(S_m^t,Z_m^t) := \begin{cases}(S_m,Z_m) & \text{für } S_m\leq t\\ (\infty\ ,e\ ) & S_m>t\end{cases}$.

Zu $A\in\mathfrak{H}_t$ ex. $B\in\mathfrak{S}$ mit $A\cap\{t<S_1\} = \{Z_0\in B,\ t<S_1\}$.

Beweis: Einerseits gilt: $(X,N)_{s\wedge S_1} = \begin{cases}(Z_0,0) & s<S_1^t\\ (Z_1^t,1) & s\geq S_1^t\end{cases}$ für und andererseits:

$Z_0 = X_{0\wedge S_1}$, $\{S_1^t\leq s\} = \{N_{s\wedge S_1} = 1\}$ für $s\leq t$,

$Z_1^t = X_{t\wedge S_1}$ auf $\{N_{t\wedge S_1} = 1\}$ und $Z_1^t = e$ auf $\{N_{t\wedge S_1} = 0\}$.

Nun folgt: $A\cap\{t<S_1\} = \{(Z_0,\infty,e)\in\tilde{B}\}\cap\{t<S_1\} = \{Z_0\in B_m\}\cap\{t_m<S_1\}$,

wobei $B_m\in\mathfrak{S}$ als der (∞,e)–Schnitt von $\tilde{B}_m$ gewählt wird. []

5.5 Proposition. Sei $\mathbb{H} := (\mathfrak{H}_t)$ wie in 5.4 und τ eine $\mathbb{H}$–Stoppzeit. Dann existiert eine mb Funktion $h : S\mapsto[0,\infty]$ mit $\tau\wedge S_1 = h(Z_0)\wedge S_1$,
d.h. $\tau = h(Z_0)$ auf $\{S_1>h(Z_0)\}$ und $\tau\geq S_1$ auf $\{S_1\leq h(Z_0)\}$.

Beweis. Definiere zu τ $\mathbb{H}$–Stoppzeiten τ_k wie im Beweis von 5.2 und $A_m := \{\tau_k = t_m\}\in\mathfrak{H}_{t_m}$.

Es gilt 5.6: $\{\tau_k<S_1\} = \cup_1^\infty A_m\cap\{t_m<S_1\}$, wobei nach 5.4 gilt:

(*) $A_m\cap\{t_m<S_1\} = \{Z_0\in B_m\}\cap\{t_m<S_1\}$ für ein $B_m\in\mathfrak{S}$.

Insbesondere hat man

(**) $\quad \cap_1^\infty \{Z_0 \notin B_m\} \subset \{\tau_k \geq S_1\}$.

Wir wollen zeigen, daß man die B_m disjunkt wählen kann.

Für n < m gilt: $\{Z_0 \in B_m \cap B_n, S_1 > t_m\} = \emptyset$ wegen:
$\{Z_0 \in B_m \cap B_n, S_1 > t_m\} \subset \{Z_0 \in B_m, S_1 > t_m\} \subset A_m$ sowie
$\{Z_0 \in B_m \cap B_n, S_1 > t_m\} \subset \{Z_0 \in B_n\, S_1 > t_n\} \subset A_n$.

Somit hat man $\{Z_0 \in B_m, S_1 > t_m\} = \{Z_0 \in B_m \setminus \cup_1^{m-1} B_n,\ S_1 > t_m\}$. Deswegen können wir in der Darstellung (*) die B_m durch $B_m \setminus \cup_1^{m-1} B_n$ ersetzen. Seien die B_m bereits disjunkt gewählt. Dann folgt:

(***) $\quad \{Z_0 \in B_m\} = \{\tau_k = t_m < S_1\} \cup \{Z_0 \in B_m, S_1 \leq t_m, \tau_k \geq S_1\}$

wegen $\{Z_0 \in B_m, \tau_k < S_1 \leq t_m\} = \cup_1^{m-1} \{Z_0 \in B_m, \tau_k = t_n < S_1 \leq t_m\}$

$= \cup_1^{m-1} \{Z_0 \in B_m, S_1 \leq t_m\} \cap \{\tau_k = t_n < S_1\}$

$= \cup_1^{m-1} \{Z_0 \in B_m, S_1 \leq t_m\} \cap \{Z_0 \in B_n, t_n < S_1\} = \emptyset.$

Setze nun $\quad h_k(\cdot) := \sum_1^\infty t_m \cdot \mathbf{1}_{B_m} + \infty \cdot \mathbf{1}_{\cap B_m^c}$.

Dann zeigen wir: $\tau_k \wedge S_1 = h_k(Z_0) \wedge S_1$.
Zum Beweis sei nun $Z_0 \in B_m$. Wir unterscheiden mit (***) zwei Fälle:
Im Fall "$\tau_k = t_m < S_1$" gilt: $\tau = h_k(Z_0)$;
im Fall "$S_1 \leq t_m$, $\tau_k \geq S_1$ gilt: $\tau_k \wedge S_1 = S_1 = S_1 \wedge h_k(Z_0)$.
Im Fall $Z_0 \notin \cup B_m$ gilt: $h_k(Z_0) = \infty$ und mit (**) folgt : $\tau_k \wedge S_1 = S_1 = h_k(Z_0) \wedge S_1$.
Nun definieren wir: $h := \liminf h_k$.
Für $\tau < S_1$ gilt: $\exists\, k_0 = k_0(\omega)\ \forall\, k \geq k_0$: $\tau_k < S_1$, also $\tau_k = h_k(Z_0)$ und somit $\tau = h(Z_0)$.
Für $\tau \geq S_1$ gilt: $\tau \wedge S_1 = \tau_k \wedge S_1 = h_k(Z_0) \wedge S_1$, also auch: $\tau \wedge S_1 = h(Z_0) \wedge S_1$. $[]$

5.6 Lemma. Für t≥0 gilt $\Omega_k := \{T_k < \infty\}$:

$$\Omega_k \cap \mathfrak{F}_{(T_k+t)\wedge T_{k+1}} = \Omega_k \cap \sigma\left[\mathfrak{F}_{T_k} \cup \sigma((X,N)_{(T_k+s)\wedge T_{k+1}},\ 0\leq s\leq t))\right]$$

$$= \Omega_k \cap \sigma\left[H_k,\ S^t_{k+1}, Z^t_{k+1}\right].$$

Der **Beweis** ist eine Übungsaufgabe.

5.7 Satz. Sei τ eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit. Dann gilt:

(a) Es existieren mb Funktionen $h_k : \overset{k}{\underset{0}{\times}}([0,\infty]\times S) \mapsto [0,\infty]$ für $k\in\mathbb{N}_0$, sodaß gilt:

(5.8) $$\tau \wedge T_{k+1} = (T_k + h_k(H_k)) \wedge T_{k+1} \quad \text{auf } \{\tau \geq T_k,\, T_k < \infty\},$$

d.h. auf $\{\tau \geq T_k, T_k < \infty\}$ gilt:
$\tau = T_k + h_k(H_k)$ für $S_{k+1} > h_k(H_k)$ und $\tau \geq T_{k+1}$ für $S_{k+1} \leq h_k(H_k)$.

(b) Es existieren $\sigma(H_k)$–mb Funktionen $\tau_k : \Omega \mapsto [0,\infty]$ mit
$$\tau \wedge T_k = \tau_{k-1} \wedge T_k \quad \text{und } \{T_k \leq \tau\} = \{T_k \leq \tau_{k-1}\},\ k \in \mathbb{N}.$$

Beweis: a)Wir ersetzen jetzt Ω durch Ω_k und fassen alle Zva als ihre Restriktionen auf Ω_k auf. Dann können wir o.E. annehmen, daß bereits $\Omega = \Omega_k$ gilt.
Sei $\mathfrak{D}_t := \mathfrak{F}_{(T_k+t)\wedge T_{k+1}}$, $\mathbb{D} := (\mathfrak{D}_t)$.

Wir zeigen, daß $\tau' := (\tau\wedge T_{k+1} - T_k)^+$ eine $\mathbb{D}$–Stoppzeit ist.
Es ist $\{\tau' \leq t\} = \{\tau \leq T_k\} \cup \left[\{\tau > T_k\} \cap \{\tau\wedge T_{k+1} \leq (T_k+t)\wedge T_{k+1}\}\right]$.
Nun gilt nach 1.13:

(5.9) $$\{\tau \leq T_k\} \in \mathfrak{F}_{T_k} \subset \mathfrak{D}_t\,;$$

und $\{\tau\wedge T_{k+1} \leq (T_k+t)\wedge T_{k+1}\} \in \mathfrak{D}_t$, also $\{\tau' \leq t\} \in \mathfrak{D}_t$.
Nun hat $\mathfrak{D}_t$ gemäß Lemma 5.6 die gleiche Struktur wir $\mathfrak{H}_t$ in 5.4 mit W_k anstelle von Z_0 und (S_{k+1},Z_{k+1}) anstelle von (S_1,Z_1). Somit liefert 5.4 die Existenz einer mb Funktion h_k mit $\tau'\wedge S_{k+1} = h_k(H_k) \wedge S_{k+1}$. Es gilt $T_k+\tau' \leq T_{k+1}$ und es folgt auf $\{\tau \geq T_k < \infty\}$:
$\tau \wedge T_{k+1} = T_k + \tau' = (T_k + \tau')\wedge T_{k+1} = T_k + \tau'\wedge S_{k+1} = T_k + h_k(W_k)\wedge S_{k+1}$
$= (T_k + h_k(H_k))\wedge T_{k+1}$.
Der Beweis von Teil (b) ist eine Übungsaufgabe. $[\,]$

Def. 1. Sei $(\Omega,\mathfrak{F})$ Meßraum und $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_t)$ eine Filterung in $\mathfrak{F}$. Die **σ–Algebra $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$ der vorhersagbaren Mengen** ist die σ–Algebra auf $(0,\infty)\times\Omega$, die von den **vorhersagbaren Rechtecken** $(s,t] \times A\ ;\ 0 \le s \le t,\ A \in \mathfrak{F}_s,$ erzeugt wird.
Ein stochastischer Prozeß $Y = (Y_t)$ heißt **$\mathbb{F}$–vorhersagbar**,wenn X_0 $\mathfrak{F}_0$–mb ist und $(0,\infty)\times\Omega \ni (t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$ $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb ist. Für zwei Stoppzeiten σ und τ heißt $]\sigma,\tau] := \{(s,\omega) \in (0,\infty)\times\Omega;\ \sigma(\omega) < s \le \tau(\omega)\}$ ein **stochastisches Intervall**.

5.10 Satz. Es gilt $\mathfrak{P}(\mathbb{F}) = \sigma_a = \sigma_b = \sigma_c = \sigma_d = \sigma_e$ mit
$\sigma_a = \sigma((s,\infty) \times A\ ;\ s \ge 0,\ A \in \mathfrak{F}_s)$,
$\sigma_b = \sigma(]\sigma,\tau]\ ;\ \sigma, \tau\ \mathbb{F}_+$–Stoppzeit$\}$,
$\sigma_c = \sigma(]0,\tau]\ ,\ \tau\ \mathbb{F}$–Stoppzeit$\}$,
σ_d [bzw. σ_e] ist die kleinste σ–Algebra $\mathfrak{A}$, sodaß $(0,\infty)\times\Omega \ni (t,\omega) \mapsto Y_t(\omega)$ $\mathfrak{A}$–mb ist für alle $\mathbb{F}$–adaptierten stetigen [bzw. $\mathbb{F}$–adaptierten linksstetigen] Pozesse Y.

Beweis: "$\mathfrak{P}(\mathbb{F}) = \sigma_a$": wegen $(s,\infty)\times A = \cup_{t\in\mathbb{N}}\ (s,t]\times A$ und $(s,t] = (s,\infty)\times A \setminus (t,\infty)\times A$.
"$\sigma_c \subset \sigma_b$" ist klar.
"$\mathfrak{P}(\mathbb{F}) \subset \sigma_c$": Für $A \in \mathfrak{F}_s$ gilt: $(s,t]\times A =]0,\tau] \setminus]0,\sigma]$ mit $\sigma = s\cdot\mathbf{1}_A + \infty\cdot\mathbf{1}_{A^c}$ und $\tau = t\cdot\mathbf{1}_A + \infty\cdot\mathbf{1}_{A^c}$, also $]0,\tau] = (0,t] \times A + (0,\infty)\times A^c$.

"$\sigma_e \subset \mathfrak{P}(\mathbb{F})$": Mit maßtheoretischer Induktion oder wegen $Y_s\cdot\mathbf{1}_I = \begin{cases} I^c\times\Omega \cup\ I\times\{Y_s\in B\} & 0 \in B \\ I\times\{Y_s\in B\} & 0 \notin B \end{cases}$,
erhält man, daß $(t,\omega) \mapsto Y_s(\omega)\cdot\mathbf{1}_{(s,s+h]}(t)$ $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb ist.

Nun lassen sich linksstetige Prozesse durch Summen solcher Größen approximieren.
"$\sigma_d \subset \sigma_e$" ist klar.
"$\mathfrak{P}(\mathbb{F}) \subset \sigma_d$": Zu einem vorhersagbaren Rechteck $(s,t] \times A$ wähle stetige Funktionen $f_n : (0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ mit $f_n \nearrow \mathbf{1}_{(s,t]}$ und $f = 0$ auf $(0,s]$. Dann sind Y^n mit $Y^n_t(\omega) := f_n(t)\cdot\mathbf{1}_A(\omega)$ stetige adaptierte Prozesse mit $Y^n \nearrow \mathbf{1}_{(s,t]}\cdot\mathbf{1}_A$.
"$\sigma_b \subset \sigma_e$": Wenn σ und τ $\mathbb{F}_+$–Stoppzeiten sind, dann ist Y mit $Y_t(\omega) = \mathbf{1}_{]\sigma,\tau]}(t,\omega)$ ein linksstetiger adaptierter Prozeß nach 1.8. □

5.11 Lemma.(a) Jeder $\mathbb{F}$–vorhersagbare Prozeß ist $\mathbb{F}$–progressiv.
(b) Ist $\eta : [0,\infty) \mapsto S$ mb, so ist Y mit $Y_t(\omega) := \eta(t)$ $\mathbb{F}$–progressiv.

Der **Beweis** ist eine Übungsaufgabe.

5.12 Satz. Seien $(\Omega,\mathfrak{F})$ und $\mathbb{F}$ wie in der Generalvoraussetzung, Y ein stochastischer Prozeß auf $(\Omega,\mathfrak{F})$ mit Zustandsraum $(\bar{\mathbb{R}},\bar{\mathfrak{B}})$. Dann gilt:

Y ist genau dann $\mathbb{F}$–vorhersagbar, wenn Y die Darstellung besitzt:

(5.13)
$$Y_t(\omega) = \eta_0(t,\omega)\cdot \mathbf{1}_{\{0\le t\le T_1\}}(\omega) + \sum_1^\infty \eta_n(t,\omega)\cdot \mathbf{1}_{\{T_n<t\le T_{n+1}\}}(\omega) + \eta_\infty(t,\omega)\cdot \mathbf{1}_{\{T_\infty\le t\}}(\omega),$$

dabei sind $\eta_n : [0,\infty)\times\Omega \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ $[0,\infty)\cap\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{F}_{T_n}$ – mb, $0\le n\le\infty$.

Wichtig ist, daß in (5.13) "$t\le T_{n+1}$" steht; es sind also die Zustände bis einschließlich T_{n+1} durch die Entwicklung bis T_n bestimmt.

Beweis: "dann" Es gelte (5.13). Dann ist $Y_0 = \eta_0(t)$ $\mathfrak{F}_0$–mb. Jetzt genügt es die einzelnen Summanden auf $(0,\infty)\times\Omega$ zu untersuchen.

Sei zunächst $\eta_n(t,\omega) = \mathbf{1}_B(t)\cdot\mathbf{1}_A(\omega)$ mit $B \in [0,\infty)\cap\mathfrak{B}_1$, $A \in \mathfrak{F}_{T_n}$. Dann gilt:

(i) $(t,\omega) \mapsto \mathbf{1}_B(t)$ ist $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb nach 5.11b.

(ii) Sei $\tilde{Y}_t(\omega) := \mathbf{1}_A(\omega)\cdot\mathbf{1}_{\{T_n<t\le T_{n+1}\}}(\omega)$; dann ist $\tilde{Y}$ linksstetig und

$\tilde{Y}_t = \mathbf{1}_{A\cap\{T_n<t\}}\cdot\mathbf{1}_{\{t\le T_{n+1}\}}$ gemäß 5.1a $\mathfrak{F}_t$–mb. Also ist $\tilde{Y}$ nach 5.10 $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb.

Somit ist $(\mathbf{1}_B(t)\cdot\tilde{Y}_t)$ $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb. Mit einem Dynkinargument folgt, daß
$(t,\omega) \mapsto \mathbf{1}_C(t,\omega)\cdot\mathbf{1}_{\{T_n<t\le T_{n+1}\}}(\omega)$ $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb ist mit $C \in [0,\infty)\cap\mathfrak{B}_1\otimes\mathfrak{F}_{T_n}$.
Mit maßtheoretischer Induktion erweist sich dann $(t,\omega) \mapsto \eta_n(t,\omega)\cdot\mathbf{1}_{\{T_n<t\le T_{n+1}\}}(\omega)$ als $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb. Ebenso zeigt man, daß $(t,\omega) \mapsto \eta_\infty(t,\omega)\cdot\mathbf{1}_{\{T_\infty\le t\}}(\omega)$ $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb ist.

"genau dann" Sei nun Y $\mathbb{F}$–vorhersagbar. Setze $\eta_0(0,\omega) := Y_0(\omega)$. Die Darstellung ist jetzt auf $(0,\infty)\times\Omega$ zu zeigen.

Sei zunächst $Y = \mathbf{1}_{]0,\tau]}$ für eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit τ. Wähle h_k wie in (5.8). Dann folgt:
$\mathbf{1}_{]0,\tau]} = \sum_n \mathbf{1}_{]0,\tau]\cap\,]T_n,T_{n+1}]} + \mathbf{1}_{]0,\tau]}\cdot\mathbf{1}_{]T_\infty,\infty]}$ mit
$]0,\tau]\cap\,]T_n,T_{n+1}] = \{(t,\omega);\ T_n < t \le \tau\wedge T_{n+1},\ \tau > T_n\}$
$= \{(t,\omega);\ T_n < t \le (T_n + h_n(H_n))\wedge T_{n+1},\ \tau > T_n\}$
$= \{(t,\omega);\ 0 < t \le T_n + h_n(H_n),\ \tau > T_n\}\cap\{(t,\omega);\ T_n < t \le T_{n+1}\}.$
Wir können also $\eta_n(t,\omega) := \mathbf{1}_{\{0<t\le T_n+h_n(H_n)\}}(\omega)\cdot\mathbf{1}_{\{\tau>T_n\}}(\omega)$ setzen.

Dabei ist $\{\tau > T_n\} = \{\tau \le T_n\}^c \in \mathfrak{F}_{T_n}$ nach (5.9).

Ebenso setze $\eta_\infty := \mathbf{1}_{]0,\tau]}$.
Dabei ist $]0,\tau] \in \mathfrak{P}(\mathbb{F}) \subset [0,\infty)\cap\mathfrak{B}_1\otimes\mathfrak{F}_\infty$ mit $\mathfrak{F}_\infty = \mathfrak{F}_{T_\infty}$ nach 5.1 und 5.3.

Der Schluß von $\mathbf{1}_{]0,\tau]}$ auf einen beliebigen vorhersagbaren Prozeß ist eine Übungsaufgabe. []

Hat man einen mehrdimensionalen Prozeß, so kann man 5.12 auf die einzelnen Komponenten anwenden gemäß dem folgenden:

5.14 Lemma. Sei $Y = (Y^1,...,Y^d)$ ein stochastischer Prozeß mit Zustandsraum $(\mathbb{R}^d,\mathfrak{B}_d)$ oder $(\bigtimes_1^d \bar{\mathbb{R}}, \bigotimes_1^d \bar{\mathfrak{B}})$, $1\le d\le\infty$. Dann gilt:
Y ist genau dann $\mathbb{F}$–vorhersagbar, wenn die Y^k für $1\le k\le d$ $\mathbb{F}$–vorhersagbar sind.

Beweis: Y_0 ist genau dann $\mathfrak{F}_0$–mb, wenn die Y^k für $1\le k\le d$ $\mathfrak{F}_0$–mb sind. Nun kann Y auf $(0,\infty)\times\Omega$ betrachtet werden. Dort ist Y genau dann $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb, wenn die Y^k für $1\le k\le d$ $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb sind. [vgl. W.th.I 8.10] []

Definition 2. Sei $(\Omega,\mathfrak{F})$ Meßraum und $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_t)$ eine Filterung in $\mathfrak{F}$. Dann sei:
$\mathfrak{F}_{t-} := \sigma(\cup_{s<t} \mathfrak{F}_s)$, $\mathfrak{F}_{0-} := \mathfrak{F}_0$.

5.15 Lemma. (a) $\mathbb{F}_- := (\mathfrak{F}_{t-}, t\ge 0)$ ist eine Filterung mit $\mathfrak{F}_{t-} \subset \mathfrak{F}_t$.
(b) Ist Y $\mathbb{F}$–vorhersagbar, so ist Y $\mathbb{F}_-$–adaptiert.

Beweis: a) ist klar. b) Sei $C = (s,\infty)\times A$, $s\ge 0$, $A\in\mathfrak{F}_s$, ein vorhersagbares Rechteck. Dann gilt:
$\mathbf{1}_C(t,\omega) = 0$ für $t\le s$ und $\mathbf{1}_C(t,\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)$ für $t>s$. Also ist $\mathbf{1}_C(t,\cdot)$ $\mathfrak{F}_{t-}$–mb.
Mit einem Dynkin–Argument folgt, daß $\mathbf{1}_C(t,\cdot)$ für alle vorhersagbaren Mengen C $\mathfrak{F}_{t-}$–mb ist. Mit maßtheoretischer Indunktion folgt die Behauptung. []

§6 Stückweise deterministische Markoff–Prozesse.

Generalvoraussetzung: Es seien $(\Omega,\mathfrak{F})$ ein Meßraum, S ein metrischer Raum mit Borel–σ–Algebra $\mathfrak{S}$, (S_n), (Z_n), (T_n), H_n , (N_t), $\mathbb{F}$ wie in der Generalvoraussetzung von §5, P ein W–Maß auf $(\Omega,\mathfrak{F})$, $E = [0,\infty)\times S \cup \{(\infty,e)\}$ der Zustandsraum von (S_n,Z_n) und (T_n,Z_n), $\mathfrak{E}$ die Borel–σ–Algebra auf E. Anstelle von X schreiben wir jetzt $\xi = (\xi_t) = (Z_{N_t})$. $\mathfrak{B}_+ := [0,\infty)\cap\mathfrak{B}_1$, $\bar{\mathfrak{B}}_+ := [0,\infty]\cap\bar{\mathfrak{B}}$.

Def. 1. $((T_n,Z_n), n\in\mathbb{N}_0)$ heißt **Markoffscher Erneuerungsprozeß**, wenn eine ÜW Π von S nach E mit $\Pi(e;\{(\infty,e)\}) = 1$ existiert, sodaß $\forall\, C\in\mathfrak{E}$, $n\in\mathbb{N}_0$ gilt:
eine Version von $P[(S_{n+1},Z_{n+1})\in C\,|\,H_n]$ ist $\Pi(Z_n;C)$.
ξ heißt dann **Semi–Markoff–Prozeß**.

6.1 Beispiel. Ein Markoffscher Erneuerungsprozeß ist eine Verallgemeinerung eines Erneuerungsprozesses (T_n). Man wählt $Z_n := 0$, $S = \{0,e\}$ und $\Pi(0;D\times\{0\}) = P[S_n\in D]$
oder [in Hinblick auf Beispiel 6.14] $S = [0,\infty)\cup\{e\}$ und
$\Pi(x;D\times\{0\}) = P[S_n\in x+D\,|\,S_n\ge x]$, $0\le x<\infty$.

6.2 Beispiel. (a) Ein Semi–Markoff– Prozeß ist eine Verallgemeinerung eines Markoffschen Sprungprozesses. Ist $(X,\{P_x\})$ nämlich eine Markoffsche Sprungfamilie und werden σ_n und X_{σ_n} wie in §4, Def. 3 erklärt, so gilt nach 4.11:
$P_x[\sigma_{n+1}-\sigma_n\in D, X_{\sigma_{n+1}}\in B\,|\,\mathfrak{F}_{\sigma_n}] = \mathrm{Exp}(\lambda(X_{\sigma_n}))[B]\cdot p(X_{\sigma_n};B)$ auf $\{\sigma_n<\infty\}$.
Es ist $\mathfrak{F}_{\sigma_n} = \sigma(H_n)$ nach 5.3c. Also ist unter jedem P_x $((\sigma_n,X_{\sigma_n}), n\in\mathbb{N}_0)$ ein Markoffscher Erneuerungsprozeß mit $\Pi(x;D\times B) := \mathrm{Exp}(\lambda(x))[D]\cdot p(x;B)$ und $\xi = X$.
(b) Ein Markoffscher Erneuerungsprozeß ist eine Verallgemeinerung eines zeitdiskreten MP (Z_n). Setze $S_n\equiv 1$, also $T_n = n$. []

6.3 Beispiel. Das M/G/1–Warteschlangenmodell.
In einem Warteschlangenmodell werde der Ankunftsstrom durch einen Poisson–Prozeß mit Parameter λ beschrieben; die Bedienungszeit habe eine beliebige Verteilungsfunktion F. Ferner mögen die üblichen Unabhängigkeitsbedingungen vorliegen. Ist T_n der Zeitpunkt der n–ten Bedienungsbeendigung und Z_n die Warteschlangenlänge unmittelbar nach T_n, $S = \mathbb{N}_0$, so liegt der folgende Ansatz nahe:

$$P[S_{n+1}\le t,\, Z_{n+1} = i+k-1\,|\,H_n] = R_k(t) := \int_0^t e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^k}{k!}\,F[ds] \quad \text{auf } \{Z_n=i\}\ ,\ i>0,$$

$$P[S_{n+1}\le t,\, Z_{n+1} = k\,|\,H_n] = \mathrm{Exp}(\lambda)\star R_k(t) := \int_0^t R_k(t-s)\,\mathrm{Exp}(\lambda)[ds] \quad \text{auf } \{Z_n=0\}.$$

Hier gilt im Gegensatz zu einer zeitstetigen MKF [vgl. 4.9, 4.11] i.a.:
$P[S_{n+1}\le t,\ Z_{n+1}= i+k-1 \mid H_n] \neq P[S_{n+1}\le t \mid H_n]\cdot P[Z_{n+1}= i+k-1 \mid H_n]$ []

Es ist leichter, die stochastische Entwicklung von (S_n,Z_n) anstelle von (T_n,Z_n) zu beschreiben.

6.4 Proposition. Es seien Π ÜW von S nach E mit $\Pi(e;\{(\infty,e)\}) = 1$,

$\Omega^o = \overset{\infty}{\underset{0}{\times}} E$, $\mathfrak{F}^o = \overset{\infty}{\underset{0}{\otimes}} \mathfrak{E}$, (S_n^o,Z_n^o) die n–te Projektion von Ω auf E.

(a) Es existiert zu $x \in S$ genau ein W–Maß P_x auf $(\Omega^o,\mathfrak{F}^o)$, sodaß gilt:

i) $P_x[S_0^o = 0,\ Z_0^o = x] = 1$;

ii) eine Version von $P_x[(S_{n+1}^o,Z_{n+1}^o) \in C \mid (S_m^o,Z_m^o),\ 0\le m\le n]$ ist $\Pi(Z_n^o;C)$, $n\in\mathbb{N}_0$.

iii) Mit $T_n^o := \sum_1^n S_n^o$ ist $((T_n^o,Z_n^o),\ n\in\mathbb{N}_0)$ ein Markoffscher Erneurungsprozeß auf $(\Omega^o,\mathfrak{F}^o,P_x)$ mit ÜW Π $\forall$ x.

iv) $x \mapsto P_x[\Gamma]$ ist $\mathfrak{S}$–mb für $\Gamma \in \mathfrak{F}^o$.

(b) Ist $((T_n,Z_n),\ n\in\mathbb{N}_0)$ ein Markoffscher Erneuerungsprozeß auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit ÜW Π, so ist $(S,Z) := ((S_n,Z_n),\ n\in\mathbb{N}_0)$ ein (zeitdiskreter) MP mit interner MF $((S^o,Z^o),\ \{P_x\})$, es gilt also:

(6.5) $$P[((S_{n+m},Z_{n+m}),\ m\ge 0) \in \Gamma \mid H_n] = P_{Z_n}[((S_m^o,Z_m^o),\ m\ge 0) \in \Gamma],\ \Gamma \in \mathfrak{F}^o.$$

Beweis: Teil (a)(i) und (ii) folgt unmittelbar aus dem Satz von Ionescu–Tulcea, (iii) ist dann klar.

Für (iv) und (b) überlegt man sich, daß nach Voraussetzung und Konstruktion gilt: $x \mapsto P_x[(S_1^o,Z_1^o) \in C] = \Pi(x;C)$ ist mb und

$P[(S_{n+1},Z_{n+1}) \in C \mid H_n] = \Pi(Z_n;C) = P_n[(S_1^o,Z_1^o) \in C]$.

Der allgemeine Fall folgt wie im Beweis von 2.11. []

Def. 2. Eine Funktion $\varphi : [0,\infty) \times S \mapsto S$ heißt eine **Driftfunktion** auf S, wenn $\varphi(t,\cdot)$ mb ist $\forall$ t, $\varphi(\cdot,x)$ stetig ist für $x\in S$, und wenn gilt:

(6.6) $$\varphi(0,x) = x,\ \varphi(t+s,x) = \varphi(s,\varphi(t,x)),\ x\in S,\ s,t\ge 0.$$

Gemäß 2.15 werden durch eine Driftfunktion gerade deterministische stetige MPe erzeugt gemäß

(6.7) $$X_t = \varphi(t,X_0).$$

6.8 Beispiel. Zu einer Driftfunktion gelangt man über Lösungen $\varphi =: \varphi(\cdot,x)$ des

Anfangswertproblems bei autonomen DGlen

(6.9) $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) = b(\varphi(t,x))\,,\ t\geq 0,\ \text{mit}\ \varphi(0,x) = x.$

sofern die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gesichert ist wie etwa im Fall der Lipschitz–Stetigkeit von b. Es sind nämlich sowohl $\varphi(t+\cdot\,,x)$ als auch $\varphi(\cdot\,,\varphi(t,x))$ Lösungen ψ von

$\psi'(s) = b(\psi(s))\,,\ s\geq 0,\ \text{mit}\ \psi(0) = \varphi(t,x).$ □

6.10 Lemma. Eine Driftfunktion φ ist $\mathfrak{B}_+ \otimes \mathfrak{S}$ – mb.

Beweis. Der Prozeß $Y_t(x) := \varphi(t,x)$ ist ein stetiger $\mathbb{F}'$–adaptierter Prozeß auf S mit $\mathfrak{F}'_t := \mathfrak{S}\ \forall\, t$. Er ist somit nach 1.4 $\mathbb{F}'$–progressiv. Nach 1.2c ist $(t,x) \mapsto Y_t(x)$ $\mathfrak{B}_+ \otimes \mathfrak{S}$ – mb. □

6.11 Bemerkung. [Cinlar & Jacod (1981)].

Jeder stetige starke Markoff–Prozeß X mit Zustandsraum $\mathbb{R}^d$, dessen Pfade auf kompakten Zeitintervallen von beschränkter Variation sind, ist deterministisch, es existiert also eine Driftfunktion φ mit (6.7).

Wenn man also nicht–deterministische d–dim.starke MPe betrachten will, so muß man sich entweder von der Voraussetzung lösen, daß die Pfade von lokal beschränkter Variation sind.

Dies führt zu der Klasse der Diffusionsprozessen; dies sind Verallgemeinerungen der Brownschen Bewegung mit Drift und Dispersionskoeffizienten. Oder man muß sich von der Voraussetzung der Stetigkeit der Pfade lösen. Dies führt zu stochastischen Prozessen mit Sprüngen. Läßt man dann nur solche Pfade zu, deren Pfade in kompakten Intervallen nur endlich viele Sprünge haben, eventuell abgesehen von einem Explosionszeitpunkt, so führt dies zu der Klasse der stückweise determistischen Prozesse. Da der Prozeß nämlich zwischen den Sprüngen ebenfalls die Markoff–Eigenschaft besitzt, muß er dort einen deterministischen Verlauf haben, wenn die die Pfade von lokal beschränkter Variation sein sollen. □

Def. 3. Seien φ eine Driftfunktion auf S mit $\varphi(t,e) = e\ \forall\, t\geq 0$,

Q eine ÜW von S nach S mit $Q(e;\{e\}) = 1$,

$\lambda : S \mapsto [0,\infty)$ eine mb Funktion mit $\Lambda(t,x) := \int_0^t \lambda(\varphi(s,x))\,ds < \infty\ \forall\, t\geq 0,\ \lambda(e) = 0.$

Sei nun $((T_n,Z_n),\ n\in\mathbb{N}_0)$ ein Markoffscher Erneuerungsprozeß mit einer ÜW Π gemäß:

(6.12) $\Pi(x;D\times B) := \int_D e^{-\Lambda(t,x)}\cdot\lambda(\varphi(t,x))\cdot Q(\varphi(t,x);B)\,dt,\ x\in S\setminus\{e\},\ D\in\mathfrak{B}_+,\ B\in\mathfrak{S},$

$\Pi(x;\{(\infty,e)\}) := e^{-\Lambda(\infty,x)}.$

Setzt man $X_t := \begin{cases} \varphi(t-T_n,Z_n) & \text{für}\ \ T_n \leq t < T_{n+1} \\ e & \text{für}\ \ t \geq T_\infty \end{cases}$,

so heißt $X = (X_t)$ ein **stückweiser deterministischer Prozeß** oder **PDP** (PDP ≅ piecewise deterministic process), λ **Sprungrate** , $\lambda Q(x;B) := \lambda(x)\cdot Q(x;B)$ **Übergangskern**.

6.13 Lemma. Sei $g : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ meßbar, und für $G(t) := {}_0\int^t g(s)\,ds$ gelte: $G(t) < \infty$, $t \geq 0$. Definiere $G_(t) = \inf\{ u \geq 0,\ G(u) = t \}$, $0 \leq t < G(\infty)$. Dann gilt :

(a) $G_$ ist streng isoton;

(b) $G_(u) > t \iff G(t) < u$;

(c) $G \circ G_(u) = u$;

(d) das Bildmaß $\lambda_1 G_^{-1}$ hat die λ_1–Dichte $g \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}$.

(e) ${}_0\int^t e^{\pm G(s)} \cdot g(s)\,ds = \pm[e^{\pm G(t)} - 1]$, $t \geq 0$.

(f) Ist ψ die λ_1–Dichte eines W–Maßes auf $(0,\infty)$, $\Psi(t) := {}_t\int^\infty \psi(u)\,du$ und $\lambda(t) := \psi(t)/\Psi(t)$, so gilt: $\Psi(t) = \exp\{-{}_0\int^t \lambda(s)\,ds\}$ für $\Psi(t) > 0$.

Der Beweis ist eine Übungsaufgabe. Als Folgerung aus 6.12e ergibt sich:

(6.14) Durch die Angaben zu Π in Def. 3 ist eindeutig eine ÜW von S nach E mit $\Pi(e;\{(\infty,e)\}) = 1$ definiert.

6.15 Korollar. Zu φ,λ und Q wie in Def. 3 existiert eine PDP wie in Def. 3.

6.16 Beispiel. Markoffsche Sprungprozesse.

Durch $\varphi(t,x) = x$, $t \geq 0$, wird eine Driftfunktion definiert. Dann ist X ein Sprungprozeß wegen

$$X_t := \begin{cases} Z_n & \text{für } T_n \leq t < T_{n+1} \\ e & t \geq T_\infty \end{cases}.$$

Ferner gilt: $\Lambda(t,x) = \lambda(x) \cdot t$,

$$\Pi(x;D\times B) := {}_D\int e^{-\lambda(x)t} \cdot \lambda(x)\ dt \cdot Q(x;B)\ dt,\quad x \in S\setminus\{e\},\ D \in \mathfrak{B}_+,\ B \in \mathfrak{S},$$

$$\Pi(x;\{(\infty,e)\}) := \begin{cases} 0 & \lambda(x)>0 \\ 1 & \lambda(x)=0 \end{cases} \text{ für}$$

Damit liegt die Situation von Beispiel 6.2 vor mit $p = Q$. []

6.17 Beispiel. Erneuerungsprozesse.

Sei (T_n) ein Erneuerungsprozeß, sodaß PS_n^{-1} ein W–Maß auf $(0,\infty)$ mit einer Lebesgue– Dichte ψ ist mit $\Psi(x) := {}_x\int^\infty \psi(u)\,du > 0 \ \forall\ 0 \leq x < \infty$. Mit $Z_n = 0$ ist gemäß 6.1 ist $((T_n,Z_n))$ ein Markoffscher Erneuerungsprozeß.

Setzt man $X_t := t - T_{N_t}$, so erhält man einen PDP mit

$S = [0,\infty) \cup \{e\}$ (e wird hier allerdings nicht benötigt), $\varphi(t,x) = x+t$,

$\lambda(x) := \psi(x)/\Psi(x)$, also $\Lambda(t,x) := {}_0\int^t \lambda(x+u)\,du \leq \frac{1}{\Psi(x+t)} < \infty$

$Q(x;\{0\}) = 1$, $x \neq e$. Es gilt nach 6.12f:

$\Psi(t) = e^{-\Lambda(t,0)}$ und somit $e^{-\Lambda(t,x)} = \frac{\Psi(t+x)}{\Psi(x)}$.

Es folgt

$\Pi(0;D\times\{0\}) := P[S_n \in D] = \int_D \psi(t)\,dt = \int_D \Psi(t)\cdot\lambda(t)\,dt$ für $D \in \mathfrak{B}_+$.

Eine sinnvolle Definition für $\Pi(x;\cdot)$, $x>0$, ist

$\Pi(x;D\times\{0\}) := P[S_n \in x+D \mid S_n \geq x] = \int_D \psi(t+x)\,dt \,/\, \Psi(x) = \int_D \frac{\Psi(t+x)}{\Psi(x)}\cdot\lambda(x+t)\,dt$, und

$\Pi(x;\{(\infty,e)\}) := e^{-\Lambda(\infty,x)} = 0$.

Also hat Π die verlangte Gestalt.

_____ []

6.18 Beispiel. M/G/1–Warteschlangenmodelle.

Zur Zeit 0 sei etwa keine Kunde anwesend. Als T_n werden die Ankunftszeiten gewählt. Die Markoff–Eigenschaft gilt jetzt z.Zt. T_n auf Grund der folgenden Modellannahme:

> Zur Zeit T_n gibt der eintreffende Kunde bekannt, daß er eine Bedienungszeit Y_n benötigt mit $Y_n \sim G$.

Dann bildet die geforderte Gesamtbedienungszeit L_t bis t einen zusammengesetzten Poissonprozeß

$L_t = \sum Y_m \cdot \mathbf{1}_{\{T_m \leq t\}}$.

Die virtuelle Wartezeit X_t z. Zt. t ist die Zeit, die ein Kunde warten müßte, wenn z. Zt. t einträfe. Sie kann als PDP beschrieben werden.

Setze $S = [0,\infty) \cup \{e\}$, wobei e hier nicht benötig würde.

$Z_0 = 0$, $Z_{n+1} = (Z_n - S_{n+1})^+ + Y_{n+1}$.

Man sieht leicht, aus dieser Struktur, daß $((T_n,Z_n))$ einen Markoffschen Erneuerungsprozeß bildet. Zur Konstruktion von X_t kann man $\varphi(t,x) = (x-t)^+$ wählen.

Dabei ist φ eine Driftfunktion mit $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(\varphi(t,x))$,

$\lambda(x) := \lambda$ sei der Parameter des Ankunftsprozesses,

$Q(x;x+B) := G[B]$.

_____ []

6.19 Beispiel. Ein Versicherungsmodell.

Zu den Zeitpunkten T_n wird jeweils ein Schaden gemeldet der Höhe $Y_n \sim G$. Dann bildet der Gesamtschaden L_t bis t einen zusammengesetzten Poissonprozeß

$$L_t = \sum Y_m \cdot \mathbf{1}_{\{T_m \le t\}}.$$

Die Gesamthöhe der von den Kunden bis t zu entrichtenden Prämien ist deterministisch und wird durch $c \cdot t$ modelliert. Dabei ist c die Prämienrate. Wenn die Versicherungsgesellschaft nicht genügend Geld hat, um die Schäden zu begleichen, kann sie Geld borgen zu einer Zinsrate β. Sei X_t der Kapitalstand z.Zt. t.

Ist $X_0 = u < 0$ und treffen bis t keine Forderungen ein, so entwickelt sich $X_t = \varphi(t,u) := \varphi_t$, solange $\varphi_t < 0$ bleibt, gemäß

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = c - \beta \cdot \varphi_t \; ; \quad \text{d.h.} \quad \varphi_t = (u + \frac{c}{\beta}) \cdot e^{\beta t} - \frac{c}{\beta}.$$

Für $u \le e := -\frac{c}{\beta}$ bleibt $\varphi_t \le e$. Deswegen tritt z. Zt. τ des Erreichens von e der Ruin ein.

Wir wollen $X^\tau := (X_{t \wedge \tau} \vee e, t \ge 0)$ durch einen PDP beschreiben.

Wähle $S = [e,\infty)$,

$\varphi(t,x) = (x - e) \cdot e^{\beta t} + e$ für $x < 0, 0 \le t \le t_x$ mit $\varphi(t_x,x) = 0$ $[:= \infty$ für $x = e]$, ,

$\varphi(t,x) = x + c \cdot t$ für $x \ge 0$.

$\lambda(x) := \lambda \cdot \mathbf{1}_{(e,\infty)}(x)$, wobei λ sei der Parameter des Poissonprozesses ist,

$Q(x; [e,x-z]) := G[[z,\infty)]$.

Setzt man $Z_0 = 0$, $Z_{n+1} = (\varphi(S_{n+1},Z_n) - Y_{n+1}) \vee e$,

so ist $((T_n,Z_n))$ offenbar ein Markoffscher Erneuerungsprozeß. Die zugehörige ÜW hat die verlangte Gestalt.

———————————————————— []

Unser nächstes Ziel, ist ein Beweis der ME für einen PDP. Aus (6.12) folgt:

(6.20) $$P_x[S_1^o > t] = \Pi(x;(t,\infty] \times S] = e^{-\Lambda(t,x)}.$$

6.21 Lemma. Für $C \in \mathfrak{E}$, $B_0 \in \mathfrak{S}$, $t>0$ gilt:

(0) $$e^{-\Lambda(t+u,x)} = e^{-\Lambda(t,x)} \cdot e^{-\Lambda(u,\varphi(t,x))};$$

(a) $$P_x[S_1^o > t, (S_1^o - t, Z_1^o) \in C] = P_x[S_1^o > t] \cdot P_{\varphi(t,x)}[(S_1^o,Z_1^o) \in C] \; ;$$

b) $$P[Z_0 \in B_0, N_t = 0, (S_1 - t, Z_1) \in C] = \int_{\{Z_0 \in B_0,\, N_t = 0\}} P_{X_t}[(S_1,Z_1) \in C] \, dP \; .$$

Teil (b) wird im folgenden noch in allgemeinere Form aus (a) abgeleitet und soll hier nur die Verbindung zur ME herstellen.

Beweis: 0) $e^{-\Lambda(t+u,x)} = e^{-\Lambda(t,x)} \cdot \exp\{-\int_0^u \lambda(\varphi(t+s,x))\, ds\}$

$= e^{-\Lambda(t,x)} \cdot \exp\{-\int_0^u \lambda(\varphi(s,\varphi(t,x)))\, ds\}$.

a)Wir betrachten der Einfachheit halber den Fall $(\infty,e) \notin C$, $C = D\times B$; dann folgt:

$P_x[S_1^o > t,\ S_1^o - t \in D,\ Z_1^o \in B]$

$= \int_t^\infty \mathbf{1}_D(s-t) \cdot e^{-\Lambda(s,x)} \cdot \lambda Q(\varphi(s,x);B)$

$= \int_0^\infty \mathbf{1}_D(u) \cdot e^{-\Lambda(t+u,x)} \cdot \lambda Q(\varphi(t+u,x);B)\, du$

$= e^{-\Lambda(t,x)} \cdot \int_0^\infty \mathbf{1}_D(u) \cdot e^{-\Lambda(u,\varphi(t,x))} \cdot \lambda Q(\varphi(u,\varphi(t,x));B)\, du$

$= P_x[S_1^o > t] \cdot P_{\varphi(t,x)}[S_1^o \in D,\ Z_1^o \in B]$.

b) Der Beweis verläuft wie der von dem folgenden Lemma 6.22.

6.22 Lemma. Für $C \in \overset{n}{\underset{0}{\otimes}}\mathfrak{E}$, $\Gamma \in \overset{\infty}{\underset{1}{\otimes}}\mathfrak{E}$, $n \in \mathbb{N}_0$, sei

$A_{n,t-} := \{N_t = n,\ H_n \in C\}$ ein Ereignis der Vergangenheit und

$A_{n,t+} := \{(T_{n+1}-t, Z_{n+1}, S_{n+2}, Z_{n+2}, S_{n+3}, Z_{n+3}, ...) \in \Gamma\}$ ein Ereignis der Zukunft.

Wir schreiben $A^o_{n,t}$, wenn die S_n, Z_n durch S^o_n, Z^o_n ersetzt werden. Dann gilt:

$$P[A_{n,t-} \cap A_{n,t+}] = \int_{A_{n,t-}} P_{X_t}[A^o_{0,0+}]\, dP\ .$$

Beweis: Sei $H_{n+} := (S_n, Z_n, S_{n+1}, Z_{n+1}, ...)$.

Dann gilt mit $f(s,z) := P_z[(s,z,H^o_{1+}) \in \Gamma]$ nach 6.4:

$P[(S_1^o - u, Z_1^o, H^o_{2+}) \in \Gamma \mid H_1] = f(S_1^o - u, Z_1^o)$ und somit nach 6.21a:

(*) $g(u,x,\Gamma) := P_x[S_1^o > u,\ (S_1^o - u, Z_1^o, H^o_{2+}) \in \Gamma] = E_x[\mathbf{1}_{\{S_1^o > u\}} \cdot f(S_1^o - u, Z_1^o)]$

$\overset{6.21}{=} P_x[S_1^o > u] \cdot E_{\varphi(u,x)}[f(S_1^o, Z_1^o)] = g(u,x,\Omega^o) \cdot E_{\varphi(u,x)}[f(S_1^o, Z_1^o)]$.

Mit (6.5) und (*) erhält man : $P[A_{n,t-} \cap A_{n,t+}] =$

$P[T_n \le t,\ H_n \in C,\ S_{n+1} > t - T_n,\ (S_{n+1} - (t-T_n)), Z_{n+1}, H_{(n+2)+}) \in \Gamma]$

$\overset{6.4}{=} \int_{\{T_n \le t,\ H_n \in C\}} g(t-T_n, Z_n)\, dP$

$\overset{(*)}{=} \int_{\{T_n \le t,\ H_n \in C\}} g(t-T_n, Z_n, \Omega^o) \cdot E_{\varphi(t-T_n,Z_n)}[f(S_1^o, Z_1^o)]\, dP$

Zum gleichen Ausdruck gelangt man mit den gleichen Schritten von

$$\int_{A_{n,t-}} E_{\varphi(t-T_n,Z_n)}[f(S_1^o, Z_1^o)]\, dP = \int_{A_{n,t-}} E_{X_t}[f(S_1^o, Z_1^o)]\, dP$$

Wiederum mit (*) [für u=0] folgt: $= \int_{A_{n,t-}} P_{X_t}[(S_1^o, Z_1^o, H^o_{2+}) \in \Gamma]\, dP$. []

6.23 Konstruktion von Shift–Operatoren.

Seien $\Omega^o,\mathfrak{F}^o,S_n^o,T_n^o,Z_n^o.P_x$ wie in 6.4.

Sei X^o auf Ω^o über die Driftfunktion φ genauso definiert, wie X auf Ω.
Bei der Konstruktion von Shift–Operatoren orientieren wir uns an Beispiel 2.9.

Für $\omega = (s_0,z_0,s_1,z_1,...) \in \Omega^o$ setzen wir mit $t_n := s_1+...+s_n$ $(t_0=0)$
bei $N_t(\omega) = n : \vartheta_t(\omega) := (s_0,\varphi(t-t_n,z_n),t_{n+1}-t,z_{n+1},s_{n+2},z_{n+2},...)$
und bei $N_t = \infty : \vartheta_t(\omega) := (s_0,e,\infty,e,\infty,...)$.

Dann ist $\vartheta_t(\omega) \in \Omega^o$ wegen $s_m = \infty \Rightarrow z_m = \infty$ für $m \geq n+1$. Es folgt:

$S_1^o(\vartheta_t(\omega)) = t_{n+1}-t$, $S_m^o(\vartheta_t(\omega)) = s_{n+m}$, $m\geq 2$,

$Z_0^o(\vartheta_t(\omega)) = \varphi(t-t_n,z_n)$, $Z_m^o(\vartheta_t(\omega)) = z_{n+m}$, $m\geq 1$, und

$X_s^o(\vartheta_t(\omega)) = \varphi(s\ ,Z_0^o(\vartheta_t(\omega))) = \varphi(t+s-t_n,z_n) = X_{t+s}^o(\omega)$ für $0 \leq s < S_1^o(\vartheta_t(\omega)) = t_{n+1}-t$,

$X_s^o(\vartheta_t(\omega)) = \varphi(s-T_m^o(\vartheta_t(\omega)))$ für $T_m^o(\vartheta_t(\omega)) = t_{n+1}-t + s_{n+2}+...+s_{n+m} \leq s < T_{m+1}^o(\vartheta_t(\omega)) = t_{n+1}-t + s_{n+2}+...+s_{n+m+1}$

also

$X_s^o(\vartheta_t(\omega)) = \varphi(t+s-t_{n+m}) = X_{t+s}^o(\omega)$ für $t_{n+m} \leq t+s < t_{n+m+1}$.

Ist $\Omega^{oo} := \{\omega \in \Omega^o;\ \sum s_m = \infty\}$ und $P_x[\Omega^{oo}] = 1$, $x\in S$, so kann man sich auf Ω^{oo} beschränken und man hat $\vartheta_t(\Omega^{oo}) \subset \Omega^{oo}$. $[]$

Satz 6.24. Sei X ein PDP und $\mathbb{F}$ wie in der Generalvoraussetzung. Dann ist $(X,\mathbb{F})$ ein MP auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit interner MF $(X^o,\{P_x\})$ [mit X^o wie in 6.23].

Beweis: Auf $\{T_n\leq t\}$ sind nach 5.1 T_n und Z_n $\{T_n\leq t\}\cap\mathfrak{F}_t$ mb mit $\{T_n\leq t\}\cap\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_t$. Es folgt: $\{N_t = n, \varphi(t-T_n,Z_n) \in B\} \in \mathfrak{F}_t$ für $B\in\mathfrak{S}$. Also ist X $\mathbb{F}$–adaptiert und rechtsstetig, somit $\mathbb{F}$–progressiv.
Für die ME genügt es wie in 2.2 folgendes z.z.
mit $A_{n.t-} := \{((\xi,N)_{t_1},...,(\xi,N)_{t_m},(\xi,N)_t) \in C, N_t=n\}$:

$P[A_{n,t-} \cap \{X_{t+s} \in B\}] = \int_{A_{n,t-}} P_{X_t}[X_s^o \in B]\ dP$.

Dazu läßt sich $A_{n,t-} \cap \{X_{t+s} \in B\}$ schreiben als

$A_{n,t-} \cap \{T_{n+1} > t+s, \varphi(t+s-T_n,Z_n) \in B\} \cup A_{n,t-} \cap \{T_{n+1} \leq t+s, X_{t+s} \in B\}$.

Nun kann man $A_{n,t-}$ auf die gleiche Form wie in 6.22 bringen und
$A_{n,t-} \cap \{T_{n+1} \leq t+s, X_{t+s} \in B\} = A_{n,t-} \cap A_{n,t+}$ mit $A_{n,t+}$ wie 6.22 schreiben.

Die ME folgt nun aus 6.22. Der Term $A_{n,t-} \cap \{T_{n+1} > t+s,\ \varphi(t+s-T_n, Z_n) \in B\}$ läßt sich leicht behandeln. Die genaue Ausführung ist eine Übungsaufgabe.

Die ME von X^o bzgl. P_x ist ein Spezialfall. Gemäß 6.4(iv) ist $x \mapsto P_x[X^o_s \in B]$ mb. Nach 6.23 existieren Shift–Operatoren. Also ist $(X^o, \{P_x\})$ eine MF und $(X,\mathbb{F})$ ein MP. $[\,]$

Korollar 6.25. Sei X ein PDP und $\mathbb{F}$ wie 6.24. Dann ist $(X,\mathbb{F})$ ein starker MP auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit interner starker MF $(X^o, \{P_x\})$ $[$mit X^o wie in 6.23$]$.

Beweis: Sei τ eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit. Dann existieren nach 5.7 mb Funktionen

$h_k : \overset{k}{\underset{0}{\times}}([0,\infty]\times S) \mapsto [0,\infty]$ für $k \in \mathbb{N}_0$, sodaß gilt:
$\tau = T_k + h_k(H_k)$ für $S_{k+1} > h_k(H_k)$ und $\tau \geq T_{k+1}$ für $S_{k+1} \leq h_k(H_k)$.
Es folgt:
$\{T_k \leq \tau < T_{k+1}\} = \{T_k \leq \tau,\ S_{k+1} > h_k(H_k)\}$
Sei $A \in \mathfrak{F}_\tau$. Dann ex. nach 5.3d ein $A_n \in \sigma(H_n)$ mit
$A \cap \{\tau < T_{k+1}\} = A_k \cap \{\tau < T_{k+1}\}$. Es gilt:
$A \cap \{X_{\tau+s} \in B\} = \sum A \cap \{X_{\tau+s} \in B,\ T_k \leq \tau < T_{k+1}\} + A \cap \{e \in B,\ T_\infty \leq \tau\}$
Nun ist $\{T_k > \tau\} \in \mathfrak{F}_{T_k} = \sigma(H_k)$, was man wie (5.9) zeigt.
Setze $A'_k := A_k \cap \{T_k \leq \tau\} \in \sigma(H_k)$ Dann erhält man:
$A \cap \{X_{\tau+s} \in B,\ T_k \leq \tau < T_{k+1}\} = A_k \cap \{X_{\tau+s} \in B,\ T_k \leq \tau < T_{k+1}\}$
$= A'_k \cap \{X_{T_k + h(H_k)+s} \in B,\ S_{k+1} > h(H_k)\}$
Es ergibt sich:

$$P[A \cap \{X_{\tau+s} \in B,\ T_k \leq \tau < T_{k+1}\}] \overset{6.4}{=} \int_{A'_k} f(h_k(H_k), Z_k)\, dP \quad \text{mit}$$

$$f(h,z) := P_z[X_{h+s} \in B,\ S_1 > h] \overset{6.24}{=} \int_{\{S_1>h\}} P_{X_h}[X^o_s \in B]\, dP_z$$

$$= \int_{\{S_1>h\}} P_{\varphi(h,z)}[X^o_s \in B]\, dP_z = P_z[S_1 > h] \cdot P_{\varphi(h,z)}[X^o_s \in B].$$

Zum gleichen Ausdruck gelangt man vom folgenden Ausdruck:

$$E[\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_{\{T_k \leq \tau < T_{k+1}\}} \cdot P_{\varphi(h(H_k), Z_k)}[X^o_s \in B]]$$

$$= E[\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_{\{T_k \leq \tau < T_{k+1}\}} \cdot P_{X_\tau}[X^o_s \in B]].$$

Schließlich gilt:

$$P[A \cap \{e \in B,\ T_\infty \leq \tau\}] = P[A \cap \{T_\infty \leq \tau\}] = E[\mathbf{1}_{A \cap \{T_\infty \leq \tau\}} \cdot P_e[X^o_s \in B]]$$

$$= E[\mathbf{1}_{A \cap \{T_\infty \leq \tau\}} \cdot P_{X_\tau}[X^o_s \in B]].$$

Durch Summation erhält man:

$P[A \cap \{X_{\tau+s} \in B\}] = E[\mathbf{1}_A \cdot P_{X_\tau}[X_s^o \in B]\,]$. []

6.26 Korollar. Sei S metrischer Raum mit Borel–σ–Algebra $\mathfrak{S}$, p eine ÜW von S nach S mit $p(x,S\setminus\{x\}) = 1$, $\lambda : S \mapsto [0,\infty)$ mb. Seien ferner e, $(S_e,\mathfrak{S}_e)$ wie in §4 Def. 3. Dann existiert eine Markoffsche Sprungfamilie $(X,\{P_x\})$ wie in §4 mit Sprungrate λ und $p(x;\cdot) = P_x[X_\sigma \in \cdot\,]$, $x \in S$ mit $\lambda(x)>0$. Unter dem Regularitätskriterium (4.14) kann S als Zustandsraum von X gewählt werden.

Beweis. Wähle einen PDP X mit Zustandsraum S_e auf $(\Omega^o,\mathfrak{F}^o,P_x)$ wie in 6.4/6.15, Sprungrate λ (wobei $\lambda(e) := 0$), Driftfunktion $\varphi(\cdot,x) \equiv x$, $x \in S_e$, $Q(x;\cdot) = p(x;\cdot)$, $x \in S$, $Q(e,\{e\}) := 1$, $\sigma := \inf\{s>0;\ X_s \neq X_0\}$. Dann ist $(X,\{P_x\})$ nach 6.24 eine Markoff–Familie und wegen der speziellen Driftfunktion ein Markofffsche Sprungfamilie.

Nach (6.12) gilt für $\lambda(x)>0$:

$P_x[T_1 = \sigma < \infty] = P_x[Z_1 \neq Z_0,\ T_1 < \infty] = \Pi(x,[0,\infty)\times(S\setminus\{x\}))$

$= \int_{[0,\infty)} e^{-\lambda(x)t}\,\lambda(x)\cdot p(x,S\setminus\{x\})\,dt = 1$ und

$P_x[X_\sigma \in B] = P_x[Z_1 \in B] = \Pi(x;[0,\infty)\times B) = p(x,B)$,

$P_x[\sigma \in D] = \Pi(x;D\times S_e) = \mathrm{Exp}(\lambda(x))[D]$.

Für $\lambda(x) = 0$ gilt $P_x[T_1 < \infty] = \Pi(x;[0,\infty)\times S_e) = 0$.

Es gilt: $Z_n \in S$ auf $\{T_n < \infty\}$ P_x–f.s.

Unter (4.14) gilt: $\sigma_\infty = T_\infty = \infty$ P_x–f.s und somit $P_x[X_t \in S\ \forall\, t] = 1$, $x \in S$. []

6.27 Bemerkung. Sei X ein PDP zum Markoffschen Erneuerungsprzeß $((T_n,Z_n), n \in \mathbb{N}_0)$. Setze $\xi_t = Z_{N_t}$, $\eta_t = t - T_{N_t}$. Dann gilt: Erhält X_t als zusätzliche Komponenten einige der Zva ξ_t, η_t, N_t oder t, so entsteht wieder ein PDP.

Der Beweis ist eine Übungsaufgabe. []

§ 7 Der Projektionssatz für einen PDP.

Sei X ein PDP auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ wie in § 6 bzw. auf $(\Omega^o,\mathfrak{F}^o,P_x)$ wie in 6.4.

7.1 Projektionsatz. Sei Y ein $\mathbb{F}$–vorhersagbarer Prozeß mit Zustandsraum $(D,\mathfrak{D})$ und $f : D\times S \mapsto [0,\infty]$ eine mb Funktion. Dann gilt:

$$E\Big[\sum_{k=1}^{N_t} f(Y_{T_k},X_{T_k})\Big] = E\Big[\int_0^t \int \lambda Q(X_s,dz)\, f(Y_s,z)\, ds\Big] .$$

Der Name rührt daher, daß der Prozeß $A_t^B := \int_0^t \lambda Q(X_s,B)\, ds$ als **duale $\mathbb{F}$–vorhersagbare Projektion** des Zählprozesses $N_t^B := \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{T_k \le t,\, X_{T_k} \in B\}}$ bezeichnet wird.

Ein Beispiel für Y_t ist ein linksstetiger adaptierter Prozeß, der als Komponenten einige der folgenden Zva haben kann:

X_{t-}, t, $\mathbf{1}_{(0,\tau]}(t)$ für eine Stoppzeit τ, $\mathbf{1}_{\{N_{t-1} \le n-1\}} = \mathbf{1}_{(0,T_n]}(t)$,

$\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_{(s,\infty)}(t)$ für ein $A \in \mathfrak{F}_s$.

Beim Lebesgue–Integral auf der rechten Seite macht es keinen Unterschied, ob man die linksseitgen Limites X_{t-} nimmt oder die Werte X_t bei t. Die abzählbar vielen Sprungstellen, an denen sich die beiden Versionen unterscheiden, haben das Lebesgue–Maß Null.

Beweis von 7.1: Es gilt die folgende Darstellung:

(5.13)' $$f(Y_t,x) = f_0(H_0,t,x)\cdot \mathbf{1}_{[0,T_1]}(t) + \sum_1^\infty f_k(H_k,t,x)\cdot \mathbf{1}_{(T_k,T_{k+1}]}(t) + f_\infty(H_\infty,t,x)\cdot \mathbf{1}_{[T_\infty,\infty)}(t)$$

für gewisse nicht negative Funktionen f_k. Für den Fall, daß der Zustandsraum von Y ein $\mathbb{R}^d$ ist, folgt dies direkt aus (5.13) und (5.14), ebenso für den Fall $f(y,x) = f'(y)\cdot f''(x)$, da (5.13) auf f'(Y) angewendet werden kann. Mit Dynkinargument und maßtheoretischer Induktion folgt dann aber sofort der allgemeine Fall wie im Beweis von (5.13).

Wir betrachten erst einen Summanden.

$$\begin{aligned} &E\big[f(Y_{T_k},X_{T_k})\cdot 1_{\{T_k \le t\}}\big] \\ &= E\big[1_{\{T_{k-1} \le t\}}\cdot f_{k-1}(H_{k-1},T_k,X_{T_k})\cdot 1_{\{T_k \le t\}}\big] \\ &= E\big[1_{\{T_{k-1} \le t\}}\cdot E\big[f_{k-1}(H_{k-1},T_{k-1}+S_k,Z_k)\cdot 1_{\{T_{k-1}+S_k \le t\}}\,\big|\,H_{k-1}\big]\,\big] \\ &= E\big[1_{\{T_{k-1} \le t\}}\cdot F_{k-1}(H_{k-1},t)\big] \quad \text{mit} \end{aligned}$$

$$F_{k-1}((...,u,x),t) := E\left[f_{k-1}((...,u,x),u+S_k,Z_k)\cdot 1_{\{u+S_k \le t\}} \,|\, H_{k-1}=(...,u.x)\right]$$

$$= {}_{(0,t-u]}\int ds\, e^{-\Lambda(s,x)} \int \lambda Q(\varphi(s,x); dz)\, f_{k-1}((...,u,x),u+s,z)$$

$$= {}_{(u,t]}\int ds\, P\left[S_k > s-u \,|\, H_{k-1}= (...u,,x)\right] \int \lambda Q(\varphi(s-u,x); dz)\, f_{k-1}((...,u,x),s,z)$$

$$= E\left[{}_{(u,t]}\int ds\, \mathbf{1}_{\{u+S_k > s\}} \int \lambda Q(\varphi(s-t,x); dz)\, f(g_{k-1}((...,u,x),s),z) \,|\, H_{k-1}= (...,u,,x)\right]$$

Dabei wurde der (nicht–bedingte) Satz von Fubini benutzt; $P\left[S_k \in \cdot \,|\, H_{k-1}= (...,u,,x)\right]$ ist hier bei festem (...,u,x) ein (nicht–bedingtes) W–Maß.
Nun können wir der obigen Gleichungskette weiterfahren mit

$$= E\left[\, 1_{\{T_{k-1} \le t\}} \cdot {}_{(T_{k-1},t\wedge T_k]}\int ds \int \lambda Q(\varphi(s-T_{k-1},Z_{k-1}); dz)\, f_{k-1}(H_k,s,z)\,\right]$$

$$= E\left[\, {}_{(T_{k-1},t\wedge T_k]}\int ds \int \lambda Q(X_s; dz)\, f(Y_s,z)\,\right]$$

nach (5.13)'. Durch Summation über k erhält man die Behauptung. Dabei ist zu berücksichtigen, daß auf der rechten Seite ${}_0\int^{t\wedge T_\infty}... = {}_0\int^t ...$ ist wegen
$\lambda(X_s) = \lambda(e) = 0$ für $t \ge T_\infty$. □

7.2 Lévy–Formel. Seien τ eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit, $0 \le t \le \infty$ und $f : S\times S \mapsto [0,\infty]$ mb. Dann gilt:

(a) $$E\left[\sum_{k=1}^{N_\tau} f(X_{T_k-},X_{T_k})\,\right] = E\left[\, {}_0\int^\tau ds \int \lambda Q(X_s;dz)\, f(X_s,z)\,\right];$$

(b) $$E\left[\sum_{k=1}^{N_t} f(X_{T_k-},X_{T_k})\,\right] = {}_0\int^t E\left[\int \lambda Q(X_s;dz)\, f(X_s,z)\,\right] ds\,.$$

Beweis: a) Wähle $Y_t = (\mathbf{1}_{(0,\tau]}(t), X_{t-})$ in 7.1; dann folgt:

$$E\left[\sum_{k=1}^{N_t} \mathbf{1}_{(0,\tau]}(T_k)\cdot f(X_{T_k-},X_{T_k})\,\right] = E\left[\sum_{k=1}^{N_{t\wedge\tau}} f(X_{T_k-},X_{T_k})\,\right]$$

$$= E\left[\, {}_0\int^t ds\, \mathbf{1}_{(0,\tau]}(s) \int \lambda Q(X_s; dz)\, f(X_s,z)\,\right]$$

$$= E\left[\, {}_0\int^{t\wedge\tau} ds \int \lambda Q(X_s; dz)\, f(X_s,z)\,\right].$$

Mit $t\to\infty$ folgt die Behauptung mit monotoner Konvergenz.
Teil b) folgt jetzt aus a) mit Fubini. □

Als **Spezialfall** aus der Lévy–Formel erhält man für eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit τ mit $f \equiv 1$:

(7.3) $$E[N_\tau] = E\left[\, {}_0\int^\tau \lambda(X_s)\, ds\,\right] .$$

7.4 Lemma. Ist λ beschränkt, so gilt für $\alpha>1$: $E\left[\alpha^{N_t}\right] < \infty \quad \forall\, t\ge 0$.

Beweis: Sei λ durch $\|\lambda\|$ beschränkt. Wir setzen $Y_t = N_{t-}$ und
$f(N_{t-}) = (\alpha-1)\alpha^{N_{t-}} \cdot \mathbf{1}_{(0,n-1]}(N_{t-})$. Dann gilt nach 7.1:

$$E\left[\alpha^{N_{t\wedge n}}\right] - 1 = E\left[\sum_1^{N_{t\wedge n}} (\alpha-1)\alpha^{k-1}\right] = E\left[\sum_1^{N_t} f(N_{T_k-})\right]$$

$$= E\left[\int_0^t \lambda(X_s)\cdot(\alpha-1)\cdot\alpha^{N_{s-}}\cdot \mathbf{1}_{(0,n-1]}(N_{s-})\,ds\right] = (\alpha-1)\cdot E\left[\int_0^{t\wedge T_n} \lambda(X_s)\cdot\alpha^{N_s\wedge n}\,ds\right].$$

Also erhält man: $E\left[\alpha^{N_{t\wedge n}}\right] \le 1 + \beta\cdot\int_0^t E\left[\alpha^{N_{s\wedge n}}\right] ds$ mit $\beta = (\alpha-1)\cdot\|\lambda\|$.
Durch Induktion ergibt sich nun für $k \in \mathbb{N}$:

$$E\left[\alpha^{N_{t\wedge n}}\right] \le \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\beta t)^m}{m!} + \frac{\beta^k}{(k-1)!}\cdot \int_0^t E\left[\alpha^{N_{s\wedge n}}\right](t-s)^{k-1} ds\,.$$

Wegen $E\left[\alpha^{N_{s\wedge n}}\right] \le e^n$ folgt für $k \to \infty$: $E\left[\alpha^{N_{t\wedge n}}\right] \le e^{\beta\cdot t}$.
Das ist ein Spezialfall der Gronwall–Ungleichung. Mit $n\to\infty$ folgt die Behauptung. []

Definition 1. Zu $f : S \mapsto \mathbb{R}$ sei

$$\mathfrak{X}(f) := \{\ \tilde f : S \mapsto \mathbb{R}\ ;\ \tilde f \text{ mb, } f(\varphi(t,x)) - f(x) = \int_0^t \tilde f(\varphi(s,x))\,ds \quad \forall\, t\ge 0\ \},$$

$$\mathfrak{J}(f)(x) := \int \lambda Q(x;dy)\,\left[f(y) - f(x)\right], \text{ sofern der Ausdruck existiert und endlich ist.}$$

Natürlich kann $\mathfrak{X}(f)$ leer sein.

7.5 Beispiele. (a) Liegt ein Sprungprozeß vor, gilt also $\varphi(\cdot\,,x) \equiv x$, so gilt offenbar stets:

$$\tilde f \in \mathfrak{X}(f) \text{ mit } \tilde f \equiv 0\,.$$

(b) Ist S eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$, ist $f : S \mapsto \mathbb{R}$ stetig db und gilt für für φ (6.9), also:
$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) = b(\varphi(t,x))$, $t\ge 0$, mit einer stetigen Funktion $b = (b_1,...,b_d): S \mapsto \mathbb{R}^d$, so gilt:
$\frac{\partial}{\partial t} f(\varphi(t,x)) = \sum_1^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t,x))\cdot b_i(\varphi(t,x))$, also nach dem Hauptsatz der Diff & Int–rechnung:

(7.6) $$\tilde f := \sum_1^d \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot b_i \in \mathfrak{X}(f)\,.$$

Dies ist dann die kanonische Version aus $\mathfrak{X}(f)$. []

Für $\tilde f \in \mathfrak{X}(f)$ gilt:

$$f(X_{T_k-0}) - f(X_{T_{k-1}}) = f(\varphi(S_k, X_{T_{k-1}})) - f(X_{T_{k-1}}) = \int_0^{S_k} \tilde f(\varphi(s, X_{T_{k-1}}))\,ds$$

$$= \int_{T_{k-1}}^{T_k} \tilde f(\varphi(s-T_{k-1}, X_{T_{k-1}}))\,ds = \int_{T_{k-1}}^{T_k} \tilde f(X_s)\,ds$$

und ebenso

$$f(X_t) - f(X_{T_{N_t}}) = \int_{T_{N_t}}^t \tilde f(X_s)\,ds \quad \text{und somit wegen } \{T_n > t\} = \{N_t < n\}:$$

$f(X_{t\wedge T_n}) - f(X_{T_{N_t\wedge n}}) = \int_{T_{N_t\wedge n}}^{t\wedge T_n} \tilde{f}(X_s)\,ds$. Es folgt:

$$f(X_{t\wedge T_n}) - f(X_0) = f(X_{t\wedge T_n}) - f(X_{T_{N_t\wedge n}}) + f(X_{T_{N_t\wedge n}}) - f(X_0) =$$

$$f(X_{t\wedge T_n}) - f(X_{T_{N_t\wedge n}}) + \sum_{k=1}^{N_t\wedge n} \left([f(X_{T_k}) - f(X_{T_k-0})] + [f(X_{T_k-0}) - f(X_{T_{k-1}})] \right)$$

$$= \int_{T_{N_t\wedge n}}^{t\wedge T_n} \tilde{f}(X_s)\,ds + \sum_{k=1}^{N_t\wedge n} \left([f(X_{T_k}) - f(X_{T_k-0})] + \int_{T_{k-1}}^{T_k} \tilde{f}(X_s)\,ds \right),$$

also für $\tilde{f} \in \mathfrak{X}(f)$:

(7.7) $$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t \tilde{f}(X_s)\,ds + \sum_{k=1}^{N_t} [f(X_{T_k}) - f(X_{T_k-0})] \quad \text{auf } \{N_t < \infty\}.$$

Wir werden die folgenden Voraussetzungen benutzen für $\tilde{f} \in \mathfrak{X}(f)$:

(7.8) **I(f,τ,P)** $$E\left[\int_0^\tau ds \int \lambda Q(X_s; dz)\, |f(z) - f(X_s)| \right] < \infty;$$

$\tilde{I}(\tilde{f},\tau,P)$ $$E\left[\int_0^\tau |\tilde{f}(X_s)|\, ds \right] < \infty.$$

7.9 Bemerkung. Die Beziehung (7.7) gilt für $t = \tau(\omega)$ auf $\{\tau < T_\infty\}$.

7.10 Dynkin–Formel. Sei τ $\mathbb{F}$–Stoppzeit mit $\tau < T_\infty$ f.s. , $\tilde{f} \in \mathfrak{X}(f)$, sodaß I(f,τ,P) und $\tilde{I}(\tilde{f},\tau,P)$ erfüllt sind. Dann gilt: $E[\, f(X_\tau) - f(X_0)\,] = E\left[\int_0^\tau (\, \tilde{f}(X_s) + \mathfrak{J}(f)(X_s)\,)\, ds \right]$.

Beweis: Setzt man in 7.2 $f(x,y) = [f(y)–f(x)]^{\pm}$, so erhält man

$E\left[\sum_{k=1}^{N_\tau} [f(X_{T_k}) - f(X_{T_k-0})]^{\pm} \right] = E\left[\int_0^\tau ds \int \lambda Q(X_s;dz)\, [f(z) - f(X_s)]^{\pm} \right] < \infty$ wegen I(f,τ). Die Behauptung folgt jetzt aus (7.7). □

Für $\tau = t$ ergibt sich aus 7.10:

7.11 Kolmogoroffsche Vorwärtsgleichung. Sei $T_\infty = \infty$ P_x–f.s., $\tilde{f} \in \mathfrak{X}(f)$, sodaß $I(f,t,P_x)$ und $\tilde{I}(\tilde{f},t,P_x)$ erfüllt sind für $x \in S$. Dann gilt:

$E_x[f(X_t)] = f(x) + \int_0^t E_x[\tilde{f}(X_s) + \mathfrak{J}(f)(X_s)]\, ds$, $x \in S$.

Es soll nun die Rückwärtsgleichung bewiesen werden. Dabei soll die Bildung von "$\tilde{}$" und $\mathfrak{J}$ mit dem E–Operator vertauscht werden. Dazu untersuchen wie $\mathfrak{K}(F(s,\cdot))$ mit

$$F(s,x) := E_x[f(X_s)].$$

Einen ersten Schritt macht das folgende

7.12 Lemma. Unter den Voraussetzungen von 7.11 gilt für $t \geq 0$:

$$F(s,\varphi(t,x)) \cdot e^{-\Lambda(t,x)} - F(s,x) = {}_0\int^t [g(u) - e^{-\Lambda(u,x)} \cdot \alpha(u)]\, du$$

$$\text{mit } g(u) := E_x[\mathbf{1}_{\{T_1>u\}} \cdot [\tilde{f}(X_{u+s}) + \mathfrak{J}(f)(X_{u+s})]]$$

$$\text{und } \alpha(u) := \int \lambda Q(\varphi(u,x);dy)F(s,y).$$

Beweis [G. Jakobs]**:** Nach 7.11 ist $F(t,x) \in \mathbb{R}$. Setze $\tau := t \wedge T_1 + s \leq t + s$.
Mit der ME bei t erhält man

$$F(s,\varphi(t,x)) \cdot e^{-\Lambda(t,x)} = E_{\varphi(t,x)}[f(X_s)] \cdot P_x[T_1>t] = E_x[f(X_{t+s}) \cdot \mathbf{1}_{\{T_1>t\}}]$$
$$= E_x[f(X_\tau) \cdot \mathbf{1}_{\{T_1>t\}}] = E_x[f(X_\tau)] - E_x[f(X_\tau) \cdot \mathbf{1}_{\{T_1\leq t\}}].$$

Nun gilt nach der Dynkin–Formel 7.10:

$$E_x[f(X_\tau)] = f(x) + E_x[\, {}_0\int^\tau (\, \tilde{f}(X_u) + \mathfrak{J}(f)(X_u)\,)\, du\,]$$
$$= f(x) + E_x[\, {}_0\int^s (\,...\,)\, du\,] + E_x[\, {}_s\int^\tau (\,...\,)\, du\,]$$
$$= F(s,x) + E_x[{}_0\int^{t\wedge T_1} (\, \tilde{f}(X_{u+s}) + \mathfrak{J}(f)(X_{u+s})\,)\, du\,]$$
$$= F(s,x) + {}_0\int^t E_x[\mathbf{1}_{\{T_1>u\}} \cdot (\tilde{f}(X_{u+s}) + \mathfrak{J}(f)(X_{u+s}))]\, du = F(s,x) + {}_0\int^t g(u)\, du\ ;$$

Ferner folgt mit der ME bei T_1 und (6.12):

$$E_x[f(X_\tau) \cdot \mathbf{1}_{\{T_1\leq t\}}] = E_x[f(X_{T_1+s}) \cdot \mathbf{1}_{\{T_1\leq t\}}] = E_x[\mathbf{1}_{\{T_1\leq t\}} \cdot F(s,X_{T_1})]$$
$$= {}_0\int^t du\, e^{-\Lambda(u,x)} \cdot \int \lambda Q(\varphi(u,x);dz)F(s,z) = {}_0\int^t e^{-\Lambda(u,x)} \cdot \alpha(u)\, du\ .\ [\,]$$

7.13 Lemma (Produktregel, part. Integration). Seien $G_i : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ gegeben mit

$$G_i(t) - G_i(0) = {}_0\int^t g_i(u)\, du\ ,\ g_i \text{ mb und } {}_0\int^t |\, g_i(u)\,|\, du < \infty,\ t \geq 0. \text{ Dann gilt:}$$

$$G_1(t)G_2(t) - G_1(0)G_2(0) = {}_0\int^t [G_1(u)g_2(u) + g_1(u)G_2(u)]\, du.$$

Dies ist eine Spezialfall von 10.6 und kann leicht mit Fubini gezeigt werden.

Gemäß 6.13(e) ist $e^{\Lambda(t,x)}$ und nach 7.12 ist $F(s,\varphi(t,x)) \cdot e^{-\Lambda(t,x)}$ absolut stetig. Also ist nach 7.13 auch $F(s,\varphi(t,x))$ absolut stetig. Genauer gilt:

7.14 Lemma. Unter den Vorauss. von 7.12 gilt:

$F(s,\varphi(t,x)) - F(s,x) = \int_0^t \tilde{F}(s,\varphi(u,x))\,du$, also $\tilde{F}(s,\cdot) \in \mathfrak{X}(F(s,\cdot))$ mit

$\tilde{F}(s,x) := E_x[\tilde{f}(X_s) + \mathfrak{J}(f)(X_s)] - \mathfrak{J}(F(s,\cdot))(x)$.

Beweis: Nach 7.12 und 7.13 gilt:

$F(s,\varphi(t,x)) - F(s,x) = \int_0^t [e^{\Lambda(u,x)} g(u) - \alpha(u) + \lambda(\varphi(u,x))F(s,\varphi(u,x))]\,du$

$= \int_0^t [e^{\Lambda(u,x)} g(u) - \mathfrak{J}(F(s,\cdot))(\varphi(u,x))]\,du$.

Nach Voraussetzung ist

$E_x[\int_0^t \mathbf{1}_{\{T_1>u\}} \cdot |\tilde{f}(X_{u+s}) + \mathfrak{J}(f)(X_{u+s})|\,du] < \infty$. Nach Fubini ist somit

$N := \{u \in [0,t]; E_x[\mathbf{1}_{\{T_1>u\}} \cdot |\tilde{f}(X_{u+s}) + \mathfrak{J}(f)(X_{u+s})|] = \infty\}$ ein λ_1–Nullmenge.

Für $[0,t] \setminus N$ folgt nun mit der ME bei u

$g(u) = E_x[\mathbf{1}_{\{T_1>u\}} \cdot \{\tilde{f}(X_{u+s}) + \mathfrak{J}(f)(X_{u+s})\}]$

$= E_x[\mathbf{1}_{\{T_1>u\}} \cdot E_{\varphi(u,x)}[\tilde{f}(X_s) + \mathfrak{J}(f)(X_s)]]$

$= e^{-\Lambda(u,x)} \cdot E_{\varphi(u,x)}[\tilde{f}(X_s) + \mathfrak{J}(f)(X_s)]$. □

7.15 Kolmogoroffsche Rückwärtsgleichung. Sei $T_\infty = \infty$ P_x–f.s., $\tilde{f} \in \mathfrak{X}(f)$, sodaß $I(f,t,P_x)$ und $\tilde{I}(\tilde{f},t,P_x)$ erfüllt sind für $x \in S$, $t \geq 0$. Dann gilt:

$E_x[f(X_t)] = F(t,x) = f(x) + \int_0^t [\tilde{F}(s,x) + \mathfrak{J}(F(s,\cdot))(x)]\,ds$

mit $\tilde{F}(s,\cdot) \in \mathfrak{X}(F(s,\cdot))$ wie in 7.14, $x \in S$, $s,t \geq 0$.

Beweis: Nach 7.14 und der Vorwärtsgleichung 7.11 hat man:

$\int_0^t [\tilde{F}(s,x) + \mathfrak{J}(F(s,\cdot))(x)]\,ds = \int_0^t E_x[\tilde{f}(X_s) + \mathfrak{J}(f)(X_s)]\,du = F(t,x) - f(x)$. □

§ 9 Zeitstetige Martingale.

Neben stochastischen Prozessen auf $[0,\infty)$ sollen auch solche auf $[0,T]$ betrachtet werden. Es sei stets ein fester W–Raum $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ zugrundegelegt mit einer Filterung $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_t,\ t \in [0,T]\cap\mathbb{R})$ in $\mathfrak{F}$ für ein $T \in [0,\infty]$.

Definition 1. $X = (X_t,\ t \in [0,T]\cap\mathbb{R})$ sei ein stochastischer Prozeß mit Zustandsraum $\mathbb{R}$.
Dabei ist T der **Zeithorizont**. Dann heißt $(X,\mathbb{F})$ **Martingal** [bzw. **Submartingal** bzw. **Supermartingal**], falls gilt:

i) X ist $\mathbb{F}$–adaptiert;

ii) $E[|X_t|] < \infty \quad \forall\, t\geq 0$;

iii) $E[X_t|\mathfrak{F}_s] = X_s$ f.s. $\forall\, s\leq t$ [bzw. "≥" bzw. "≤"].

Offenbar ist (iii) in der obigen Situation äquivalent zu

iii)' $\int_A (X_t - X_s)\, dP = 0 \quad \forall\, A \in \mathfrak{F}_s,\ s\leq t.$

9.1 Beispiel: **Brownsche Bewegung.** Sei $(W,\mathbb{F})$ eine 1–dim. standard. BB.

(a) $(W,\mathbb{F})$ ist ein Mart, es gilt:

$E[W_t - W_s|\mathfrak{F}_s] = E[W_t - W_s] = 0$ für $s\leq t$;

denn der Zuwachs $W_t - W_s$ ist unabhängig von $\mathfrak{F}_s$.

(b) $((W_t^2 - t),\mathbb{F})$ ist ein Mart und $((W_t^2),\mathbb{F})$ ist ein Submart. Dies folgt aus:

$$E[W_t^2 - W_s^2|\mathfrak{F}_s] = E[(W_t - W_s)^2 + 2W_s\cdot W_t - 2W_s^2|\mathfrak{F}_s]$$
$$= E[(W_t - W_s)^2] + 2W_s\cdot[W_t|\mathfrak{F}_s] - 2W_s^2 = t - s \geq 0\ .\ \square$$

9.2 Beispiel: Poissonprozeß. Sei N ein Poisson–Prozeß mit Intensität $\lambda \in (0,\infty)$, $\mathbb{F}$ die kanonische Filterung und $M_t := N_t - \lambda\cdot t$. Dann heißt M **kompensierter Poisson–Prozeß**.
N und M haben unabhängige und stationäre Zuwächse,; deshalb folgt wie in Beispiel 9.1:
$(M,\mathbb{F})$ und $((M_t^2 - \lambda t),\mathbb{F})$ sind Martingale, und $(M^2,\mathbb{F})$ und $(N,\mathbb{F})$ sind Submartingale.
Dies sind auch Spezialfälle des folgenden Satzes. $\square$

9.3 Satz. Sei X ein PDP auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit $T_\infty = \infty$ f.s. und $\mathbb{F}$ wie in § 6. Sei ferner $\tilde{f} \in \mathfrak{X}(f)$, sodaß $I(f,t,P)$ und $\tilde{I}(\tilde{f},t,P)$ aus (7.8) erfüllt sind $\forall\, t\geq 0$. Setzt man

$$M_t := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathfrak{A}(f)(X_s)\, ds\ ,\ t\geq 0, \quad \text{mit } \mathfrak{A}(f)(x) := \tilde{f}(x) + \mathfrak{J}(f)(x),$$

so ist $(M,\mathbb{F})$ ein Mart.

Beweis: Wir zeigen: $E[\mathbf{1}_A\cdot(M_{t+u} - M_t)] = 0$ für $A \in \mathfrak{F}_t$, $t,u \geq 0$.

Setze $\alpha(x) := |\tilde{f}(x)| + \int \lambda Q(x;dz)\,|f(z) - f(x)|$, dann gilt: $|\mathfrak{A}(f)| \le \alpha$.

Wegen I(f,t+u,P) und $\tilde{I}(\tilde{f},t+u,P)$ gilt: $E\left[\int_0^u \alpha(X_{t+s})\,ds\right] < \infty$.
Nach (7.7) können wir auf $\{N_t < \infty\}$ schreiben:

(*) $f(X_{t+u}) - f(X_t) = \int_t^{t+u} \tilde{f}(X_s)\,ds + \sum_{N_t<k\le N_{t+u}} \left[f(X_{T_k}) - f(X_{T_k-0})\right]$.

Nun folgt aus 9.6 unten für $A \in \mathfrak{F}_t$:

$$E\left[\mathbf{1}_A \cdot \sum_{N_t<k\le N_{t+u}} \left[f(X_{T_k}) - f(X_{T_k-0})\right]\right] = E\left[\mathbf{1}_A \cdot \int_t^{t+u} \lambda Q(X_s;dz)\,\left[f(z) - f(X_s)\right]\right].$$

Aus (*) folgt nun:

$$E\left[1_A \cdot (f(X_{t+u}) - f(X_t))\right] = E\left[\mathbf{1}_A \cdot \int_t^{t+u} \mathfrak{A}(f)(X_s)\,ds\right]. \quad [\,]$$

9.4 Anwendung von Satz 9.3 auf Beispiel 9.2.
Seien N und M wie in 9.2. N ist ein PDP mit $\varphi(\cdot,x) = x$, $\lambda(x) = \lambda$ und $Q(x;x+1) = 1$.

Setzt man $f(x) = x$, so folgt $\tilde{f} \equiv 0$ nach 7.5a und $\mathfrak{J}(f)(x) = \lambda \cdot (x+1 - x) = \lambda$.
Nach 9.3 ist also $N_t - \lambda \cdot t$ ein Mart.
M ist ein PDP mit $\varphi(t,x) = x - \lambda \cdot t$ und λ und Q wie bei N.

Betrachtet man $f(x) = x^2$, so folgt mit (7.6): $\tilde{f}(x) = -2x \cdot \lambda$.

Also ist $\tilde{f}(x) + \mathfrak{J}(f)(x) = -2\lambda x + \lambda \cdot ((x+1)^2 - x^2) = \lambda$.

Also ist nach 9.3 $M_t^2 - \lambda t$ ein Mart.
Die Integrierbarkeitsbedingungen von 9.3 sind leicht nachzuprüfen. [ ]

9.5 Korollar. Gilt in der Situation von 9.3: $\mathfrak{A}(f) \equiv 0$, so ist $(f(X),\mathbb{F})$ ein Mart mit $f(X) := (f(X_t), t\ge 0)$.

9.6 Satz. Sei X ein PDP auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit $T_\infty = \infty$ f.s. und $\mathbb{F}$, λQ, N_t wie in § 6. Sei Y ein $\mathbb{F}$–progressiver Prozeß mit Zustandsraum $(D,\mathfrak{D})$ und $f : D\times S \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ eine mb Funktion mit:
$E\left[\int_0^t ds \int \lambda Q(X_s,dz)\,|f(Y_s,z)|\right] < \infty \quad \forall\, t\ge 0$.
Sei $M_t := \sum_{k=1}^{N_t} f(Y_{T_k},X_{T_k}) - \int_0^t ds \int \lambda Q(X_s,dz)\, f(Y_s,z)$, $t \ge 0$;
dann ist $(M,\mathbb{F})$ ein Martingal.

Beweis: Wähle $t,u > 0$, $A \in \mathfrak{F}_t$, setze $\tilde{Y}_s = (\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_{(t,\infty)}(s), Y_s)$ und
$\tilde{f}(\tilde{Y}_s,X_s) := \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_{(t,\infty)}(s) \cdot f^{\pm}(Y_s,X_s)$. Dann folgt aus 7.1:

$$E\left[\mathbf{1}_A \cdot \sum_{N_t<k\le N_{t+u}} f(Y_{T_k},X_{T_k})\right] = E\left[\mathbf{1}_A \cdot \int_t^{t+u} ds \int \lambda Q(X_s,dz)\, f^{\pm}(Y_s,z).\right.$$

Nach Voraussetzung können wir also schreiben: $E[\,\mathbf{1}_A \cdot (M_{t+u} - M_t)\,] = 0$. []

9.7 Lemma. Sei $(X,\mathbb{F})$ Mart [bzw. Submart], $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ konvex [bzw. konvex und isoton], sodaß $\varphi(X_t)$ für $t \geq 0$ intb. ist. Dann ist $(\varphi(X),\mathbb{F})$ Submart mit $\varphi(X) := (\varphi(X_t),\, t \geq 0)$.

Der **Beweis** verläuft wie im zeitdiskreten Fall.

Viele Aussagen für zeitstetige [Sub–] Martingale können auf entsprechende Aussagen für zeitdiskrete Prozesse zurückgeführt werden Dabei ist es bequem, auch zeitdiskrete [Sub–] Martingale mit einer abzählbaren Indexmenge $I = \{t_0 < t_1 < ...\} \subset [0,\infty)$ zuzulassen. Der Begriff einer Stoppzeit τ mit Werten in I oder $I \cup \{\infty\}$ und die Resultate über [Sub–] Martingale mit Indexmenge $I \subset \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ übertragen sich in natürlicher Weise.

9.8 Stoppsatz. Ist $(X,\mathbb{F})$ Submart mit rechtsstetigen Pfaden und sind σ,τ beschränkte $\mathbb{F}_+$–Stoppzeiten mit $\sigma \leq \tau$, so sind X_σ und X_τ intb und es gilt:

$$E[X_\tau \,|\, \mathfrak{F}_{\sigma+}] \geq X_\sigma \quad \text{f.s.} .$$

Nach 1.10 ist X_σ $\mathfrak{F}_{\sigma+}$–mb mit $\mathfrak{F}_{\sigma+} \subset \mathfrak{F}_\infty \subset \mathfrak{F}$.
Ist σ sogar $\mathbb{F}$–Stoppzeit, so folgt in der Situation von 9.8 erst recht [vgl. etwa (9.12)]:

(9.9) $$E[X_\tau \,|\, \mathfrak{F}_\sigma] \geq X_\sigma \quad \text{f.s.} ;$$

denn X_σ ist dann $\mathfrak{F}_\sigma$–mb nach 1.10.

9.10 Folgerung Für Martingale X erhält man im Stoppsatz "=" anstelle von "≥", da dann sowohl X als auch –X Submart ist.

9.11 Folgerung. Ist $(X,\mathbb{F})$ Submart [bzw. Mart] mit rechtsstetigen Pfaden, so ist auch $(X,\mathbb{F}_+)$ Submart [bzw. Mart].

Beweis von 9.8. Sei etwa $\tau < N \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist neben der Integrierbarkeit:

(9.12) $$\int_A X_\sigma \, dP \leq \int_A X_\tau \, dP \quad \text{für } A \in \mathfrak{F}_{\sigma+}.$$

Sei $\sigma_n := k/2^n$ auf $\{(k-1)/2^n \leq \sigma < k/2^n$ für $k = 1,...,N \cdot 2^n$ und τ_n entsprechend definiert. Dann gilt: $\sigma < \sigma_n \leq \tau_n \leq \tau_{n-1}$, $\sigma_n \downarrow \sigma$, $\tau_n \downarrow \tau$. Wegen $\{\sigma_n \leq k/2^n\} = \{\sigma < k/2^n\}$ sind σ_n und entsprechend τ_n gemäß 1.6 $\mathbb{F}$–Stoppzeiten mit [vgl. 1.9e und 1.12]

$$\mathfrak{F}_{\sigma+} \subset \mathfrak{F}_{\sigma_n} \subset \mathfrak{F}_{\tau_n} \subset \mathfrak{F}_{\tau_{n-1}}.$$

Nun kann als Vorstufe Folgendes gezeigt werden:

(*) $$\int_A X_{\sigma_n} \, dP \leq \int_A X_{\tau_m} \, dP \quad \text{für } A \in \mathfrak{F}_{\sigma_n} \supset \mathfrak{F}_{\sigma+},\ m \leq n$$

Die Zufallsabhängigkeit von σ_n beherrscht man wie beim Beweis der starken ME in 3.6 durch Einführung von

(**) $A_k^n := A \cap \{\sigma_n = k/2^n\} = A \cap \{\sigma < k/2^n\} \setminus \{\sigma < (k-1)/2^n\} \in \mathfrak{F}_{k/2^n}$

und diejenige von τ_m durch den zeitdiskreten Stoppsatz. Sei $I_n := \{k/2^n;\ k = 0,1,...,N\cdot 2^n\}$.
Dann ist $(X_t,\mathfrak{F}_t,\ t \in I_n)$ ein zeitdiskretes Submart und τ_m Stoppzeit dazu wegen:

$\{\tau_m = t\} \in \mathfrak{F}_t$ für $t \in I_m$ nach (**) und $\{\tau_m = t\} = \emptyset$ für $t \in I_n \setminus I_m$.

Somit ist nach dem zeitdiskreten Stoppsatz [vgl. W.th. II 4.6] $(X_{t\wedge\tau_m},\mathfrak{F}_t,\ t \in I_n)$ Submart, insbesondere $X_{\tau_m} = X_{N\wedge\tau_m}$ intb. Es folgt:

$$A_k^n \int X_{\sigma_n}\, dP = A_k^n \int X_{(k/2^n)\wedge\tau_m}\, dP \le A_k^n \int X_{N\wedge\tau_m}\, dP = A_k^n \int X_{\tau_m}\, dP\ .$$

Durch Summation über k erhält man (*). Setzt man (*) $\sigma = \tau$, so ergibt sich:

$$A \int X_{\tau_n}\, dP \le A \int X_{\tau_m}\, dP \quad \text{für } A \in \mathfrak{F}_{\tau_n},\ m \le n.$$

Definiert $\check{X}_{-n} := X_{\tau_n}$ und $\tilde{\mathfrak{F}}_{-n} := \mathfrak{F}_{\tau_n}$, so ist $(\check{X}_{-m}, \tilde{\mathfrak{F}}_{-m},\ m=...-2,-1,0)$ also ein Submart. Somit ist $(X_{\tau_n} \vee a)$ für $a \in \mathbb{R}$ glm intb [vgl. W.th. II 4.4]. Entsprechendes gilt für σ anstelle von τ. Das gestattet den Grenzübergang $m=n \to \infty$ [vgl. W.th.II 4.3] in (*) für $A \in \mathfrak{F}_{\sigma+}$, wenn man X_t durch $X_t \vee a$ ersetzt, was nach 9.7 erlaubt ist. Also ergibt sich wegen der Rechtsstetigkeit der Pfade:

$$A \int X_\sigma \vee a\, dP \le A \int X_\tau \vee a\, dP,\ A \in \mathfrak{F}_{\sigma+},\ \text{insbesondere: } E[X_0 \vee a] \le E[X_\tau \vee a] \le E[X_N \vee a]\ .$$

Wegen monot. Konv. folgt schließlich für $a \downarrow -\infty$ das gewünschte Resultat.
Der letzte Teil ist dem Beweis des zeitdiskreten Martingal–Konvergenzsatzes [vgl. W.th. II 4.9] nachgebildet. []

9.13 Stoppsatz. Sei $(X,\mathbb{F})$ Submart [bzw. Mart] mit rechtsstetigen Pfaden und

$X^\tau = (X_{t\wedge\tau},\ t\ge 0)$ der gestoppte Prozeß. Ist τ $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit, so ist auch $(X^\tau,\mathbb{F}_+)$ Submart [bzw. Mart].

Beweis. Die Adaptiertheit an $\mathbb{F}_+$ folgt aus 1.10. Sei $s<t$, $A \in \mathfrak{F}_{s+}$. Es gilt $\{\tau > s\} \in \mathfrak{F}_{s+}$.
Auf $\{\tau \le s\}$ gilt: $X_{s\wedge\tau} = X_{t\wedge\tau}$. Ferner folgt mit dem Stoppsatz 9.8 für die Stoppzeiten s und $\tau' := t\wedge(\tau\vee s) \ge s$:

$$A\cap\{\tau>s\} \int X_{s\wedge\tau}\, dP = A\cap\{\tau>s\} \int X_s\, dP \le A\cap\{\tau>s\} \int X_{\tau'}\, dP = A\cap\{\tau>s\} \int X_{t\wedge\tau}\, dP\ .\ []$$

Im Fall, daß X nicht nur Submart, sondern sogar isotone Pfade hat, ist folgender Satz gerade die Markoffsche Ungleichung.

9.14 Maximal–Ungleichung von Doob. Sei $(X,\mathbb{F})$ ein rechtsstetiges nichtnegatives Submart, z.B. $X_s = |M_s|^p$ für ein Mart M und $p\geq 1$. Dann gilt für $t\geq 0$:

(a) $\quad P[\sup_{0\leq s\leq t} X_s \geq \alpha] \leq \alpha^{-p}\cdot E[X_t^p] \quad \forall\, \alpha > 0;$

(b) $\quad E[\sup_{0\leq s\leq t} X_s^2] \leq 4\cdot E[X_t^2].$

Beweis: a) Wähle $I_n := \{kt/2^n;\ k=0,...,2^n\}$. Dann ist $(X_s;\ s\in I_n)$ zeitdiskretes Submart. Aus dem Beweis der zeitdiskreten Maximal–Ungleichung von Doob [vgl. W.Th. II 4.14] folgt

für $V_n := \max_{I_n} X:\ P[V_n \geq z] \leq z^{-p}\cdot \int_{\{V_n\geq z\}} X_t^p\, dP.$

Es gilt: $V_n \uparrow \sup_{[0,t]} X =: V$ wegen der Rechtsstetigkeit der Pfade und somit $\{V_n > z\} \uparrow \{V > z\}$. Damit ergibt sich:

(*) $\quad P[V > z] = \lim_n P[V_n > z] \leq z^{-p}\cdot \int_{\{V>z\}} X_t^p\, dP \leq z^{-p}\cdot E[X_t^p].$

Mit $z\uparrow\alpha$ erhält man die Beh. . b) Es gilt:

(**) $\quad E[V^2] = 2\cdot \int_0^\infty z\cdot P[V > z]\, dz.$

1. Bew. von (*): $E[V^2] = \int_0^\infty P[V^2 > y]\, dy$; setze $y = z^2$.

2. Bew. von (*): $E[V^2] = 2\cdot E[\int_0^V (V-u)\, du] = 2\cdot E[\int_0^V du \int_u^V 1\, dz]$; benutze jetzt Fubini.

Mit (*) für p=1 und (**) folgt:

$$E[V^2] \leq 2\cdot \int_0^\infty \int_{\{V>z\}} X_t\, dP\, dz = 2\cdot E[X_t \int_0^V 1\, dz]$$
$$= 2\cdot E[X_t\cdot V] \leq 2\cdot \{E[X_t^2]\cdot E[V^2]\}^{\frac{1}{2}}.[\,]$$

Ein Martingal soll einen Prozeß beschreiben, bei dem weder ein Trend nach oben noch ein Trend nach unten besteht. Die obige Definition ist an die Endlichkeit des Erwartungswertes gebunden. Davon kann man sich durch ein "Stutzung" befreien. Offenbar ist die Stutzung $\varphi_n(X) := X^+\wedge n - X^-\wedge n$ nicht geeignet, da sie eine eventuell bereits vorliegende Martingaleigenschaft zerstören kann, denn φ_n ist nicht konvex. Dagegen kann das Stoppen eines Prozesses in Hinblick auf den Stoppsatz 9.13 eine geeigneten Stutzung bieten.

Ein Prozeß X heißt natürlich glm. intb., wenn es die Familie der Zva $(X_t,\ t\geq 0)$ ist.

Definition 2.(a) Eine isotone Folge (τ_n) von $\mathbb{F}_+$–Stoppzeiten heißt **Lokalisierungsfolge**, falls : $\tau_n \uparrow \infty$ f.s. im Falle $T=\infty$ bzw. $P[\cup_n \{\tau_n \geq T\}] = 1$ im Falle $T<\infty$.

(b) Ist X ein $\mathbb{F}$–adaptierter rechtsstetiger Prozeß und existiert eine Lokalisierungsfolge, sodaß der gestoppte Prozeß $(X^{(n)},\mathbb{F})$ mit $X_t^{(n)} := X_{t\wedge\tau_n}$, $n\in\mathbb{N}$, ein glm. intb. Mart ist, so heißt $(X,\mathbb{F})$ ein **lokales Martingal** mit Lokalisierungsfolge (τ_n) und (τ_n) Lokalisierungsfolge für X.

Sowohl für $T=\infty$ als auch für $T<\infty$ hat man die wichtige Eigenschaft:

(9.15) $X_{t\wedge\tau_n} \to X_t$ f.s. für $n\to\infty$, $t \in [0,T]\cap\mathbb{R}$ für jede Lokalisierungsfolge (τ_n).

Aus dem Stoppsatz 9.13 folgt:

9.16 Lemma. Sei $(X,\mathbb{F})$ lokales Mart mit Lokalisierungsfolge (τ_n), σ eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit und (σ_n) eine beliebige Lokalisierungsfolge. Dann ist $X^\sigma = (X_{t\wedge\sigma},\ t \in [0,T]\cap\mathbb{R})$ wieder ein lokales Mart; $(\tau_n\wedge\sigma_n)$ und insbesondere $(\tau_n\wedge n)$ sind Lokalisierungsfolgen für X.

Beweis: Sicher ist $(\tau_n\wedge\sigma_n)$ Lokalisierungsfolge. Nach dem Stoppsatz 9.13 ist $(X^{(n)}_{t\wedge\sigma},\ t\ge0) = (X_{t\wedge\tau_n\wedge\sigma},\ t\ge0)$ ein Martingal. Sei $\psi(x) := (|x|-\alpha)^+$. Dann ist ψ konvex und somit $\psi(X^{(n)})$ nach 9.7 ein Submart. Es folgt nach dem Stoppsatz 9.8: $E[\psi(X^{(n)}_{t\wedge\sigma})] \le E[\psi(X^{(n)}_t)]$.

Aus der glm. Integrierbarkeit von $X^{(n)}$ folgt also die von $(X^{(n)}_{t\wedge\sigma},\ t\ge0)$. Dies gilt auch für σ_n anstelle von σ. $[]$

Jedes Martingal ist ein lokales Martingal; man kann $\tau_n=n$ als Lokalisierungsfolge wählen. Die glm. Integrierbarkeit von $(X_t,\ t\le n)$ folgt aus $E[\psi(X_t)] \le E[\psi(X_n)] \to 0$ für $\alpha\uparrow\infty$, wobei ψ wie im Beweis von 9.16 gewählt wird. [vgl. auch den Beweis von W.th. II 4.4.]

9.17 Lemma. (a) Ein nichtnegatives lokales Mart X ist ein Supermart.

(b) Ein Supermart [Submart] X mit $E[X_0] = E[X_t]\ \forall\ t\ge0$ ist ein Mart.

Beweis. Sei $s<t$.

a) Ist (τ_n) eine Lokalisierungsfolge für X, so folgt zunächst die Integrierbarkeit mit Fatou:

$$0 \le E[X_t] \le \underline{\lim}\, E[X_{t\wedge\tau_n}] = \underline{\lim}\, E[X_{0\wedge\tau_n}] = E[X_0].$$

Aus dem Lemma von Fatou für bedingte Erwartungwerte [vgl. W.th. II 1.11b] ergibt sich :

$$X_s = \lim X_{s\wedge\tau_n} = \lim E[X_{t\wedge\tau_n}|\mathfrak{F}_s] \ge E[\lim X_{t\wedge\tau_n}|\mathfrak{F}_s] = E[X_t|\mathfrak{F}_s].$$

b) Einerseits gilt: $Y := E[X_t - X_s|\mathfrak{F}_s] \le 0$, anderseits $E[Y] = 0$; also folgt $Y = 0$ f.s. . $[]$

Das obige Lemma liefert u.a. eine hinreichende Bedingung dafür, daß ein lokales Mart ein Mart ist. Weitere Bedingungen bietet

9.18 Proposition. Ist X ein lokales Mart mit Lokalisierungsfolge (τ_n), so ist X sogar ein Mart unter jeder der folgenden Bedingungen:

(i) $\{X_{t\wedge\tau_n},\ n\in\mathbb{N}\}$ ist glm. intb. $\forall\ t \ge 0$;

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X^2_{t\wedge\tau_n}] < \infty\ \forall\ t\ge0$.

Beweis: Unter (i) folgt für $A \in \mathfrak{F}_s$ und u = s,t aus der glm. Integrierbarkeit [vgl. W.th.II 4.3]:

$$\int_A X_u \, dP = \int_A \lim_n X_{u\wedge\tau_n} \, dP = \lim_n \int_A X_{u\wedge\tau_n} \, dP \, .$$

Der Fall (ii) ist ein Spezialfall von (i) [vgl. W.th.II 4.2(4)]. □

9.19 Proposition. Ist M ein Mart, so gilt:

$$E[M_t \,|\, \mathfrak{F}_{s-}] = M_{s-} \text{ f.s. } \forall\, 0<s\le t \text{ mit } M_{s-} = \lim_n M_{s-1/n} \, .$$

Beweis: Es gilt $M_{s-1/n} = E[M_t \,|\, \mathfrak{F}_{s-1/n}]$.

Nun ist $(\mathfrak{F}_{s-1/n}, n\in\mathbb{N})$ eine zeitdiskrete Filterung, sodaß offenbar gilt:

$$\mathfrak{F}_{s-} = \sigma(\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_{s-1/n}) \, .$$

Aus dem Lévyschen Martingalsatz [vgl. W.th.II Korollar 4.11] folgt:

$$\lim_n E[\, M_t \,|\, \mathfrak{F}_{s-1/n} \,] = E[\, M_t \,|\, \mathfrak{F}_{s-} \,] \quad \text{f.s. .} \; □$$

§ 10 Stieltjes–Integrale.

Definition 1. Für eine relle Funktion a auf $[0,\infty)$ ist die **Totalvariation** von a auf $(s,t]$:

$$ {}_s\int^t |da| := \sup \{ \sum_{i=1}^n |a(s_i) - a(s_{i-1})| \; ; \; s = s_0 < s_1 < ... < s_n = t, \, n \in \mathbb{N} \} ; $$

${}_t\int^t |da| := 0$. Ist ${}_0\int^t |da| < \infty \;\; \forall \, t \geq 0$, so heißt a **von lokal beschränkter Variation**.

10.1 Lemma. Seien a,b reelle Funktionen auf $[0,\infty)$ und $v(t) := {}_0\int^t |da|$ .Dann gilt:

(a) $v(t) = v(s) + {}_s\int^t |da| \geq v(s) + |(a(t) - a(s)|$, $\forall \, 0 \leq s \leq t$;

(b) v ist isoton;

(c) $v \pm a$ ist isoton.

(d) ${}_0\int^t |d(\gamma_1 a + \gamma_2 b)| \leq |\gamma_1| \cdot {}_0\int^t |da| + |\gamma_2| \cdot {}_0\int^t |db|$ für $\gamma_i \in \mathbb{R}$.

(e) Ist a monoton mit a(0), so folgt: $v \leq |a|$.

(f) Ist a rechtsstetig [bzw, stetig] und v endlich, so ist auch v rechtsstetig [bzw. stetig].

Beweis: (a) ergibt sich, indem man jede Zerlegung von $[0,t]$ durch den Punkt s verfeinert; (d) und (e) sind klar; (b) und (c) folgen aus (a).

f) Sei o.E. a(0) = 0; sonst betrachte a(t) – a(0). Setze für ein $s \geq 0$: $\varepsilon := v(s+0) - v(s)$.

Nach c) sind $v \pm a$ isotone Funktionen mit $(v \pm a)(s+0) - (v \pm a)(s) = \varepsilon$. Also sind auch

$$ w_{\pm} := v \pm a - \varepsilon \cdot 1_{(s,\infty)} $$

isoton. Nun ist $a = \frac{1}{2}(w_+ - w_-)$ und somit nach d) $v \leq \frac{1}{2}(w_+ + w_-) = v - \varepsilon \cdot 1_{[s,\infty)}$.

Also muß $\varepsilon = 0$ gelten. Ist a linksstetig, so zeigt man ebens die Linksstetigkeit von v. □

10.2 Folgerung. Sei a eine rechtsstetige Funktion von lokal beschränkter Variation,

$v(t) := {}_0\int^t |da|$. Dann gilt:

(10.3) $$ a = a(0) + v - w \;, $$

wobei v und $w := v - a + a(0)$ maßdefinierende Funktionen auf $[0,\infty)$ sind [, die durch $v(t) = v(t^+)$, $w(t) = w(t^+)$ auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden können].

Definition 2. Sei a eine rechtsstetige Funktion von lokal beschränkter Variation.

Die Darstellung (10.3) heißt **kanonische Zerlegung** von a.

Sind μ_v, μ_w die zu v und w gehörenden Maße, so definiert man: $\int f \, |da| := \int f \, d\mu_v$.

Eine mb Funktion $f : [0,\infty) \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ mit $\int |f| \, |da| < \infty$ heißt **Stieljes–intb.** bzgl. a und

${}_B\int f \, da := {}_B\int f \, d\mu_v - {}_B\int f \, d\mu_w$ heißt dann **Stieljes–Integral** bzgl. a über $B \in \mathfrak{B}$.

Wir schreiben ${}_B\int f \, da =: {}_B\int f(t) \, da(t)$ und ${}_s\int^t f \, da := {}_{(s,t]}\int f \, da$.

10.4 Lemma. In der Situation von Definition 2 gilt:

(a) $\left|\int f\,da\right| \le \int |f|\;|da|$.

(b) Sei $a = a_+ - a_-$ mit maßdefinierenden Funktionen $a_\pm$ und $\int |f|\,da_\pm < \infty$. Dann gilt: $\int f\,da = \int f\,da_+ - \int f\,da_-$.

Beweis: a) Auch $\tilde{w} := v + a - a(0)$ ist eine maßdef. Funktion mit zugehörigem Maß $\mu_{\tilde{w}}$.

Es gilt: $w + \tilde{w} = 2v$. Nach dem Maßeindeutigkeitssatz folgt: $\mu_w + \mu_{\tilde{w}} = 2\cdot\mu_v$ und somit

$$\int |f|\,d\mu_w \le \int |f|\,d\mu_w + \int |f|\,d\mu_{\tilde{w}} = 2\cdot\int |f|\;|da| .$$

Jetzt folgt die Beh. unmittelbar.

b) Aus 10.1a,e folgt für $0\le s\le t$: $v(t) \le v(s) + a_+(t) - a_+(s) + a_-(t) - a_-(s)$.

Also ist $m := a_+ + a_- - v$ eine maßdefinierende Funktion und es ergibt sich:

$$\int |f|\,dv \le \int |f|\,dv + \int |f|\,dm = \int |f|\,da_+ + \int |f|\,da_- < \infty .$$

Aus $a(0) + v + a_- = w + a_+$ folgt die Beh. .[]

Eine rechtsstetige Funktion a von lokal beschränkter Variation hat als Differenz von isotonen Funktionen linksseitige Limites $a(t-0) \in \mathbb{R}$ und nur abzählbar viele Sprungstellen $s_i > 0$ in $[0,t]$. Wir schreiben

(10.5) $\Delta a(s) := a(s) - a(s-)$ und $\sum_{0<s\le t} \Delta a(s) := \sum_1 \Delta a(s_i)$.

10.6 Produktformel. Seien a und b rechtsstetige Funktionen von lokal beschränkter Variation. Dann gilt:

$$a(t)b(t) = a(0)b(0) + {}_0\int^t a(s)\,db(s) + {}_0\int^t b(s-)\,da(s)$$
$$= a(0)b(0) + {}_0\int^t a(s-)\,db(s) + {}_0\int^t b(s-)\,da(s) + \sum_{0<s\le t} \Delta a(s)\cdot\Delta b(s).$$

Beweis: Die Ausdrücke sind linear in a und b. Deshalb kann man o.E. annehmen, daß a und b isoton sind. Dann folgt die erste Gleichung mit Fubini [vgl. Hinderer 20.9]. Es ist a(s–) als isotone Funktion mb. Sind $s_i > 0$ die abzählbar vielen Sprungstellen von a in $[0,t]$, so folgt:

${}_0\int^t a(s)\,db(s) = {}_0\int^t \Delta a(s)\,db(s) + {}_0\int^t a(s-)\,db(s)$ und

${}_0\int^t \Delta a(s)\,db(s) = \sum_1 \Delta a(s_i)\,\mu_b[\{s_i\}] = \sum_1 \Delta a(s_i)\cdot\Delta b(s_i)$. []

10.7 Exponentialformel. Sei $0 < s_1 \le s_2 \le s_3 \le ... \le \infty$ mit $s_i \to \infty$, $f,g : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ und

$$_0\int^t |g(s)|\ ds < \infty,\ a(t) := \sum_{i,s_i \le t} f(s_i) + {}_0\int^t g(s)\ ds\ ,$$

(10.8) $$x(t) := \Pi_{i,s_i \le t}\,(1 + f(s_i)) \cdot \exp\{{}_0\int^t g(s)\ ds\}.$$

Dann ist x Lösung von

(10.9) $$x(t) = 1 + {}_0\int^t x(s-) \cdot f(s)\ da(s) = 1 + \sum_{i,s_i \le t} x(s_i-) \cdot f(s_i) + {}_0\int^t x(s-) \cdot g(s)\ ds.$$

Beweis: Die Indexmenge $\{i;\ s_i \le t\}$ ist endlich wegen $s_i \to \infty$.

Definiert man $a_\pm$ wie a, indem man f und g durch $f^\pm$ und $g^\pm$ ersetzt, so hat man:
$a = a_+ - a_-$ und $a_\pm$ sind maßdefinierende Funktionen. Aus 10.4b erhält man

$$_0\int^t h(s)\ da(s) = {}_0\int^t h(s)\ da_+(s) - {}_0\int^t h(s)\ da_-(s)$$

unter der Voraussetzung: $_0\int^t |h(s)|\ da_+(s) + {}_0\int^t |h(s)|\ da_-(s) < \infty$.
Damit folgt leicht die zweite Gleichung in (10.9). Es gilt $x = F \cdot G$ mit:

$$F(t) := \Pi_{i,s_i \le t}\,(1 + f(s_i)) \text{ und } G(t) := \exp\{{}_0\int^t g(s)\ ds\}\ .$$

F ist eine reelle rechtsstetige Treppenfunktion. Für G gilt:

$$G(t) = {}_0\int^t g(s) \cdot G(s)\ ds.$$

Dies folgt etwa aus 6.13 und der Produktformel. G ist also absolut stetig und von lokal beschränkter Variation wegen $|G(t) - G(s)| \le {}_s\int^t |g(s)| \cdot G(s)\ ds$.
Im Fall, daß x = G absolut stetig ist, ist also die Exponentialformel bekannt.
Aus der Produktformel 10.6 ergibt sich:

$$\begin{aligned} x(t) = F(t)G(t) &= 1 + {}_0\int^t G(s)\ dF(s) + {}_0\int^t F(s-)\ dG(s) \\ &= 1 + \sum_{i,s_i \le t} G(s_i) \cdot \Delta F(s_i) + {}_0\int^t F(s-)\ g(s) \cdot G(s)\ ds \\ &= 1 + \sum_{i,s_i \le t} G(s_i) \cdot F(s_i-) \cdot f(s_i) + {}_0\int^t F(s-)\ g(s) \cdot G(s)\ ds \\ &= 1 + \sum_{i,s_i \le t} x(s_i-) \cdot f(s_i) + {}_0\int^t x(s-) \cdot g(s)\ ds. \end{aligned}$$

Dabei kann für $dG(s) = G(s)\ ds$ wieder 10.4 benutzt werden. □

§ 11 Quadrat–integrierbare Martingale und das stochastische Integral.

Es liege die allgemeine Situation von §9 vor. In Hinblick auf 9.11 kann und soll o.E. $\mathbb{F} = \mathbb{F}_+$ angenommen werden. Martingale und Stoppzeiten sind immer solche bezüglich $\mathbb{F}_+$.

Definition 1. Wir schreiben $A \in \mathfrak{V}$, wenn $A = (A_t, t\geq 0)$ ein $\mathbb{F}$–adaptierter Prozeß auf $(\Omega,\mathfrak{F})$ ist mit rechtsstetigen Pfaden von lokal beschränkter Variation und $A_0 = 0$.

11.1 Lemma. Für $A \in \mathfrak{V}$ ist $(\int_0^t |dA|\ , t\geq 0)$ ein $\mathbb{F}$–adaptierter Prozeß mit rechtsstetigen isotonen Pfaden.

Beweis: Bei rechtsstetigen Pfaden gilt:

$\int_0^t |dA| := \sup \{\sum_{i=1}^n |A_{s_i} - A_{s_{i-1}}| \ ; 0 = s_0 < s_1 < ... < s_n = t,\ s_k \in \mathbb{Q} \text{ für } 1\leq k<n,\ n\in\mathbb{N}\}$.

Nun ist $\cup_n \mathbb{Q}^n$ abzb, also ist $\int_0^t |dA|$ $\mathfrak{F}_t$–mb. Der Rest folgt aus 10.1. $[]$

11.2 Satz. Jedes lokale Martingal $X \in \mathfrak{V}$, dessen Pfade f.a. stetig sind, ist nicht unterscheidbar vom Nullprozeß N mit $N_t \equiv 0$.

Beweis: Wähle $\Omega' \in \mathfrak{F}$ mit $P[\Omega'] = 1$, sodaß der Pfad $X_\cdot(\omega)$ stetig ist $\forall\ \omega \in \Omega'$. Setze

$$\sigma_n := \inf \{ t\geq 0;\ \int_0^t |dX| > n\} , n \in \mathbb{N}.$$

Die σ_n sind nach 1.8a und 11.1 $\mathbb{F}_+$–Stoppzeiten. Nach 9.16 ist $X^n := (X_{t\wedge\sigma_n}, t\geq 0)$ ein lokales Mart. Für $\omega \in \Omega'$ hat man $|X_t^n(\omega)| \leq n$ und $\int_0^\cdot |dX^n| \leq n$ für $t\geq 0$. Somit ist X^n sogar ein Mart nach 9.18. Sei für festes $t \geq 0$ sei

$\Pi := \{0 = s_0 < s_1 < ... < s_m = t\}$ eine Zerlegung von $[0,t]$ und $\Pi := \max_i |s_i - s_{i-1}|$.

Mit $\xi(\Pi) := \sum_{i=1}^m X^n_{s_i} \cdot (X^n_{s_i} - X^n_{s_{i-1}})$ und $\xi_(\Pi) := \sum_{i=1}^m X^n_{s_{i-1}} \cdot (X^n_{s_i} - X^n_{s_{i-1}})$ gilt:

$(X^n_t)^2 = \sum_{i=1}^m [(X_{s_i})^2 - (X_{s_{i-1}})^2] = \xi(\Pi) + \xi_(\Pi)$ mit

$E[\xi_(\Pi)] = E[\sum_{i=1}^m X^n_{s_{i-1}} \cdot E[X^n_{s_i} - X^n_{s_{i-1}} | \mathfrak{F}_{s_{i-1}}]\ ] = 0$.

So folgt: $E[\xi(\Pi)] = E[\xi(\Pi) - \xi_(\Pi)] = E[\sum_{i=1}^m |X^n_{s_i} - X^n_{s_{i-1}}|^2]$

$$\leq E[\max_i |X^n_{s_i} - X^n_{s_{i-1}}| \cdot \int_0^t |dX^n|\ ] \leq n \cdot E[\max_i |X^n_{s_i} - X^n_{s_{i-1}}|\ ] .$$

Auf Ω' gilt für $\|\Pi\| \to 0$: $\max_i |X^n_{s_i} - X^n_{s_{i-1}}| \to 0$ und somit $E[\max_i |X^n_{s_i} - X^n_{s_{i-1}}|\ ] \to 0$ wegen majorisierter Konvergenz. Insgesamt muß also $E[(X^n_t)^2] = 0$ gelten. Nach 1.1 folgt :

$X_t^n = X_{t\wedge\sigma_n} = 0$, $t\geq 0$, f.s. . Auf Grund von $\sigma_n \uparrow \infty$ f.s., folgt schließlich: $X_t = 0$, $t\geq 0$, f.s. . $\square$

Definition 2. Ein Mart X heißt **quadrat–intb.**, falls gilt: $E[X_t^2] < \infty \quad \forall\, t \geq 0$. Hat ein Mart X rechtsstetige Pfade und gilt: $X_0 = 0$ f.s. und $E[|X_t|^p] < \infty \ \forall\, t \geq 0$ für ein $p \geq 1$, so schreiben wir $X \in \mathcal{M}^p$.

Man sieht leicht, daß $\mathcal{M}^p$ ein Vektorraum. Der Start in 0 ist keine Einschränkung, denn offenbar ist X genau ein Mart, wenn $X - X_0$ ein Mart und X_0 intb. ist. Bei p=1 ist die Integrierbarkeitsbedingung für Martingale natürlich immer erfüllt.

11.3 Lemma. Sei ein quadrat–intb. Mart, dann gilt:

(a) $X^2 = (X_t^2, t \geq 0)$ ist ein Submart:

(b) $E[(X_v - X_u)\cdot(X_t - X_s)\,|\,\mathfrak{F}_r] = 0$ f.s. $\forall\, 0 \leq s \leq t \leq u \leq v,\ r \leq u$;

(c) $E[(X_v - X_t)^2 + (X_t - X_s)^2\,|\,\mathfrak{F}_r] = E[(X_v - X_s)^2\,|\,\mathfrak{F}_r]$ f.s. $\forall\, 0 \leq s \leq t \leq v,\ r \leq t$.

Ein quadrat–intb. Mart hat also bedingt unkorrelierte Zuwächse; und somit ist die bedingte Varianz der Summe gleich der Summe der bedingten Varianzen.
Der **Beweis** von (a) folgt aus 9.7; derjenige von (b) und (c) ist eine Übung. []

Definition 2. Ein Prozeß $A \in \mathfrak{V}$ heißt **wachsend**, falls f.a. Pfade isoton sind und $E[A_t] < \infty$ $\forall\, t \geq 0$ gilt. Existiert zu $X \in \mathcal{M}^2$ ein wachsender Prozeß A, derart daß fast alle Pfade von A stetig sind und $X^2 - A$ ein Mart ist, so heißt $A =: \langle X \rangle$ **Varianzenprozeß** zu X.

Die Existenz eines Varianzenprozesses folgt aus der sog. **Doob–Meyer–Zerlegung.** Diese wird hier nicht benötigt. Vielmehr kann der Varianzenprozeß in den hier behandelten Fällen direkt angegeben werden.

11.4 Korollar (Eindeutigkeit des Varianzenprozesses). Ist $X \in \mathcal{M}^2$ mit Varianzenprozessen A und A', so sind A und A' nicht unterscheidbar.

Beweis. $A' - A$ ist als Differenz der Martingale $X^2 - A$ und $X^2 - A'$ ein Mart. Die Pfade von $A' - A$ sind wieder von lokal beschränkter Variation. Gemäß 11.2 ist also $A' - A$ nicht unterscheidbar vom Nullprozeß. []

11.5 Beispiel. Nach Beispiel 9.1 gilt für eine **1–dim. standard BB W**:

$\langle W \rangle_t = t$.

In Hinblick auf 11.2 wird deutlich, daß zumindest auf einer Menge von positiven Maß die Pfade von W nicht von lokal beschränkter Variation sein können. Man kann sogar zeigen, daß dies f.s. der Fall ist.

Aus Beispiel 9.2 folgt für einen **kompensierten Poisson–Prozeß M** mit Intensität λ:

$$<M>_t = \lambda \cdot t. \ [\,]$$

Das folgende Lemma rechtfertig den Namen Varianzenprozeß.

11.6 Lemma. Sei $X \in \mathcal{M}^2$ mit Varianzenprozeß $<X>$.

(a) Sind $\rho \le \sigma \le \tau$ beschränkte Stoppzeiten, so gilt:

$$E\left[(X_\tau - X_\sigma)^2 \,|\, \mathfrak{F}_\rho\right] = E\left[X_\tau^2 - X_\sigma^2 \,|\, \mathfrak{F}_\rho\right] = E\left[<X>_\tau - <X>_\sigma \,|\, \mathfrak{F}_\rho\right] \text{ f.s. .}$$

(b) Ist τ Stoppzeit, dann ist $(X_{t\wedge\tau},\, t\ge 0) \in \mathcal{M}^2$ mit dem Varianzenprozeß $(<X>_{t\wedge\tau},\, t\ge 0)$ und es gilt: $\mathrm{Var}\left[X_{t\wedge\tau}\right] = E\left[X^2_{t\wedge\tau}\right] = E\left[<X>_{t\wedge\tau}\right]$.

Der **Beweis** ist eine Übungsaufgabe.

Definition 3. Sei H ein reeller progressiver Prozeß und $A \in \mathfrak{V}$. Dann sei im Falle der Existenz

$$({}_0\!\int^t H\, dA)(\omega) := {}_0\!\int^t H_s(\omega)\, dA_s(\omega) \quad \text{als Stieltjes–Integral definiert.}$$

X heißt eine **Version von ${}_0\!\int^\cdot$ H dA**, wenn X ein reeller, rechtsstetiger, $\mathbb{F}$–adaptierter Prozeß ist und wenn fast alle Pfade von X als Stieltjes–Integral $X_\cdot = {}_0\!\int^\cdot H\, dA$ erklärt sind.

Ein Pfade $H_\cdot(\omega)$ heißt **lokal beschränkt**, wenn $\sup_{0\le s\le t} |H_s(\omega)| < \infty \ \forall\, t\ge 0$ gilt.

11.7 Lemma. Sei H ein reeller progressiver Prozeß und $A \in \mathfrak{V}$. Dann gilt:

(a) ${}_0\!\int^t |H|\ |dA|$ ist $\mathfrak{F}_t$–mb $\forall\, t\ge 0$.

(b) ${}_0\!\int^t H\, dA$ ist $\mathfrak{F}_t$–mb, falls ${}_0\!\int^t |H|\ |dA| < \infty$ auf Ω, also insbesondere falls alle Pfade von H lokal beschränkt sind..

(c) $\mu(\Gamma) := E\left[{}_0\!\int^\infty \mathbf{1}_\Gamma(s,\cdot)\, |dA_s|\,\right]$ ist ein σ–endliches Maß auf $(0,\infty)\times\Omega$, falls $E\left[{}_0\!\int^t |dA_s|\,\right] < \infty \ \forall\, t\ge 0$.

Der **Beweis** ist eine Übungsaufgabe.

Ist $M \in \mathcal{M}^2$ mit Varianzenprozeß $<M>$, so wird in Hinblick auf 11.7 auf folgende Weise ein L^2–Raum definiert:

$$\mathcal{L}_t^2 := \{\, H\,;\ \|H\|_t^2 := E\left[{}_0\!\int^t H^2\, d<M>\right] < \infty \,\}\,;$$

wir werden mehrere Male die zugehörige Dreiecksgleichung benutzen.

11.8 Proposition. Sei H ein reeller progressiver Prozeß und $A \in \mathfrak{V}$ mit

$$ {}_0\int^t |H|\ |dA| < \infty \text{ f.s. } \forall\, t \geq 0. $$

Dann existiert eine Version X von ${}_0\int^{\cdot} H\, dA$. Dies gilt insbesondere, falls fast alle Pfade von H lokal beschränkt sind.

Beweis. Sei $\Omega_0 := \cap_{N\in\mathbb{N}} \{ {}_0\int^N |H|\ |dA| < \infty \}$; dann gilt nach Vorauss. $P[\Omega_0] = 1$.

Auf Ω_0 ist ${}_0\int^t H\, dA$ $\forall\, t \geq 0$ erklärt.

Die Schwierigkeit besteht darin, daß i.a. nicht $\Omega_0 \in \mathfrak{F}_{t+}$ $\forall\, t \geq 0$ gilt. Sonst könnte man ${}_0\int^{\cdot} H\, dA$ auf Ω_0 etwa = 0 setzen. Dann ist aber die Adaptiertheit verletzt. Eine Möglichkeit besteht nun darin, daß man alle P–Nullmengen von $\mathfrak{F}$ mit zu $\mathfrak{F}_t$ hinzunimmt $\forall\, t \geq 0$.

Hier soll eine andere Möglichkeit gewählt werden ohne Erweiterung von $\mathfrak{F}_t$. Setze

$X_t^n := {}_0\int^t H^n\, dA$ mit $H_s^n := H_s^+ \wedge n - H_s^- \wedge n$. Dann gilt:

${}_0\int^t |H - H^n|\ |dA_s| \to 0$ $(n\theta\infty)$ $\forall\, t \geq 0$ auf Ω_0 wegen majorisierter Konvergenz. Setze

$$ \tau := \sup \{ t \geq 0;\ \lim {}_0\int^t |H - H^n|\ |dA| = 0 \} . $$

Dann ist τ $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit wegen:

$$ \{\tau < t\} = \cup_{r<t,\, r\in\mathbb{Q}} \{ \overline{\lim}\, {}_0\int^r |H - H^n|\ |dA| > 0 \} \in \mathfrak{F}_t $$

gemäß 11.7a, und man hat $\tau = \infty$ auf Ω_0. Auf $\{\tau > t\}$ gilt überdies:

$$ {}_0\int^t |H|\ |dA| \leq {}_0\int^t |H^n|\ |dA| + {}_0\int^t |H - H^n|\ |dA| < \infty \text{ und} $$

(*) $$ \sup_{0\leq u\leq t+\varepsilon} \left| {}_0\int^u H\, dA - X_u^n \right| \leq {}_0\int^{t+\varepsilon} |H - H^n|\ |dA| \to 0 \text{ für } \varepsilon := \tfrac{1}{2}(\tau - t). $$

X^n ist rechtsstetig und nach 11.7b adptiert. Setzt man nun

$$ X_t := \lim_n X_t^n = {}_0\int^t H\, dA \text{ auf } \{t < \tau\} \quad \text{und} \quad X_t := 0 \text{ auf } \{t \geq \tau\}, $$

so ist X $\mathbb{F}$–adaptiert. Gemäß (*) folgt aus der Rechtsstetigkeit der Pfade von X^n die Rechtsstetigkeit der Pfade von X auf $[0,\tau)$. Ferner gilt auf $\{t \geq \tau\}$: $X_t = 0$.

Also hat X rechtsstetige Pfade; überdies gilt:

$$ X = {}_0\int^{\cdot} H\, dA \quad \text{auf } \Omega_0. $$

Also ist X eine Version von ${}_0\int^{\cdot} H\, dA$. []

Definition 4. Ein Prozeß H heißt **elementar** $:\Leftrightarrow H \in \mathscr{H} :\Leftrightarrow$ es existieren

$0 := s_0 < s_1 < \ldots < s_m < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, und dazu beschränkte $\mathfrak{F}_{s_i}$–mb Zva ξ_{s_i}, $0 \leq i < m$ mit:

$$ H_t(\omega) = \Sigma_{i=1}^m \xi_{s_{i-1}}(\omega) \cdot \mathbf{1}_{(s_{i-1}, s_i]}(t) . $$

Offenbar gilt für $H \in \mathscr{H}$: H ist ein an $\mathbb{F}$ adaptierter Prozeß mit linksstetigen Pfaden, also vorhersagbar nach 5.10, mit $H_0=0$. H ist ferner beschränkt durch $\max_i |\xi_{s_i}|$.

Für $A \in \mathfrak{V}$, $H \in \mathscr{H}$ gilt:

(11.9) $$ {}_0\int^t H\,dA = \sum_{i=1}^m \xi_{s_{i-1}}(\omega)\cdot(A_{s_i} - A_{s_{i-1}}) + \xi_{s(t)}\cdot(A_t - A_{s(t)}) $$
$$ = \sum_{i=1}^m \xi_{s_{i-1}}(\omega)\cdot(A_{s_i\wedge t} - A_{s_{i-1}\wedge t}) \qquad \text{mit } s(t) := \max\{s_i;\, s_i \le t\}. $$

Ist A = M ein Mart, so entspricht ${}_0\int^t H\,dA$ einem durch $(\xi_{s_i}, i<m)$ kontrollierten Mart [vgl. W.th. II §4]. Wie dort ergibt sich, daß ${}_0\int^t H\,dM$ ein Mart ist. Es gilt ferner:

11.10 Proposition. Sei $M \in \mathfrak{V} \cap \mathscr{M}^1$, $H \in \mathscr{H}$ und $X_t = {}_0\int^t H\,dM$, $t\ge 0$. Dann gilt:

(0) $\mathscr{H}$ ist ein Vektorraum.

(a) $X \in \mathscr{M}^1$.

(b) Ist sogar $M \in \mathscr{M}^2$ mit Varianzenprozeß $\langle M\rangle$, so ist $X \in \mathscr{M}^2$ mit Varianzenprozeß $\langle X\rangle_t = {}_0\int^t H^2\,d\langle M\rangle$, insbesondere gilt: $E[X_t^2] = E[{}_0\int^t H^2\,d\langle M\rangle]$.

Der **Beweis** ist eine Übung.

11.11 Lemma Gegeben seien reelle progressive Prozesse $M \in \mathfrak{V}$, H^n, $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ mit $|H^n| \le n$, $\lim_n H_t^n = H_t^\infty$, ${}_0\int^t \sup_n|H_n|\;|dM| < \infty$ f.s. , $X_t^n := {}_0\int^t H^n\,dM$, $t\ge 0$. Sei $\Omega_0 := \cap_N \{ {}_0\int^N \sup_n|H_n|\;|dM| < \infty \}$. Dann gilt $P[\Omega_0] = 1$, $X_t^n \to {}_0\int^t H^\infty\,dM$, $t \ge 0$, auf Ω_0, und es existiert eine Version von ${}_0\int^\cdot H^\infty\,dM$.

Beweis: $P[\Omega_0] = 1$ ist klar. Wegen majorisierter Konvergenz gilt: $X_t^n \to {}_0\int^t H^\infty\,dM$ auf Ω_0. Eine Version von ${}_0\int^\cdot H^\infty\,dM$ existiert nach 11.8. []

11.12 Proposition Es liege die Situation von 11.11 vor mit $H^n \in \mathscr{H}$, $n\in\mathbb{N}$.

(a) (**L^1–Version**) Gilt $M \in \mathscr{M}^1$ und $E[{}_0\int^t |H^n - H^\infty|\;|dM|\,] \to 0$ $(n\to\infty)$ $\forall\, t\ge 0$, so ist jede Version X von ${}_0\int^\cdot H^\infty\,dM$ ein Martingal.

(b) (**L^2–Version**) Ist $M \in \mathscr{M}^2$ mit Varianzenprozeß $\langle M\rangle$ und $E[{}_0\int^t \{H^n - H^\infty\}^2\,d\langle M\rangle] \to 0$ $(n\to\infty)$ $\forall\, t\ge 0$, so gilt für jede Version X von ${}_0\int^\cdot H^\infty\,dM$: es ist $X \in \mathscr{M}^2$ mit Varianzenprozeß ${}_0\int^\cdot \{H^\infty\}^2\,d\langle M\rangle$.

Beweis:. a) Nach 11.10 ist X^n Mart. Aus der Vorauss. folgt mit 10.4: $E[\,|X_t^n - X_t|\,] \to 0$. Aus der L^1–Dreiecksungleichung folgt: $E[\,|X_t|\,] < \infty$ und für s<t, $A \in \mathfrak{F}_s$:

$$\int_A X_t\, dP = \lim \int_A X_t^n\, dP = \lim \int_A X_s^n\, dP = \int_A X_s\, dP\,.$$

b) Aus der L^2–Dreiecksungleichung folgt: $E[\int_0^t \{H^\infty\}^2 d<M>] < \infty$. Nach 11.10 sind X^n und $X^n - X^m \in \mathcal{M}^2$ mit Varianzenprozessen $\int_0^\cdot \{H^n\}^2\, d<M>$ bzw. $\int_0^t \{H^n - H^m\}^2\, d<M>$. Es folgt wieder mit der L^2–Dreiecksungleichung:

$E[\{X_t^n - X_t^m\}^2] = E[\int_0^t \{H^n - H^m\}^2\, d<M>] \to 0$ für $n,m \to \infty$

Mit Fatou ergibt sich nun:

(*) $E[\{X_t^n - X_t\}^2] = E[\lim_m \{X_t^n - X_t^m\}^2] \le \lim_m E[\{X_t^n - X_t^m\}^2] \to 0$ für $n \to \infty$.

Also ist X quadrat–intb. . Da die L^2–Konvergenz die L^1–Konvergenz nach sich zieht, ist nach a) X ein Martingal und somit in $\mathcal{M}^2$.

Wähle Ω_1 mit $P[\Omega_1] = 1$, sodaß <M> stetige, isotone Pfade auf Ω_1 hat, und setze

$\Omega_2 := \Omega_1 \cap \cap_N \{ \int_0^N \{H^\infty\}^2\, d<M> < \infty\}$. Dann gilt: $P[\Omega_2] = 1$ und $\int_0^\cdot \{H^\infty\}^2\, d<M>$ hat stetige, isotone Pfade auf Ω_2. Wähle nun eine Version A von $\int_0^\cdot \{H^\infty\}^2\, d<M>$ nach 11.8. Wegen $E[X_t^2 - X_s^2 | \mathfrak{F}_s] = E[\{X_t - X_s\}^2 | \mathfrak{F}_s]$ nach 11.3 ist X^2–A genau dann ein Mart, wenn gilt:

(11.13) $$\int_B \{X_t - X_s\}^2\, dP = \int_B \int_s^t \{H^\infty\}^2\, d<M>\, dP \quad \forall\, s<t,\ B \in \mathfrak{F}_s.$$

Nun gilt (11.13) für X^n anstelle von X. Wegen der L^2–Dreiecksungleichung folgt also mit (*) und der Voraussetzung: $\int_B \{X_t - X_s\}^2\, dP = \int_B \{X_t^n - X_s^n\}^2\, dP + o(1)$

$= \int_B \int_s^t \{H^n\}^2\, d<M>\, dP + o(1) = \int_B \int_s^t \{H^\infty\}^2\, d<M>\, dP + o(1) + o(1).$ []

Sei wieder $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$ die σ–Algebra der vorhersagbaren Mengen.

11.14 Satz. Sei $M \in \mathfrak{V}$ und H ein reeller vorhersagbarer Prozeß mit $\int_0^t |H|\, |dM| < \infty$ f.s. $\forall t$.

(a) **(L_1–Version)** Ist $M \in \mathcal{M}^1$ und $E[\int_0^t (1 + |H|)\, |dM|\,] < \infty$ $\forall\, t \ge 0$, so gilt für jede Version X von $\int_0^\cdot H\, dM$: $X \in \mathcal{M}^1$.

(b) **(L_2–Version)** Ist $M \in \mathcal{M}^2$ mit Varianzenprozeß <M> und $E[\int_0^t H^2\, d<M>\,] < \infty$ $\forall\, t \ge 0$, so gilt für jede Version X von $\int_0^\cdot H\, dM$:

$X \in \mathcal{M}^2$ und jede Version von $\int_0^\cdot H^2\, d<M>$ ist Varianzenprozeß von X.

Es gilt die **fundamentale Isometrie**: $E[\,\{\int_0^t H\, dM\}^2\,] = E[\int_0^t H^2\, d<M>\,]$.

Beweis. Es soll nur (b) gezeigt werden; der Beweis von (a) geht analog. Wir benutzen wieder die L^2–Norm:

$$\|H\|_t := \{E[\,{}_0\int^t H^2\, d<M>\,]\}^{\frac{1}{2}}\text{ , wenn H }\mathfrak{P}(\mathbb{F})\text{–mb auf }(0,\infty)\times\Omega\text{ ist.}$$

Gemäß 11.12 ist z.z., daß eine Folge $(H^n) \subset \mathscr{H}$ existiert mit $\|H^n - H\|_t \to 0\ \forall\ t$.

Sei $V_t := \{\ H\text{: H ist }\mathfrak{P}(\mathbb{F})\text{–mb}, \|H\|_t < \infty\ , \exists\ (H^n) \subset \mathscr{H} \text{ mit } \|H^n - H\|_t \to 0\ \}$.
Offenbar gilt wegen der Dreiecksungleichung für $\|...\|_t$ und 8.3(0):

(*) $\mathscr{H} \subset V_t$, V_t ist ein Vektorraum.

Wir wollen noch zeigen:

(**) Aus "$H \geq 0, \|H\|_t < \infty, \exists\ (H^n) \subset V_t$ mit $H^n \uparrow H$ " folgt: $H \in V_t$.

Wegen majorisierter Konvergenz existiert nämlich zu $\varepsilon>0$ ein $N\in\mathbb{N}$ mit $\|H - H^N\|_t < \varepsilon$; zu N wiederum existiert ein $H' \in \mathscr{H}$ mit $\|H^N - H'\|_t < \varepsilon$.
Sei $\mathfrak{C}$ das System der vorhersagbaren Rechtecke $(r,s]\times A$,$0 \leq r \leq s$, $A \in \mathfrak{F}_r$; dann ist $\mathbf{1}_{(r,s]\times A}(u,\cdot) \in \mathscr{H}$. Wegen $(r,s]\times A \cap (r',s']\times A' = (r\vee r', s\wedge s'] \times A\cap A'$ ist $\mathfrak{C}$ $\cap$–stabil.
Sei $\mathfrak{D} := \{\ \Gamma \in \mathfrak{P}(\mathbb{F});\ \mathbf{1}_\Gamma \in V_t\ \}$.
Dann gilt: $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D}$. $\mathfrak{D}$ ist wegen (*) und (**) ein Dynkinsystem.
Mit dem Dynkinargument folgt: $\mathfrak{D}$ ist die σ–Algebra $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$ der vorhersagbaren Mengen.
Nun kann mit Hilfe von (*) und (**) maßtheoretische Induktion angewendet werden, und man erhält $V_t := \{\ H\text{: H ist }\mathfrak{P}(\mathbb{F})\text{–mb}, \|H\|_t < \infty\ \}$. Sei nun $H \in \cap_{N\in\mathbb{N}} V_N$. Daann gilt:

$$\forall\ N\in\mathbb{N}\ \exists\ H^N \in \mathscr{H} \text{ mit } \|H^N - H\|_N < 1/N.$$

Es folgt: $\|H^N - H\|_t < 1/N$ für $N \geq t$; also: $\|H^N - H\|_t \to 0$ $(N\to\infty)$ $\forall\ t\geq 0$. $[\,]$

11.15 Korollar. Sei $M \in \mathfrak{V} \cap \mathscr{M}^2$ mit Varianzenprozeß $<M>$ und H ein reeller vorhersagbarer Prozeß, derart daß fast alle Pfade von H lokal beschränkt sind. Dann ist jede Version X von ${}_0\int^\cdot H\, dM$ ein lokales Mart.

Beweis: Wähle Ω_0 mit $P[\Omega_0] = 1$, sodaß auf Ω_0 alle Pfade von H lokal beschränkt und alle Pfade von $<M>$ stetig und isoton sind. Dann gilt auf Ω_0:

${}_0\int^t |H|\ |dM|\ < \infty$, ${}_0\int^t H^2\, d<M> < \infty\ \ \forall\ t\geq 0$, und die Pfade von ${}_0\int^\cdot H^2\, d<M>$ sind stetig. Also existieren nach 11.8 Versionen von ${}_0\int^\cdot H\, dM$ und ${}_0\int^\cdot H^2\, d<M>$.

Wähle $\Omega_1 \subset \Omega_0$ mit $P[\Omega_1] = 1$, derart daß ${}_0\int^\cdot H^2\, d<M>$ und ${}_0\int^\cdot H\, dM$ auf Ω_1 als Stieljes–Integral definiert sind. Gemäß 1.8 ist

$$\tau_n := n \wedge \inf\{t\geq 0;\ {}_0\int^t H^2\, d<M> \in (0,\infty)\}\ \text{ eine } \mathbb{F}_+\text{–Stoppzeit mit } \tau_n \uparrow \infty \text{ auf } \Omega_1.$$

Es folgt für $H^n := \mathbf{1}_{]0,\tau]} \cdot H$ mit 5.10:

H^n ist vorhersagbar und auf Ω_1 gilt: $\int_0^t \{H^n\}^2 \, d\langle M\rangle = \int_0^{t\wedge\tau_n} H^2 \, d\langle M\rangle \le n$.

Nach 11.14 gilt für jede Version X^n von $\int_0^{\cdot} H^n \, dM$:

(*) $X^n \in \mathcal{M}^2$ und $E[\{X_t^n\}^2] = E[\int_0^t \{H^n\}^2 \, d\langle M\rangle] \le n$.

Ebenso folgt:

$\int_0^t H^n \, dM = \int_0^{t\wedge\tau_n} H \, dM \quad \forall\, t\ge 0$ auf Ω_1 und somit: $X^n = X_{t\wedge\tau_n} \quad \forall\, t\ge 0$ f.s. .

Somit gilt (*) auch für $(X_{t\wedge\tau_n}, t\ge 0)$ anstelle von X^n.

Damit ist X ein lokales Martingal. Die glm. Integrierbarkeit folgt aus der L^2–Beschränktheit [vgl. W.th.II 4.2(4)]. □

Definition 5. Für $M \in \mathfrak{V} \cap \mathcal{M}^2$ wird der Prozeß $[M]$ der **quadratischen Variation** definiert durch

(11.16) $$[M]_t := M_t^2 - 2 \cdot \int_0^t M_{s-} \, dM_s.$$

11.17 Lemma. Für $M \in \mathfrak{V} \cap \mathcal{M}^2$ gilt:

(a) $[M]_t = \sum_{0<s\le t} \{\Delta M_s\}^2$ mit $\Delta M_s = M_s - M_{s-}$, $t\ge 0$;

(b) $M^2 - [M] = 2 \cdot \int_0^{\cdot} M_{s-} \, dM_s$ ist ein Mart.

Beweis: a) Nach der Produktformel 10.6 gilt: $M_t^2 = M_0^2 + 2 \cdot \int_0^t M_{s-} \, dM_s + \sum_{0<s\le t} \{\Delta M_s\}^2$.
b) Wegen $M \in \mathfrak{V}$ existiert $M_{t-} := \lim M_{t-1/n}$ und ist $\mathfrak{F}_t$–mb. Wegen der Linksstetigkeit der Pfade ist $(M_{t-}, t\ge 0)$ vorhersagbar [vgl. 5.10]. Ebenfalls wegen $M \in \mathfrak{V}$ hat M lokal beschränkte Pfade. Nach Korollar 11.15 folgt, daß $\int_0^{\cdot} M_{t-} \, dM$ ein lokales Mart ist. Sei (τ_n) eine Lokalisierungsfolge, also $(M^2_{t\wedge\tau_n} - [M]_{t\wedge\tau_n}, t\ge 0)$ ein Mart.

Nach Doobs Maximal–Ungleichung 9.14bfolgt die Integrierbarkeit von $\sup_{s\le t} M_s^2$.
Nach a) hat $[M]$ isotone Pfade. Wegen monotoner Konvergenz gilt:

$E[[M]_t] = \sup_n E[[M]_{t\wedge\tau_n}] = \sup_n E[M^2_{t\wedge\tau_n}] \le E[M_t^2]$.

Die letzte Ungleichung folgt aus dem Stoppsatz 9.8 für das Submart M^2. Wegen

$|M^2_{t\wedge\tau_n} - [M]_{t\wedge\tau_n}| \le \sup_{s\le t} M_s^2 + [M]_t$ folgt die glm. Integrierbarkeit von

$(M^2_{t\wedge\tau_n} - [M]_{t\wedge\tau_n}, n\in\mathbb{N})$ $\forall t$. Nach 9.18 ist somit $M^2 - [M]$ ein Mart. □

11.18 Korollar. Für $M \in \mathfrak{V} \cap \mathscr{M}^2$ gilt:

(a) $[M] - \langle M \rangle$ ist ein Mart;

(b) $E\left[{}_0\int^\infty H\, d[M]\right] = E\left[{}_0\int^\infty H\, d\langle M\rangle\right]$ für jeden vorsagbaren Prozeß $H \geq 0$.

Beweis. Da sowohl $M^2 - [M]$ als auch $M^2 - \langle M\rangle$ Martingale sind, folgt a) .
Für $H = \xi_s \cdot \mathbf{1}_{(s,t]}$, wobei ξ_s beschränkt und $\mathfrak{F}_s$–mb ist, und $A := [M] - \langle M\rangle$ gilt:
${}_0\int^\infty H\, dA = \xi_s \cdot (A_t - A_s)$ und $E[\xi_s \cdot (A_t - A_s) \,|\, \mathfrak{F}_s] = 0$, also
$E\left[{}_0\int^\infty H\, d[M]\right] = E\left[{}_0\int^\infty H\, d\langle M\rangle\right]$. Somit gilt die Behauptung für $H \in \mathscr{H}$.
Mit einem Dynkin–Argument und maßtheoretischer Induktion folgt jetzt die Behauptung. []

11.19 Beispiel. Sei N ein Poisson–Prozeß mit Intensität λ und das Martingal M der kompensierte Poisson–Prozeß mit $M_t = N_t - \lambda t$ wie in 9.2 und 11.5. Dann gilt offenbar $\Delta M_t = \Delta N_t \in \{0,1\}$ und somit nach 11.17a: $[M] = \sum_{s\leq t} N_s = N_t$. Der Prozeß $[M]$ der quadratischen Variation zum kompensierten Poisson–Prozeß M ist der Poisson–Prozeß N. []

Definition 6. Ein reeller Prozeß X ist ein **spezielles Semi–Martingal**, wenn er die Darstellung

$$X_t = X_0 + M_t + A_t$$

besitzt, wobei M ein Mart und $A \in \mathfrak{V}$ ist, sodaß fast alle Pfade von A stetig sind und A_t intb. $\forall\, t\geq 0$ ist.

11.20 Korollar. Die Darstellung in Definition 6 ist eindeutig bis auf Nichtunterscheidbarkeit.

Der **Beweis** verläuft analog zum Beweis von 11.4.

Ist X ein spezielles Semi–Mart mit der Darstellung von Def. 6, so erlauben M und A die folgende nicht präzise **Interpretation**:

(11.21) $dX_t = dM_t + dA_t$ mit $E[dM_t \,|\, \mathfrak{F}_{t-}] = 0$ und $dA_t = E[dX_t \,|\, \mathfrak{F}_{t-}]$.

Offenbar ist A_{t-} $\mathfrak{F}_{t-}$–mb. Also gilt wegen $A_t = A_{t-}$ f.s.: $E[A_t \,|\, \mathfrak{F}_{t-}] = A_t$, was zu $E[dA_t \,|\, \mathfrak{F}_{t-}] = dA_t$ führt. Nach 9.19 gilt ferner $E[M_t \,|\, \mathfrak{F}_{t-}] = M_{t-}$, also $E[dM_t \,|\, \mathfrak{F}_{t-}] = 0$.

Ist $M \in \mathscr{M}^2$ mit Varianzenprozeß $\langle M\rangle$, so gilt eine **Semi–Martingaldarstellung für M^2**:

$$M^2 = (M^2 - \langle M\rangle) + \langle M\rangle.$$

Es ist nun die folgende Interpretation möglich:

(11.22) $d\langle M\rangle_t = E[d[M]_t \,|\, \mathfrak{F}_{t-}] = E[\{dX_t\}^2 \,|\, \mathfrak{F}_{t-}]$.

Wegen $(M_t - M_{t-})^2 = M_t^2 - M_{t-}^2 - 2[M_t - M_{t-}] \cdot M_{t-}$ könnte man schreiben:

$E[dM^2 \,|\, \mathfrak{F}_{t-}] = E[\{dM_t\}^2 \,|\, \mathfrak{F}_{t-}] = E[\{dX_t - dA_t\}^2 \,|\, \mathfrak{F}_{t-}] = E[\{dX_t\}^2 \,|\, \mathfrak{F}_{t-}] - \{dA_t\}^2$.

Wegen $\{dt\}^2 = 0$ ist $\{dA_t\}^2 = 0$ zu interpretieren, wenn A wie in den hier betrachteten Fällen absolut stetige Pfade hat. Dieser Schluß ist auch zulässig, wenn A allgemeiner stetige Pfade von lokal beschränkter Variation hat.
Nach 11.18a hat man schließlich: $E[d\langle M\rangle_t - d[M]_t \mid \mathfrak{F}_{t-}] = 0$.

11.23 Satz. Sei X ein PDP auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit $T_\infty = \infty$ f.s. und $\mathbb{F}$ wie in §6. Sei ferner Y ein $\mathbb{F}$–vorhersagbarer Prozeß mit Zustandsraum $(D,\mathfrak{D})$ und $f : D\times S \mapsto \mathbb{R}$ eine mb Funktion mit $E[\int_0^t ds \int \lambda Q(X_s; dz)\, |f(Y_s,z)|^p] < \infty$, $p = 1,2$ und

$$M_t := \sum_{k=1}^{N_t} f(Y_{T_k},X_{T_k}) \,] - \int_0^t ds \int \lambda Q(X_s;dz)\, f(Y_s,z) \ , t\geq 0.$$

Dann gilt: $M \in \mathfrak{V} \in \mathscr{M}^2$ mit Varianzenprozeß

$$\langle M\rangle_t = \int_0^t ds \int \lambda Q(X_s; dz)\, f^2(Y_s,z) \ , t\geq 0.$$

Beweis. Es gilt $M \in \mathfrak{V} \in \mathscr{M}^1$ gemäß 9.6.
Ferner gilt offenbar: $\Delta M_t = 0$, falls $\forall\, n\ t \neq T_n$. Also haben wir:

(11.24) $$[M]_t := \sum_{0<s\leq t} \{\Delta M_s\}^2 = \sum_{k=1}^{N_t} f^2(Y_{T_k},X_{T_k}).$$

Nun gilt ebenso mit f^2 anstelle von f nach 9.6:

$[M]_t - \langle M\rangle_t$ ist ein Mart mit $\langle M\rangle_t := \int_0^t \int \lambda Q(X_s;dz)\, f^2(Y_s,z)\, ds$.

Ist M quadrat–intb., so gilt gemäß 11.17:

$M \in \mathscr{M}^2$ und $M^2 - \langle M\rangle = M^2 - [M] - ([M] - \langle M\rangle)$ ist ein Mart .

Also ist dann $\langle M\rangle$ wirklich ein Varianzenprozeß zu M und die Bezeichnung gerechtfertigt.
Es bleibt z.z., daß M quadrat–intb. ist. Sei dazu $F := F_n = f\cdot \mathbf{1}_{\{|f| \leq n\}}$,

$$\tau := \tau_n := T_n \wedge \inf\{t\geq 0;\ \int_0^t ds \int \lambda Q(X_s;dz)\, f(Y_s,z) \ > \ n\}$$

M^n wie M definiert mit F anstelle von f und $M^{n,\tau} := (M^n_{t\wedge\tau},\ t\geq 0)$. Da

$$\sum_{k=1}^{N_t} |f(Y_{T_k},X_{T_k})| + \int_0^t ds \int \lambda Q(X_s;dz)\, |f(s,Y_s,y)| < \infty \quad \text{f.s.}$$

folgt mit majorisierter Konvergenz: $M_t^{n,\tau} \to M_t$ f.s für $n\to\infty$.
Nach Def. von τ gilt: $|M_t^{n,\tau}| \leq n\cdot n + n$, also $M^{n,\tau} \in \mathscr{M}^2$ nach dem Stoppsatz 9.13.
Offenbar gilt: $[M^{n,\tau}]_t \leq [M]_t$ und somit nach 11.17
$E[\{M_t^{n,\tau}\}^2] = E[\,[M^{n,\tau}]_t] \leq E[\,[M]_t\,] < \infty$. Mit Fatou folgt schließlich:
$E[M_t^2] = E[\lim \{M_t^{n,\tau}\}^2] \leq \underline{\lim}\, E[\{M_t^{n,\tau}\}^2] \leq E[\,[M]_t\,]$. []

11.25 Anwendung von 11.23. Sei X und $\mathbb{F}$ wie in 11.23.

Sei ferner $\tilde{f} \in \mathfrak{X}(f)$, sodaß I(f,t,P) und $\tilde{I}(\tilde{f},t,P)$ aus (7.8) erfüllt sind $\forall$ t≥0.

Wir wählen das Mart M wie in 9.3 und $\mathfrak{A}(f)(x) := \tilde{f}(x) + \mathfrak{J}(f)(x)$; dann gilt:

$$M_t := f(X_t) - f(X_0) - {}_0\int^t \mathfrak{A}(f)(X_s)\,ds$$
$$= \sum_{k=1}^{N_t} \left[f(X_{T_k}) - f(X_{T_k-})\right] - {}_0\int^t \mathfrak{J}(f)(X_s)\,ds,\ t\geq 0,$$

Die zweite Gleichung folgt aus (7.7). Also hat f(X) die Semi–Martingal–Darstellung:

(11.26) $$f(X_t) = f(X_0) + M_t + A_t \quad \text{mit} \quad A_t := {}_0\int^t \mathfrak{A}(f)(X_s)\,ds\ ,\ t\geq 0.$$

Auf M läßt sich jetzt 11.23 anwenden mit $Y_t = X_{t-}$ und f(x,z) := f(z) – f(x) unter der Voraussetzung:

I^2(f,t,P) $$E\left[{}_0\int^t \int \lambda Q(X_s;dz)\{f(z) - f(X_s)\}^2\,ds\right] < \infty\ ,t\geq 0.$$

Also hat dann M den Varianzenprozeß:

(11.27) $$\langle M\rangle_t := {}_0\int^t \int \lambda Q(X_s;dz)\{f(z) - f(X_s)\}^2\,ds.$$

Offenbar sind (11.26) und (11.27) in Übereinstimmung mit (11.21) und (11.22). Man erhält die Interpretationen:

$$dA_t = E\left[df(X_t)\,|\,\mathfrak{F}_{t-}\right] = \int \lambda Q(X_{t-};dz)\left[f(z) - f(X_{t-})\right],$$
$$d\langle M\rangle_t = E\left[\{df(X_t)\}^2\,|\,\mathfrak{F}_{t-}\right] = \int \lambda Q(X_{t-};dz)\left[f(z) - f(X_{t-})\right]^2 .\,[\,]$$

§ 12 Maßwechsel bei einem PDP.

Sei X ein PDP auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ wie in § 6 mit $T_\infty = \infty$ f.s. . Seien μ und h mb Funktionen mit:

(12.1) $\mu : S \mapsto [0,\infty)$, $h : S\times S \mapsto [0,\infty)$ mit

$\int_0^t [1+\mu(X_t)] \cdot \lambda(X_t)\, dt < \infty$ P–f.s. $\forall\, t\geq 0$,

$\int Q(x;dz)\, h(x,z) = 1 \quad \forall\, x\in S$.

Wir definieren den Prozeß L durch:

(12.2) $$L_t = \prod_{k=1}^{N_t} \mu(X_{T_k-}) \cdot h(X_{T_k-},X_{T_k}) \cdot \exp\{-\int_0^t \lambda(X_s)\cdot [\mu(X_s)-1]\, ds\},\ t\geq 0.$$

Aus der Exponentialformel folgt auf $\{N_t < \infty\}$:

(12.3) $$L_t = 1 + \sum_{k=1}^{N_t} L_{T_k-} \cdot [\mu(X_{T_k-}) \cdot h(X_{T_k-},X_{T_k}) - 1] - \int_0^t L_s \cdot \lambda(X_s)[\mu(X_s)-1]\, ds\}.$$

Betrachtet man den linksstetigen und somit vorhersagbaren Prozeß $Y_t = (L_{t-},X_{t-})$ und setzt $f(Y_t,X_t) = L_{t-} \cdot [\mu(X_{t-}) \cdot h(X_{t-},X_t) - 1]$, so gilt wegen (12.1):

$\int \lambda Q(X_s,dz)\, f(Y_s,z)\, ds = L_{s-} \cdot \lambda(X_s)[\mu(X_s)-1]$.

L ist in Hinblick auf 9.6 ein Mart unter der Voraussetzung:

(12.4) $$E\left[\int_0^t |L_s| \cdot \lambda(X_s)\cdot [\mu(X_s) + 1]\, ds\right] < \infty \quad \forall\, t\geq 0.$$

12.5 Proposition. (a) Sind λ,μ und h beschränkt, so ist L ein Mart.

(b) Ist L ein Mart und ist τ eine Stoppzeit, sodaß $\{L_{t\wedge\tau},\ t\geq 0\}$ glm intb ist, so existiert eine intb. Zva $L_\tau \geq 0$ mit $L_{t\wedge\tau} = E[L_\tau \mid \mathfrak{F}_t]$, $t\geq 0$.

Beweis: a) Ist α eine Schranke von $\mu \cdot h$ und β eine Schranke von $\lambda \cdot [\mu+1]$, so gilt nach (12.2):

$0 \leq L_t \leq \alpha^{N_t} \cdot e^{\beta \cdot t}$. Nach Lemma 7.4 erhält man in (12.4):

$E\left[\int_0^t |L_s| \cdot \lambda(X_s)\cdot [\mu(X_s) + 1]\, ds\right] \leq \beta \cdot \int_0^t E[\alpha^{N_s} \cdot e^{\beta\cdot s}]\, ds \leq e^{\beta\cdot t} \cdot E[\alpha^{N_t}] < \infty$.

b) Nach dem Stoppsatz 9.13 ist $(L_{n\wedge\tau},\mathfrak{F}_n,\ n\in\mathbb{N})$ ein Martingal und nach Vorauss. glm. intb. Nach dem Martingal– Konvergenzsatz [vgl. W.th. II 4.9,4.10] existiert ein intb. Zva Z mit $L_{n\wedge\tau} \to Z$ f.s. und $L_{n\wedge\tau} = E[Z \mid \mathfrak{F}_n]$. Also gilt $Z\geq 0$ f.s. und die Bezeichnung $Z = L_\tau$ ist gerechtfertigt. Es folgt für $t\leq n$: $L_{t\wedge\tau} = E[L_{n\wedge\tau} \mid \mathfrak{F}_t] = E[E[Z \mid \mathfrak{F}_n] \mid \mathfrak{F}_t] = E[Z \mid \mathfrak{F}_t]$. []

12.6 Lemma. Sei $Z\geq 0$ eine intb. Zva mit $L_0 = E[Z \mid \mathfrak{F}_0]$. Dann wird durch

$dQ = Z\, dP$ ein W–Maß auf $\mathfrak{F}$ definiert.

Beweis: Es gilt: $\int Z\, dP = E[\, E[Z|\mathfrak{F}_0]\,] = E[L_0] = 1.$ []

Wir zeigen nun, daß die Verallgemeinerung der Lévy–Formel 7.16* bei dem Übergang von P zu einem gewissen Maß P* erhalten bleibt, wenn λ und Q durch gewisse λ^* und Q* ersetzt werden.

12.7 Proposition. Sei L ein Mart, $\lambda^* := \mu \cdot \lambda$ und $Q^*(x,dy) := h(x,y) \cdot Q(x;dy)$.
Sei ferner Y ein $\mathbb{F}$–vorhersagbarer Prozeß mit Zustandsraum $(D,\mathfrak{D})$ und
$f : D\times S \mapsto [0,\infty]$ eine mb Funktion.

(a) Ist $T \in (0,\infty)$ ein fester Zeithorizont und $dP^* = L_T\, dP$, so gilt für $t \le T$:

$$E^*\Big[\sum_{k=1}^{N_t} f(Y_{T_k},X_{T_k})\Big] = E^*\Big[\int_0^t ds \int \lambda^* Q^*(X_s,dz)\, f(Y_s,z)\Big].$$

(b) Ist $\{L_{t\wedge T_n},\ t\ge 0\}$ glm intb, L_{T_n} gemäß 12.5b gewählt und $dP^* = L_{T_n}\, dP$, so gilt:

$$E^*\Big[\sum_{k=1}^{N_t\wedge n} f(Y_{T_k},X_{T_k})\Big] = E^*\Big[\int_0^{t\wedge T_n} ds \int \lambda^* Q^*(X_s,dz)\, f(Y_s,z)\Big].$$

Beweis: Es sollen (a) und (b) gleichzeitig behandelt werden. Wir setzen $\tau = T$ sowie $n = \infty$ imd Fall a) und $\tau = T_n$ im Fall b).
Es gilt nun:

(12.8) $$E\Big[L_\tau \cdot \sum_{k=1}^{N_t\wedge n} f(Y_{T_k},X_{T_k})\Big] = E\Big[\sum_{k=1}^{N_t\wedge n} L_{T_k}\cdot f(Y_{T_k},X_{T_k})\Big]$$

(12.9) $$E\Big[L_\tau \cdot \int_0^{t\wedge\tau} ds\, F(Y_s,X_s)\Big] = E\Big[\int_0^{t\wedge\tau} ds\, L_s\, F(Y_s,X_s)\Big]$$
mit $F(y,x) := \int \lambda^* Q^*(x;dz)\, f(y,z)$.

Nach der Vorstufe zu Fubini ist F mb.

Es ist nun $\{T_k \ge t\} = \{T_k\wedge t \ge T_k\} \in \mathfrak{F}_{t\wedge T_k}$ und

$$E[L_\tau|\mathfrak{F}_{t\wedge T_k}] = E[\,E[L_\tau|\mathfrak{F}_t]\ |\mathfrak{F}_{t\wedge T_k}] = E[\,L_{t\wedge\tau}\ |\mathfrak{F}_{t\wedge T_k}] = L_{t\wedge T_k}$$ für $k\le n$ nach dem Stoppsatz 9.8 angewandt auf das Martingal L^τ. Also kann man für den Beweis von (12.8) folgern:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_1^n E\big[L_\tau \cdot \mathbf{1}_{\{T_k\le t\}}\cdot f(Y_{T_k},X_{T_k})\big]\\
&= \textstyle\sum_1^n E\big[L_\tau \cdot \mathbf{1}_{\{T_k\le t\}}\cdot f(Y_{t\wedge T_k},X_{t\wedge T_k})\big]\\
&= \textstyle\sum_1^n E\big[\mathbf{1}_{\{T_k\le t\}}\cdot f(Y_{t\wedge T_k},X_{t\wedge T_k})\, E[L_\tau|\mathfrak{F}_{t\wedge T_k}]\big]\\
&= \textstyle\sum_1^n E\big[\mathbf{1}_{\{T_k\le t\}}\cdot f(Y_{t\wedge T_k},X_{t\wedge T_k})\, L_{t\wedge T_k}\big]\\
&= \textstyle\sum_1^n E\big[\mathbf{1}_{\{T_k\le t\}}\cdot f(Y_{T_k},X_{T_k})\, L_{T_k}\big]
\end{aligned}$$

(12.9) folgt mit 12.5b aus:

$$
\begin{aligned}
&E\big[\,{}_0\textstyle\int^t L_\tau\cdot \mathbf{1}_{\{s\le\tau\}}\cdot F(Y_s,X_s)\,ds\,\big]\\
&\quad={}_0\textstyle\int^t E\big[\,L_\tau\cdot \mathbf{1}_{\{s\le\tau\}}\cdot F(Y_s,X_s)\big]\,ds\\
&\quad={}_0\textstyle\int^t E\big[\,E\big[L_\tau\,|\,\mathfrak{F}_s\big]\cdot \mathbf{1}_{\{s\le\tau\}}\cdot F(Y_s,X_s)\big]\,ds\\
&\quad={}_0\textstyle\int^t E\big[\,L_{s\wedge\tau}\cdot \mathbf{1}_{\{s\le\tau\}}\cdot F(Y_s,X_s)\big]\,ds\\
&\quad=E\big[\,{}_0\textstyle\int^t L_s\cdot \mathbf{1}_{\{s\le\tau\}}\cdot F(Y_s,X_s)\,ds\,\big]\,.
\end{aligned}
$$

Wir zeigen nun, daß die beiden rechten Seiten in (12.8) und (12.9) übereinstimmen.

$$
\begin{aligned}
&E\Big[\,\sum_{k=1}^{N_t\wedge n} L_{T_k}\cdot f(Y_{T_k},X_{T_k})\,\Big]\\
&\quad=E\Big[\,\sum_{k=1}^{N_t}\mathbf{1}_{(0,\tau]}(T_k)\cdot f(Y_{T_k},X_{T_k})\,L_{T_k-}\cdot\mu(X_{T_k-})\cdot h(X_{T_k-},X_{T_k})\Big]\\
&\quad=E\big[\,{}_0\textstyle\int^t ds\,\mathbf{1}_{(0,\tau]}(s)\int\lambda Q(X_s;dz)\,f(Y_s,z)\cdot L_{s-}\cdot\mu(X_{s-})\cdot h(X_{s-},z)\,\big]\quad\text{nach 7.1}\\
&\quad=E\big[\,{}_0\textstyle\int^{t\wedge\tau} ds\,L_s\cdot\mu(X_s)\cdot\int\lambda Q(X_s;dz)\,f(Y_s,z)\cdot h(X_s,z)\,\big]\,.\quad[\,]
\end{aligned}
$$

Wir behandeln jetzt nur den Fall eines endlichen Horizonts.

12.10 Satz. Sei L ein Mart und $T\in(0,\infty)$ ein fester Zeithorizont und $dP^* = L_T\,dP$. Sei ferner $\tilde f\in\mathfrak{X}(f)$, sodaß die Bedingungen I(f,T,P*) und $\tilde I(\tilde f,T,P^*)$ von (7.8) erfüllt sind.

(a) Für $s<t\le T$, $A\in\mathfrak{F}_s$ gilt mit $\mathfrak{A}^*(f)(x) := \tilde f(x) + \int\lambda^* Q^*(x,dz)\,[f(z)-f(x)]$:

$${}_A\textstyle\int\,[f(X_t)-f(X_s)]\,dP^* = {}_A\int{}_s\textstyle\int^t\mathfrak{A}^*(f)(X_u)\,du\,dP^*$$

(b) Unter der Bedingung

(12.11) $\tilde f(x) + \mu(x)\cdot\lambda(x)\cdot\int Q(x,dz)h(x,z)\,[f(z)-f(x)] = 0\,,\ x\in S,$

ist der Prozeß $f(X)$ unter P* ein Martingal.

Beweis: a) Nach 7.7 haben wir auf $\{T_\infty=\infty\}$:

$$f(X_t)-f(X_s) = {}_s\textstyle\int^t\tilde f(X_u)\,du\ +\ \sum_{N_s<k\le N_t}\,[f(X_{T_k})-f(X_{T_k-})]\,.$$

Nun wird durch $Y_t := (\mathbf{1}_A\cdot\mathbf{1}_{(s,\infty)}(t),\,X_{t-})$ ein progressiver Prozeß definiert, also erhält man aus 12.7 durch Aufspaltung von $[...] = [...]^+ - [...]^-$:

$$
\begin{aligned}
&{}_A\textstyle\int\sum_{N_s<k\le N_t}\,[f(X_{T_k})-f(X_{T_k-})]\,dP^* = E^*\Big[\,\sum_{k=1}^{N_t}\mathbf{1}_A\cdot\mathbf{1}_{(s,\infty)}(T_k)\cdot[f(X_{T_k})-f(X_{T_k-})]\,\Big]\\
&\quad=E^*\big[\,\mathbf{1}_A\cdot{}_s\textstyle\int^t du\int\lambda^* Q^*(X_u,dz)\,[f(z)-f(X_u)]\,\big]\,.
\end{aligned}
$$

b) unter (12.9) gilt gerade: $\mathfrak{A}^*(f)(x)=0\quad\forall\,x.\ [\,]$

Im nächsten Lemma geht es zunächst um die Existenz und meßbare Auswahl einer Minimumstelle.

12.12 Auswahllemma. Sei $g : S\times S \mapsto \mathbb{R}$ eine mb Funktion,

$$\Gamma := \left\{ x \in S;\ Q(x;\{g(x,\cdot)>0\}) > 0,\ Q(x;\{g(x,\cdot)<0\}) > 0 \right\},$$

$$\psi(s\,|\,x) := \int Q(x;dy)\,\exp\{s\cdot g(x,y) - g^2(x,y)\}.$$

Dann existiert eine mb Funktion $s^* : \Gamma \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$\psi(s^*(x)\,|\,x) = \psi^*(x) := \min_{s\in\mathbb{R}} \psi(s\,|\,x) \quad \text{für } x \in \Gamma.$$

Beweis: Mit monotoner Konvergenz folgt:

(*) $\lim_{s\to\pm\infty} \psi(s\,|\,x) = \infty \ \ \forall\, x \in \Gamma.$

Für $x\in\Gamma$ hat also $\psi(\cdot\,|\,x)$ als stetige Funktion eine Minimumstelle.

Sei $\mathbb{Q} = \{r_k;\ k\in\mathbb{N}\}$ eine Aufzählung der rationalen Zahlen. Setze

$$\kappa_n(x) := \min\{k\in\mathbb{N};\ \psi(r_k\,|\,x) < \psi^*(x) + \tfrac{1}{n}\},\ \ \rho_n(x) := r_{\kappa_n(x)}.$$

ψ ist nach der Vorstufe von Fubini mb; ψ^* kann auch als Infimum über $\mathbb{Q}$ definiert werden und ist somit ebenfalls mb. Damit folgt sofort die Meßbarkeit von $\kappa_n : \Gamma \mapsto \mathbb{N}$ und $\rho_n : \Gamma \mapsto \mathbb{Q}$. Dann ist auch ρ_n aufgefaßt als $\rho_n : \Gamma \mapsto \mathbb{R}$ mb.

Setze nun $s^* := \underline{\lim}_{n\to\infty} \rho_n$. Wegen (*) gilt $s^*(x) \in \mathbb{R}\ \ \forall\, x\in\Gamma$.

Ferner existiert zu x eine Teilfolge (n_j) mit $s^*(x) := \lim_{j\to\infty} \rho_{n_j}(x)$.

Aus $\psi(\rho_{n_j}\,x)) < \psi^*(x) + \frac{1}{n_j}$ folgt für $j\to\infty$: $\psi(s^*(x)) \le \psi^*(x)$. [ ]

Es soll nun zu gegebenem μ eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz einer Funktion h mit (12.11) gegeben werden.

2.13 Satz. Sei $\tilde f \in \mathfrak{X}(f)$, $g(x,z) := \tilde f(x) + \mu(x)\cdot\lambda(x)\,[f(z)-f(x)]$, $x,y \in S$.

Dann sind die beiden folgenden Eigenschaften äquivalent:

(12.14) " $Q(x;\{g(x,\cdot)>0\}) > 0 \ \Leftrightarrow\ Q(x;\{g(x,\cdot)<0\}) > 0$ " für $x \in S$;

(12.15) es existiert eine mb Funktion $h : S\times S \mapsto (0,\infty)$ mit

$$\int Q(x;dz)\,h(x,z) = 1, \quad \int Q(x;dz)\,h(x,z)\cdot g(x,z) = 0.$$

Beweis: "(12.14) $\Rightarrow$ (12.15)" (Nach einer Idee von **A.N.Shiryaev**.)

Wähle Γ und ψ, s^* wie in 12.12. (12.14) ist gleichbedeutend mit

(12.14)' $Q(x;\{g(x,\cdot)\equiv 0\}) = 1$ für $x \in S\setminus\Gamma$.

Es hat $\frac{\partial}{\partial s}\psi(s\,|\,x)$ eine Nullstelle in $s^*(x)$ für $x \in \Gamma$. Es folgt:

$$\frac{\partial}{\partial s}\psi(s\,|\,x)\Big|_{s=s^*(x)} = 0 = \int Q(x,dz)\,g(x,z)\cdot\exp\{s^*(x)\cdot g(x,z) - g^2(x,z)\} \quad \forall\, x \in \Gamma.$$

Setze nun $h(x,z) := \begin{cases} \exp\{s^*(x)\cdot g(x,z) - g^2(x,z)\} / \psi(s^*(x)) & \text{für } x \in \Gamma \\ 1 \quad \text{für } x \in S\backslash\Gamma \end{cases}$.

"(12.15) $\Rightarrow$ (12.14)" Sei etwa $Q(x;\{g(x,\cdot)>0\}) > 0$; dann folgt:

$\int Q(x;dz)\, h(x,z)\cdot g^+(x,z) > 0$. Wegen $\int Q(x;dz)\, h(x,z)\cdot g(x,z) = 0$ muß also auch

$\int Q(x;dz)\, h(x,z)\cdot g^-(x,z) > 0$ gelten. Dies impliziert $Q(x;\{g(x,\cdot)<0\}) > 0$.

Die andere Richtung folgt ebenso. $[\,]$

12.16 Beispiel. Es soll nun das Beispiel eines zusammengesetzten Poissonprozesses mit zusätzlichem linearen Drift untersucht werden, bei dem die Sprünge nur in eine Richtung und der Drift in die andere Richtung gehen. Bedingung (12.14) kann dann verletzt sein.

Gegeben sei ein Poisson–Prozeß N_t mit Intensität λ, eine davon unabhängige i.i.d Folge (Y_n), a, b $\in \mathbb{R}$ mit $a > 0$, $b \neq 0$, $c := E[e^{bY_n}] < \infty$. Wir betrachten nun

$$X_t := \sum_{k=1}^{N_t} Y_k - a\cdot t.$$

Dann ist X ein PDP mit konstanter Sprungrate λ, mit Driftfunktion $\varphi(t,x) = x - a\cdot t$, und einer ÜW Q gemäß $\int Q(x;\, dz)\, f(z) := E[f(x + Y_1)]$. X hat übrigens unabhängige und stationäre Zuwächse.

Dann ist folgender Prozeß ein Modell für den Kursverlauf eines Wertpapieres:

$$f(X_t) := \exp\{\, b\cdot X_t \,\}.$$

Es ist $\tilde{f} = -a\cdot f' = -ab\cdot f$. Gilt etwa $Y_k \equiv 1$, dann ist $Q(x;\cdot) = \delta_{x+1}$ degeneriert und Bedingung (12.14) muß nicht gelten. Wir wählen jetzt $h\equiv 1$ und wollen (12.11) durch Wahl von μ erreichen. Es ist $\int Q(x;\, dz)\, f(z) = E[f(x + Y_1)] = f(x)\cdot E[f(Y_1)]$.

Es muß nun folgendes gelten:

(12.17) $\quad c = E[e^{bY_n}] > 1$ für $b>0$ und $0 < c < 1$ für $b<0$.

Dies ist für den Fall $Y_n > 0$ erfüllt. Man erhält:

$$\mu(x)\cdot\lambda\cdot(c-1)f(x) = ab\cdot f(x) \;\Leftrightarrow\; \mu(x)\cdot\lambda = \mu\lambda = \frac{a\cdot b}{c-1} =: \lambda^*.$$

Dabei ist λ^* wegen (12.17) > 0.

Der Fall $Y_k \equiv 1$ wurde von Cox & Ross (1976) als Modell für einen Wertpapierkurs betrachtet.

Für den Fall $|b| = 1$ und $Y_1 \sim N(\alpha,\sigma^2)$ erhält man: $c = \exp\{\frac{1}{2}\sigma^2 + b\cdot\alpha\}$. Also muß $\alpha > -\frac{1}{2}\sigma^2$ bei $b = 1$ und $\alpha > \frac{1}{2}\sigma^2$ bei $b = -1$ gelten. $[\,]$