SPRUNGPROZESSE
WS 1997/98

§1 Stochastische Prozesse und Stoppzeiten.

Im folgenden sei ein metrischer Raum (S,d) gegeben, $\mathcal{S}$ bezeichne die Borelsche σ–Algebra bzgl. der Metrik d. Falls nichts anderes gesagt wird, ist $X = (X_t, t \geq 0)$ ein zeitstetiger stochastischer Prozeß auf einem W–Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit dem Zustandsraum $(S, \mathcal{S})$.
Die Überlegungen übertragen sich in der Regel direkt auf den Fall, daß zu einem endlichen Zeithorizont $T \in (0,\infty)$ ein Prozeß $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$ gegeben ist. Einen solchen kann man etwa durch $X_s := X_T$ für $s > T$ fortsetzen und darauf die folgenden Überlegungen anwenden.

Def. 1. X heißt stetig bzw. rechtsstetig [bzw. linksstetig], wenn alle Pfade von X stetig bzw. bzw. rechtsseitig stetig [bzw. linksseitig stetig] sind.

Es soll ein Gleichheitsbegriff für stochastische Prozesse untersucht werden.

Def. 2: Seien X und Y stochastische Prozesse auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Zustandsraum $(S, \mathcal{S})$. Dann heißen X und Y **nicht unterscheidbar** oder **Versionen** von einander, falls gilt:

$$X_t = Y_t \quad \forall\, 0 \leq t < \infty \ P\text{–f.s.}\ .$$

Bei NIchtunterscheidbarkeit existiert also eine von t unabhängige Nullmenge, außerhalb derer Gleichheit von X_t und Y_t vorliegt.

1.1 Lemma. Sind X und Y rechtsstetig [oder beide linksstetig], so sind sie bereits nicht unterscheidbar, wenn gilt: $X_t = Y_t$ P–f.s. $\forall\, 0 \leq t < \infty$.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert eine Menge Ω' vom Maß eins, so daß gilt:
$X_t(\omega) = Y_t(\omega) \quad \forall\, \omega \in \Omega',\ t \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty)$. Es folgt:
$X_t(\omega) = \lim_{r \downarrow t,\, r \in \mathbb{Q}} X_r(\omega) = \lim_{r \downarrow t,\, r \in \mathbb{Q}} Y_r(\omega) = Y_t(\omega) \quad \forall\, \omega \in \Omega',\ t \geq 0.$ [ ]

Def. 3. Eine **Filterung** (in $\mathcal{F}$) ist eine Familie $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ von σ–Algebren mit:
$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \quad \forall\, 0 \leq s < t < \infty$. Man nennt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ auch eine **stochastische Basis.**
Man definiert $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\cup_{s \geq 0} \mathcal{F}_s) \subset \mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_{t+} := \cap_{s > t} \mathcal{F}_s$, $\mathbb{F}_+ = (\mathcal{F}_{t+}, t \geq 0)$.
$\mathbb{F}$ wird als **rechtsstetig** bezeichnet, wenn gilt: $\mathbb{F} = \mathbb{F}_+$. Zu einem Prozeß X ist die **kanonische Filterung** $\mathbb{F}^X$ definiert durch $\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s, s \leq t)$, $t \geq 0$.

Def. 4. Ein Prozeß X heißt an eine Filterung $\mathbb{F}$ **adaptiert** [oder $\mathbb{F}$–adaptiert], wenn gilt:

X_t ist $\mathfrak{F}_t$–mb $\forall$ t, d.h. $\mathbb{F}^X \subset \mathbb{F}$. X heißt $\mathbb{F}$–**progressiv**, wenn gilt:
die Abbildung $[0,t]\times\Omega \ni (s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$ ist $[0,t]\cap\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{F}_t$ – mb $\forall$ t.

Die Meßbarkeit auch in t wird etwa benötigt, wenn Integrale über Zeitintervalle oder der Prozeß zu einem zufälligen mb Zeitpunkt τ, also X_τ, betrachtet werden.

Lemma 1.2. (a) $\mathbb{F}_+$ ist wieder eine Filterung.
(b) $\mathbb{F}_+$ ist immer rechtsstetig, d.h. $(\mathbb{F}_+)_+ = \mathbb{F}_+$.
(c) Ist X $\mathbb{F}$–progressiv, so ist X $\mathbb{F}$–adaptiert und die Abbildung
$[0,\infty)\times\Omega \ni (t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$ ist $[0,\infty)\cap\mathfrak{B}_1\otimes\mathfrak{F}_\infty$ – mb.

Der Beweis ist sehr einfach.

1.3 Beispiel. Um sich klar zu machen, daß die Kenntnis von $\mathfrak{F}_{t+}$ mehr Information liefern kann als $\mathfrak{F}_t$, betrachten für einen reellwertigen Prozeß X das Ereignis A, daß der Prozeß nach t nach oben tendiert, also etwa: $A := \{\underline{\lim}_{h\downarrow 0, h\in\mathbb{Q}} \frac{1}{h}(X_{t+h}-X_t) \geq 0\}$. Dann gilt offenbar: $A \in \mathfrak{F}_{t+}$ aber in der Regel: $A \notin \mathfrak{F}_t$. Andere Beispiele werden im Zusammenhang mit Eintrittszeiten auftreten.

1.4 Proposition. Ist X $\mathbb{F}$–adaptiert und rechtsstetig [oder linksstetig], so ist X $\mathbb{F}$–progressiv.

Beweis: Sei X etwa rechtsstetig. Für t>0 und $n\in\mathbb{N}$ definiert man Zeitintervalle
$I^n_k := [\frac{k-1}{n}t, \frac{k}{n}t)$, $1\leq k<n$, und $I^n_n := [\frac{n-1}{n}t, t]$ sowie Prozesse $(X^n_s, 0\leq s\leq t)$ gemäß
$X^n_s := X_{\frac{k}{n}t}$ für $s \in I^n_k$. Dann gilt für $B \in \mathfrak{S}$:

$$\{(s,\omega)\in [0,t]\times\Omega;\ X^n_s(\omega) \in B\} = \cup_{1\leq k\leq n} I^n_k \times X^{-1}_{\frac{k-1}{n}t}(B) \in [0,t]\cap\mathfrak{B}_1\otimes\mathfrak{F}_t.$$

Also ist $(s,\omega) \mapsto X^n_s(\omega)$ $[0,t]\cap\mathfrak{B}_1\otimes\mathfrak{F}_t$ – mb. Diese Eigenschaft überträgt sich auf
$X_s(\omega) = \lim_{n\to\infty} X^n_s(\omega)$. [ ]

Def. 5. Sei $\mathbb{F}$ eine Filterung in $\mathfrak{F}$. Eine Abbildung $\tau : \Omega \mapsto [0,\infty]$ heißt eine $\mathbb{F}$–**Stoppzeit**,
wenn gilt: $\{\tau\leq t\} \in \mathfrak{F}_t$ $\forall$ t.

Offenbar ist jede konstante Abb. τ eine Stoppzeit und jede Stoppzeit eine Zva. Da $\mathbb{F}_+$ mit $\mathbb{F}$ auch eine Filterung ist, ist auch der Begriff der $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit erklärt. Er ist eine Abschwächung des Begriffs $\mathbb{F}$–Stoppzeit.

1.5 Lemma. Jede $\mathbb{F}$–Stoppzeit ist eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit.

Beweis: Es gilt: $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_{t+}$. $[]$

1.6 Lemma. Folgende Auusagen sind äquivalent:

i) τ ist $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit;

ii) $\{\tau<t\} \in \mathfrak{F}_t \quad \forall\, t$;

iii) $\tau\wedge t$ ist $\mathfrak{F}_t$–mb $\quad \forall\, t$.

Beweis: "(ii) $\Rightarrow$ (i)" $\{\tau \le t\} = \cap_{n>m} \{\tau < t + \frac{1}{n}\} \subset \mathfrak{F}_{t+(1/m)} \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$.
Offenbar gilt nun: $\cap_m \mathfrak{F}_{t+(1/m)} = \mathfrak{F}_{t+}$.
"(iii) $\Rightarrow$ (ii)" $\{\tau < t\} = \{\tau\wedge t < t\} \in \mathfrak{F}_t$.
"(i) $\Rightarrow$ (iii)" $\{\tau\wedge t \le s\} = \begin{cases} \{\tau \le s\} \in \mathfrak{F}_{s+} \subset \mathfrak{F}_t & \text{für } s<t \\ \Omega & \text{für } s\ge t \end{cases}$. $[]$

1.7 Lemma. (a) Mit σ und τ sind auch $\tau\wedge\sigma$ und $\tau\vee\sigma$ $\mathbb{F}$–Stoppzeiten.

(b) Ist τ eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit und $s>0$, so ist $\tau+s$ eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit.

Beweis: a) $\{\tau\wedge\sigma \le t\} = \{\tau \le t\} \cup \{\sigma \le t\}$, $\{\tau\vee\sigma \le t\} = \{\tau \le t\} \cap \{\sigma \le t\}$.
b) $\{\tau+s \le t\} = \{\tau \le t-s\} \in \mathfrak{F}_{(t-s)+} \subset \mathfrak{F}_t$. $[]$

Def. 6. Für $B \in \mathfrak{S}$ ist die **Eintrittszeit** von X in B definiert als

$$\tau_B := \inf \{t\ge 0;\, X_t \in B\} \quad \text{mit } \inf \emptyset = \infty.$$

Haben die Pfade von X linksseitige Limites X_{t-}, so ist die **Kontaktzeit** von X zu B

$$\tilde{\tau}_B := \tau_B \wedge \inf \{t\ge 0;\, X_{t-} \in B\}.$$

Die Kontaktzeit wird für rechtsstetige Sprungprozesse interessant werden. Ist X linksstetig, so stimmen offenbar Eintrittszeit und Kontaktzeit überein. Für beliebige $B \in \mathfrak{S}$ ist die Meßbarkeit der Eintrittszeit kompliziert. Jedoch gilt:

1.8 Proposition. Sei X $\mathbb{F}$–adaptiert. Dann gelten:

(a) Ist X rechtsstetig [oder linksstetig] und ist B offen, so ist τ_B eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit.

(b) Hat X rechtsstetige Pfade mit linksseitigen Limites und ist B abgeschlossen, so ist $\tilde{\tau}_B$ $\mathbb{F}$–Stoppzeit.

(c) Ist X stetig und ist B abgeschlossen, so ist τ_B $\mathbb{F}$–Stoppzeit.

Beweis: a) Wir verwenden 1.6. Es gilt: $\{\tau_B < t\} = \cup_{s\in [0,t)} \{X_s \in B\} = \cup_{s\in [0,t)\cap\mathbb{Q}} \{X_s \in B\}$.
Dabei gilt die erste Gleichung stets und bei der zweiten stets "$\supset$". Ferner folgt "$\subset$" aus den Stetigkeitseigenschaften der Pfade und der Offenheit von B.

Aus der Adaptiertheit ergibt sich nun $\{\tau_B < t\} \in \mathfrak{F}_t$.
b) Aus der Rechsstetigkeit folgt offenbar für $s_n \downarrow s$ auch: $X_{s_n -}(\omega) \to X_s(\omega)\ \forall\ \omega$.

Sei $B_n := \{x \in S;\ d(x,B) < \frac{1}{n}\}$; dann ist B_n offen und wegen der Abgeschlossenheit Von B gilt: $\cap_n B_n = B$. Es wird nun folgende Gleichung gezeigt werden:

(*) $\quad \{\tilde{\tau}_B \le t\} = \{X_t \in B\} \cup \cap_n \{\tau_{B_n} < t\} \quad \forall\ t.$

Dann folgt die Beh. aus (a).

"(*) $\subset$" Sei ω geg. mit $s := \tilde{\tau}_B(\omega) \le t$ Dann ex. (s_n) mit $s_n \downarrow s$ und
(i) $X_{s_n}(\omega) \in B\ \forall\ n$ oder (ii) $X_{s_n -}(\omega) \in B\ \forall\ n$.
Wegen der Rechtsstetigkeit von X und der Abgeschlossenheit von B folgt in beiden Fällen:
$X_s(\omega) \in B$.
Ist $s = t$, so ist $X_t(\omega) \in B$.
Ist $s < t$, so gilt: $\tau_{B_n}(\omega) \le \tau_B(\omega) \le s < t$.

"(*) $\supset$" Ist $X_t(\omega) \in B$, so folgt $\tilde{\tau}_B(\omega) \le \tau_B(\omega) \le t$.
Gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $\tau_{B_n}(\omega) < t$, so existiert eine Folge (s_n) mit $s_n < t$ und $X_{s_n}(\omega) \in B_n$.
Sei nun $s \in [0,t]$ ein Häufungspunkt von (s_n). Wir unterscheiden zwei Fälle.
Existiert eine Teilfolge $(n') \subset \mathbb{N}$ mit $s_{n'} \uparrow s$ und $s_{n'} < s$, so folgt leicht: $X_{s-}(\omega) \in B$.
Existiert eine Teilfolge $(n') \subset \mathbb{N}$ mit $s_{n'} \downarrow s$, so folgt aufgrund der Rechtsstetigkeit: $X_s(\omega) \in B$.

In beiden Fällen gilt: $\tilde{\tau}_B(\omega) \le t$.

c) Da X stetig ist, gilt $\tilde{\tau}_B = \tau_B$, und die Beh. folgt aus Teil (b). $[]$

Def. 7. Ist τ eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit, so heißt

$$\mathfrak{F}_\tau := \{\ A \in \mathfrak{F}_\infty;\ A \cap \{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_t\ \ \forall\ t \ge 0\}$$

σ–Algebra der τ–Vergangenheit.

Der Name ist gerechtfertigt aufgrund des folgenden Lemmas.

1.9 Lemma. Seien τ und σ $\mathbb{F}$–Stoppzeiten. Dann gelten:

(a) $\mathfrak{F}_\tau$ ist eine σ–Algebra;
(b) $\mathfrak{F}_\tau = \{\ A \subset \Omega;\ A \cap \{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_t\ \ \forall\ t \ge 0,\ A \cap \{\tau = \infty\} \in \mathfrak{F}_\infty\}$;
(c) τ ist $\mathfrak{F}_\tau$–mb, insbesondere gilt: $\{\tau < \infty\} \in \mathfrak{F}_\tau$;
(d) ist $\tau = s$ konstant, so gilt: $\mathfrak{F}_\tau = \mathfrak{F}_s$;
(e) aus $\sigma \le \tau$ folgt $\mathfrak{F}_\sigma \subset \mathfrak{F}_\tau$.

Beweis: a) Die Abgeschlossenheit gegenüber der Komplementbildung z.B. folgt aus:

$$A^C \cap \{\tau \le t\} = \{\tau \le t\} - A \cap \{\tau \le t\}.$$

b) "⊃" Für $A \in \mathfrak{F}_\tau$ hat man: $A = A \cap \{\tau = \infty\} \cup \cup_n A \cap \{\tau \le n\} \in \mathfrak{F}_\infty$.
"⊂" $A \cap \{\tau = \infty\} = A \setminus \cup_n A \cap \{\tau \le n\}$.
c) Wir zeigen $\{\tau \le s\} \in \mathfrak{F}_\tau$ mit (b). Einmal gilt: $\{\tau \le s\} \cap \{\tau \le t\} = \{\tau \le s \wedge t\} \in \mathfrak{F}_t$ und zum anderen: $\{\tau \le s\} \cap \{\tau = \infty\} = \emptyset \in \mathfrak{F}_\infty$.
d) ist leicht zu sehen.
e) Für $A \in \mathfrak{F}_\sigma$ gilt: $A \cap \{\tau \le t\} = A \cap \{\sigma \le t\} \cap \{\tau \le t\}$ mit $A \cap \{\sigma \le t\} \le \mathfrak{F}_t$. []

Def. 8. Zu einer $\mathbb{F}$–Stoppzeit τ definieren wir X_τ mit Hilfe einer beliebig vorgegebenen $\mathfrak{F}_\infty$–mb Zva X_∞ gemäß $X_\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega)$. Der **gestoppte Prozeß** ist $X^\tau := \{X_{\tau \wedge t},\ t \ge 0\}$.
Die Wahl von X_∞ wird keine Rolle spielen, da X_τ nur auf $\{\tau < \infty\}$ betrachtet wird. X_∞ kann als Konstante oder im Falle eines reellwertigen Prozesses z.B. gewählt werden als

$$X_\infty := \overline{\lim}_{\mathbb{Q}} X_t := \inf_n \sup_{t > n,\, t \in \mathbb{Q}} X_t .$$

Bedingungen dafür, daß X_τ eine Zva und X^τ ein stochastischer Prozeß ist, liefert:

1.10 Proposition. Sei X $\mathbb{F}$–progressiv.

(a) Ist τ eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit, so ist $X^\tau := \{X_{\tau \wedge t},\ t \ge 0\}$ $\mathbb{F}$–progressiv;
(b) Ist τ eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit, so ist X_τ $\mathfrak{F}_\tau$–mb.

Beweis: a) Sei t fest und $([0,t] \times \Omega\ ,\ [0,t] \cap \mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{F}_t) =: (D, \mathfrak{D})$. Nach Voraussetzung ist $D \ni (s,\omega) \mapsto X_s(\omega) =: h(s,\omega)$ $\mathfrak{D}$–mb.
Z.z. ist, daß auch $D \ni (s,\omega) \mapsto X_{\tau(\omega) \wedge s}(\omega) =: g(s,\omega)$ $\mathfrak{D}$–mb ist.
Wir werden g in $g = h \circ f$ faktorisieren. Zunächst ist in Hinblick auf 1.6

$$D \ni (s,\omega) \mapsto \tau(\omega) \wedge s = \tau(\omega) \wedge t \wedge s =: \varphi(\tau(\omega) \wedge t, s)\ \ \mathfrak{D} - [0,t] \cap \mathfrak{B}_1 - \text{mb};$$

denn φ ist sogar stetig, vgl. W.th.I [8.11]. Somit ist auch

$$D \ni (s,\omega) \mapsto (\tau(\omega) \wedge s, \omega) =: f(s,\omega)\ \ \mathfrak{D}\text{–}\mathfrak{D}\text{–mb}.$$

b) Für $B \in \mathfrak{S}$ gilt: $\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \le t\} = \{X_{\tau \wedge t} \in B\} \cap \{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_t$,
da nach (a) X^τ insbesondere adaptiert ist. Ferner gilt auch $\{X_\infty \in B,\ \tau = \infty\} \in \mathfrak{F}_\infty$.
Nach 1.9b haben wir also: $\{X_\tau \in B\} \in \mathfrak{F}_\tau$. []

Def. 9. Ist τ eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit, so wird die **σ–Algebra $\mathfrak{F}_{\tau+}$ der (τ+)–Vergangenheit** definiert als σ–Algebra der τ–Vergangenheit bzgl. $\mathbb{F}_+$, d.h.

$$\mathfrak{F}_{\tau+} := \{A \in \mathfrak{F}_\infty;\ A \cap \{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_{t+}\ \ \forall\, t\}.$$

1.11 Lemma. (a) Ist τ eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit, so gilt:

$$\mathfrak{F}_{\tau+} = \{A \in \mathfrak{F}_\infty;\ A \cap \{\tau < t\} \in \mathfrak{F}_t\ \ \forall\, t\}.$$

(b) Ist τ sogar eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit, so gilt: $\mathfrak{F}_\tau \subset \mathfrak{F}_{\tau+}$.

Beweis: a) vgl. Beweis von 1.6. b) ist klar wegen $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_{t+}$. []

1.12 Bemerkung. Ist τ eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit und ist (τ_n) eine Folge von $\mathbb{F}$–Stoppzeiten mit $\tau_n > \tau$, $\tau_n \downarrow \tau$ auf Ω; so gilt: $\mathfrak{F}_{\tau+} = \cap_n \mathfrak{F}_{\tau_n}$.

Der Beweis ist eine einfache Übungsaufgabe. Ein Beispiel ist nach 1.7b: $\tau_n = \tau + \frac{1}{n}$ []

1.13 Lemma. Seien τ und σ $\mathbb{F}$–Stoppzeiten. Dann gilt:

(a) $\mathfrak{F}_{\tau\wedge\sigma} = \mathfrak{F}_\tau \cap \mathfrak{F}_\sigma$;

(b) $\{\sigma < \tau\}, \{\sigma \le \tau\} \in \mathfrak{F}_\tau \cap \mathfrak{F}_\sigma$.

Beweis: a) "$\subset$" folgt aus 1.9e. Sei nun $A \in \mathfrak{F}_\tau \cap \mathfrak{F}_\sigma$; dann hat man:

$A \cap \{\tau\wedge\sigma \le t\} = A \cap \{\tau \le t\} \cup A \cap \{\sigma \le t\} \in \mathfrak{F}_t \quad \forall\, t \ge 0.$

b) Es gilt $\{\sigma \le \tau\} \in \mathfrak{F}_\tau$ wegen $\{\sigma \le \tau\} \cap \{\tau \le t\} = \{\sigma\wedge t \le \tau\wedge t\} \cap \{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_t$ nach 1.6;
ebenso $\{\sigma < \tau\} \in \mathfrak{F}_\tau$ wegen $\{\sigma < \tau\} \cap \{\tau \le t\} = \{\sigma\wedge t < \tau\wedge t\} \cap \{\tau \le t\} \in \mathfrak{F}_t$.
Die übrigen Aussagen erhält man durch Komplementbildung. []

Def. 10. Sei $(\Omega,\mathfrak{F})$ Meßraum und $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_t)$ eine Filterung in $\mathfrak{F}$. Die **σ–Algebra $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$ der vorhersagbaren Mengen** ist die σ–Algebra auf $(0,\infty)\times\Omega$, die von den **vorhersagbaren Rechtecken** $(s,t] \times A$; $0 \le s \le t$, $A \in \mathfrak{F}_s$, erzeugt wird.
Ein stochastischer Prozeß $Y = (Y_t)$ heißt $\mathbb{F}$–**vorhersagbar**, wenn Y_0 $\mathfrak{F}_0$–mb ist und $(0,\infty)\times\Omega \ni (t,\omega) \mapsto Y_t(\omega)$ $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb ist.
Für zwei Stoppzeiten σ und τ heißt
$]\sigma,\tau] := \{(s,\omega) \in (0,\infty)\times\Omega;\ \sigma(\omega) < s \le \tau(\omega)\}$ ein **stochastisches Intervall**.

1.14 Satz. Es gilt $\mathfrak{P}(\mathbb{F}) = \sigma_a = \sigma_b = \sigma_c = \sigma_d = \sigma_e$ mit

$\sigma_a = \sigma(\{(s,\infty) \times A\ ;\ s \ge 0,\ A \in \mathfrak{F}_s\})$,

$\sigma_b = \sigma(\{]\sigma,\tau]\ ;\ \sigma, \tau\ \mathbb{F}_+\text{–Stoppzeit}\})$,

$\sigma_c = \sigma(\{]0,\tau]\ ,\ \tau\ \mathbb{F}\text{–Stoppzeit}\})$,

σ_d [bzw. σ_e] ist die kleinste σ–Algebra $\mathfrak{A}$, sodaß $(0,\infty)\times\Omega \ni (t,\omega) \mapsto Y_t(\omega)$ $\mathfrak{A}$–mb ist für alle $\mathbb{F}$–adaptierten stetigen [bzw. $\mathbb{F}$–adaptierten linksstetigen] Prozesse Y.

Beweis: "$\mathfrak{P}(\mathbb{F}) = \sigma_a$": wegen $(s,\infty)\times A = \cup_{t\in\mathbb{N}} (s,t]\times A$ und $(s,t] = (s,\infty)\times A \setminus (t,\infty)\times A$.
"$\sigma_c \subset \sigma_b$" ist klar.
"$\mathfrak{P}(\mathbb{F}) \subset \sigma_c$": Für $A \in \mathfrak{F}_s$ gilt: $(s,t]\times A =]0,\tau] \setminus]0,\sigma]$ mit $\sigma = s\cdot\mathbf{1}_A + \infty\cdot\mathbf{1}_{A^c}$ und
$\tau = t\cdot\mathbf{1}_A + \infty\cdot\mathbf{1}_{A^c}$, also $]0,\tau] = (0,t] \times A + (0,\infty)\times A^c$.

"$\sigma_e \subset \mathfrak{P}(\mathbb{F})$": Mit maßtheoretischer Induktion oder wegen $\{(t,\omega);\ Y_s \cdot \mathbf{1}_I \in B\} = \begin{cases} I^c \times \Omega \cup I \times \{Y_s \in B\} & 0 \in B \\ I \times \{Y_s \in B\} & 0 \notin B \end{cases}$, erhält man, daß $(t,\omega) \mapsto Y_s(\omega) \cdot \mathbf{1}_{(s,s+h]}(t)$ $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb ist.

Nun lassen sich linksstetige Prozesse durch Summen solcher Größen approximieren.

"$\sigma_d \subset \sigma_e$" ist klar.

"$\mathfrak{P}(\mathbb{F}) \subset \sigma_d$": Zu einem vorhersagbaren Rechteck $(s,t] \times A$ wähle stetige Funktionen $f_n : (0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ mit $f_n \to \mathbf{1}_{(s,t]}$ und $f = 0$ auf $(0,s]$. Dann sind Y^n mit $Y^n_t(\omega) := f_n(t) \cdot \mathbf{1}_A(\omega)$ stetige adaptierte Prozesse mit $Y^n \to \mathbf{1}_{(s,t]} \cdot \mathbf{1}_A$.

"$\sigma_b \subset \sigma_e$": Wenn σ und τ $\mathbb{F}_+$–Stoppzeiten sind, dann ist Y mit $Y_t(\omega) = \mathbf{1}_{]\sigma,\tau]}(t,\omega)$ ein linksstetiger adaptierter Prozeß nach 1.8. □

1.15 Lemma.(a) Jeder $\mathbb{F}$–vorhersagbare Prozeß ist $\mathbb{F}$–progressiv.

(b) Ist $\eta : [0,\infty) \mapsto S$ mb, so ist Y mit $Y_t(\omega) := \eta(t)$ $\mathbb{F}$–progressiv.

Der **Beweis** ist eine Übungsaufgabe.

Hat man einen mehrdimensionalen Prozeß, so kann man den noch zu beweisenen Darstellungssatz 2.5 auf die einzelnen Komponenten anwenden gemäß dem folgenden:

1.16 Lemma. Sei $Y = (Y^1,...,Y^d)$ ein stochastischer Prozeß mit Zustandsraum $(\mathbb{R}^d,\mathfrak{B}_d)$ oder $(\bigtimes_1^d \bar{\mathbb{R}}, \bigotimes_1^d \bar{\mathfrak{B}})$, $1 \le d \le \infty$. Dann gilt:

Y ist genau dann $\mathbb{F}$–vorhersagbar, wenn die Y^k für $1 \le k \le d$ $\mathbb{F}$–vorhersagbar sind.

Beweis: Y_0 ist genau dann $\mathfrak{F}_0$–mb, wenn die Y^k für $1 \le k \le d$ $\mathfrak{F}_0$–mb sind. Nun kann Y auf $(0,\infty)\times\Omega$ betrachtet werden. Dort ist Y genau dann $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb, wenn die Y^k für $1 \le k \le d$ $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb sind. [vgl. W.th.I 8.10] □

Definition 11. Sei $(\Omega,\mathfrak{F})$ Meßraum und $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_t)$ eine Filterung in $\mathfrak{F}$. Dann sei:

$\mathfrak{F}_{t-} := \sigma(\cup_{s<t} \mathfrak{F}_s)$, $\mathfrak{F}_{0-} := \mathfrak{F}_0$, $\mathbb{F}_- := (\mathfrak{F}_{t-},\ t \ge 0)$.

1.17 Lemma. (a) $\mathbb{F}_-$ ist eine Filterung mit $\mathfrak{F}_{t-} \subset \mathfrak{F}_t$.

(b) Ist Y $\mathbb{F}$–vorhersagbar, so ist Y $\mathbb{F}_-$–adaptiert.

Beweis: a) ist klar. b) Sei $C = (s,\infty)\times A$, $s \ge 0$, $A \in \mathfrak{F}_s$, ein vorhersagbares Rechteck. Dann gilt: $\mathbf{1}_C(t,\omega) = 0$ für $t \le s$ und $\mathbf{1}_C(t,\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)$ für $t > s$. Also ist $\mathbf{1}_C(t,\cdot)$ $\mathfrak{F}_{t-}$–mb.
Mit einem Dynkin–Argument folgt, daß $\mathbf{1}_C(t,\cdot)$ für alle vorhersagbaren Mengen C $\mathfrak{F}_{t-}$–mb ist. Mit maßtheoretischer Induktion folgt die Behauptung. □

Definition 12. Ist τ eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit, so sei die σ–Algebra der strikten τ–Vergangenheit:

$$\mathfrak{F}_{\tau-} := \sigma(\mathfrak{F}_0, \{t<\tau\} \cap \mathfrak{F}_t\,,\ t > 0\ ) .$$

Jedes Ereignis in $\mathfrak{F}_t$ läßt sich zerlegen in $A = A\cap\{t<\tau\} \cup A\cap\{t\geq\tau\}$; zu $\mathfrak{F}_{\tau-}$ gehört aber nur der Anteil $A \cap \{t<\tau\}$. Im Gegensatz zur σ–Algebra $\mathfrak{F}_{\tau+}$ der $(\tau+)$–Vergangenheit wird $\mathfrak{F}_{\tau-}$ **nicht** als σ–Algebra der τ–Vergangenheit bzgl. $\mathbb{F}_-$ definiert. Für konstante Stoppzeiten $\tau\equiv t$ sind die Definitionen 11 und 12 offenbar konsistent.

1.18 Satz. Seien τ und σ $\mathbb{F}$–Stoppzeiten. Dann gilt:

(0) $\mathfrak{F}_{\tau-} \subset \mathfrak{F}_\tau$, $\mathfrak{F}_{\tau-} \subset \mathfrak{F}_{\sigma-}$ falls $\tau \leq \sigma$;

(a) τ $\mathfrak{F}_{\tau-}$–mb;

(b) Ist (Y_t) vorhersagbar, so ist Y_τ $\mathfrak{F}_{\tau-}$–mb,
wobei Y_∞ als eine beliebige $\mathfrak{F}_\infty$–mb Zva erklärt werden kann.

Beweis: 0) Diese Aussagen sind eine leichte Übungsaufgabe.

a) Offenbar gilt $\mathfrak{F}_{\tau-} \ni \{\tau\leq t\}$ $t \geq 0$.

b) Es ist $Y_t(\omega) = \mathbf{1}_{\{0\}}(t)\cdot Y_0 + \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t)\cdot Y_t + \mathbf{1}_{\{\infty\}}(t)\cdot Y_\infty$. Es genügt den Fall zu betrachten, daß $Y_t = \mathbf{1}_A$ für $t=0,\infty$ und $Y_t = \mathbf{1}_{(s,\infty)\times A}$ gilt. Dabei ist zu beachten, daß $\{(s,\infty) \times A\ ;\ s \geq 0,\ A \in \mathfrak{F}_s\}$ $\cap$–stabil ist. Mit einem Dynkin–Argument und maßtheoretischer Induktion folgt die Aussage nun für beliebige $\overline{\mathbb{R}}$–wertige vorhersagbare Prozesse (Y_t). Für den Fall eines allgemeinen Zustandsraums, ist $(\mathbf{1}_B(Y_t))$ ein reeller vorhersagbarer Prozeß und

$\{Y_\tau \in B\} = \{\ \mathbf{1}_B(Y_\tau) = 1\}$. Wir betrachten also $Y^1_t(\omega) = \mathbf{1}_{(s,\infty)\times A}(t,\omega)$ mit $A \in \mathfrak{F}_s$,
$Y^0_t(\omega) = \mathbf{1}_{\{0\}\times A}(t,\omega)$ mit $A \in \mathfrak{F}_0$, $Y^\infty_t(\omega) = \mathbf{1}_{\{\infty\}\times A}(t,\omega)$ mit $A \in \mathfrak{F}_\infty$.
Dann ist $Y^1_\tau = \mathbf{1}_{\{\tau>s\}\cap A}$ nach Definition $\mathfrak{F}_{\tau-}$–mb, $Y^0_\tau = \mathbf{1}_{\{\tau=0\}\cap A}$ sogar $\mathfrak{F}_0$–mb, und es ist
$Y^\infty_\tau = \mathbf{1}_{\{\tau=\infty\}\cap A}$. Wegen $\{\tau=\infty\}\cap A = \cap_{n\in\mathbb{N}}\ \{\tau>n\}\cap A$, folgt $\{\tau=\infty\}\cap A \in \mathfrak{F}_{\tau-}$ $\forall$ $A \in \mathfrak{F}_t$ und somit

(1.19) $\{\tau=\infty\}\cap A \in \mathfrak{F}_{\tau-}$ $\forall$ $A \in \mathfrak{F}_\infty$. $[\,]$

Die Eigenschaft in Def. 12 läßt sich von festem t auf Stoppzeiten σ ausdehnen:

1.20 Satz. Seien τ und σ $\mathbb{F}$–Stoppzeiten; dann gilt:

$A \cap \{\sigma < \tau\} \in \mathfrak{F}_{\tau-}$ $\forall$ $A \in \mathfrak{F}_\sigma$, insbesondere
$\{\sigma \geq \tau\}, \{\sigma < \tau\} \in \mathfrak{F}_\sigma \cap \mathfrak{F}_{\tau-}$.

Beweis. Sei $\sigma_A := \begin{cases} \infty & \text{auf } A^c \\ \sigma & \text{auf } A \end{cases}$; dann ist σ_A Stoppzeit wegen $\{\sigma_A \leq t\} = A^c \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$.
Sei ferner $Y_t := \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_{\{\sigma < t\}} = \mathbf{1}_{\{\sigma < t \leq \sigma_A\}}$; dann ist (Y_t) nach 1.14 vorhersagbar. Mit 1.18b folgt: $Y_\tau = \mathbf{1}_{A \cap \{\sigma < \tau\}}$ ist $\mathfrak{F}_{\tau-}$–mb. Der Rest folgt aus 1.13. $[\,]$

§2 Maßtheoretische Eigenschaften von Sprungprozessen.

Es wird ein Sprungprozeß betrachtet, bei dem (T_n) die Sprungzeiten und (Z_n) die Sprungziele bezeichnen sollen.

Generalvoraussetzung: Seien $(\Omega,\mathfrak{F})$, $(S,\mathfrak{S})$ Meßräume, $(S_n,\ n\in\mathbb{N})$ und $(Z_n,\ n\in\mathbb{N}_0)$ mb Abb. auf $(\Omega,\mathfrak{F})$ mit Werten in $(0,\infty]$ bzw. S. Sei o.E. $e \in S$ (also bereits $S = S \cup \{e\}$). Es gelte:

(2.1a) $\quad S_n = \infty \ \Rightarrow\ Z_n = e,\ S_{n+1} = \infty \quad$ für $n \in \mathbb{N}$.

Sei $T_n := \sum_1^n S_m$, $0 \le n \le \infty$, also

(2.1b) $\quad T_0 = 0,\ T_\infty = \lim_n T_n,$
$T_n < T_{n+1}$ für $T_n < \infty$ und
$T_n = T_{n+1},\ Z_n = e$ für $T_n = \infty$ ($\Leftrightarrow S_m = \infty$ für ein $m\le n$).

$H_n := (Z_0,T_1,Z_1,\dots,T_n,Z_n),\quad H_\infty = (Z_0,T_1,Z_1,\dots),$

$N_t := \sum_1^\infty \mathbf{1}_{\{T_n\le t\}}$,

$X_t := \begin{cases} Z_n & \text{für } T_n \le t < T_{n+1} \\ e & t \ge T_\infty \end{cases}$, und $X_\infty = e$,

$\mathfrak{F}_t := \sigma(X_s,N_s,\ 0\le s<\infty,\ s\le t),\ 0\le t\le\infty,\ \mathbb{F} := (\mathfrak{F}_t)$;

$E := (0,\infty)\times S \cup \{(\infty,e)\}$, $\mathfrak{E}$ Borel–σ–Algebra auf E, $\Omega_n^o := S\times E^n$, $0\le n\le\infty$.

Es folgt aus (2.1b):

(2.2a) $\quad X_{T_n} = Z_n$, $n \ge 0$,

(2.2b) $\quad (S_n,Z_n) \in E,\ (T_n,Z_n) \in E$, $n \ge 1$, $H_n \in \Omega_n^o$, $0\le n\le\infty$, auf Ω.

Der Prozeß (X,N) ist rechtsstetig und somit progressiv.

2.3 Lemma. (a) T_n, $n\in\mathbb{N}$, und T_∞ sind $\mathbb{F}$–Stoppzeiten;

(b) $\quad \mathfrak{F}_t = \sigma\left(\left\{\{Z_n \in B,\ T_n \le s\},\ n\in\mathbb{N}_0,\ 0\le s<\infty,\ s\le t,\ B\in\mathfrak{S}\right\}\right),\ 0\le t\le\infty;$

(c) $\quad \mathfrak{F}_\infty = \sigma(H_\infty).$

(d) $\quad \sigma(H_n) \subset \mathfrak{F}_{T_n}$, $0\le n\le\infty$.

Es wird noch gezeigt werden, daß in (d) "=" gilt.

Beweis: a) Es ist $\{T_n \le t\} = \{N_t \ge n\} \in \mathfrak{F}_t$ und $\{T_\infty \le t\} = \cap_n \{T_n \le t\}$.
b) "$\subset$" folgt aus $\{X_s \in B\ ,\ N_s = n\} = \{T_n \le s,\ Z_n \in B\} \setminus \{T_{n+1} \le s\}$ und (a).
"$\supset$" folgt aus $\{Z_n \in B,\ T_n \le s\} = \{X_{T_n} \in B,\ T_n \le s\} \in \mathfrak{F}_s$ und (a);
denn X_{T_n} ist $\mathfrak{F}_{T_n}$–mb nach §1.

c) Es folgt $\mathfrak{F}_\infty = \sigma(H_\infty)$ aus:

$\mathfrak{F}_\infty = \sigma(\{\{Z_n \in B,\ T_n \le s\},\ n\in\mathbb{N}_0,\ 0\le s<\infty,\ B\in\mathfrak{S}\}) = \sigma(Z_0,T_1,Z_1,\ldots) = \sigma(H_\infty)$.

d) Nach §1 hat man: $\{Z_m \in B,\ T_m \in D\} = \{X_{T_m} \in B,\ T_m \in D\} \in \mathfrak{F}_{T_m} \subset \mathfrak{F}_{T_n}$, $m\le n$. $[]$

2.4 Satz. $\mathbb{F}_+ = \mathbb{F}$, d.h. die Filterung $\mathbb{F}$ ist rechtsstetig.

Beweis: Wähle $t^k > t$ mit $t^k \downarrow t$, und setze $B_k := \{T_n \notin (t,t^k]\ \forall\, n\}$. Dann gilt:
$B_{k-1} \subset B_k \uparrow \Omega$. Für $s \le t^k$ hat man nach 2.3b:
$B_k \cap \{Z_n \in B,\ T_n \le s\} = B_k \cap \{Z_n \in B,\ T_n \le s\wedge t\} \in B_k \cap \mathfrak{F}_t$ und somit
(+) $B_k \cap \mathfrak{F}_{t^k} \subset B_k \cap \mathfrak{F}_t$.
Sei nun $A \in \mathfrak{F}_{t+} \subset \mathfrak{F}_{t^k}$; dann folgt nach (+): $\exists\, A_k \in \mathfrak{F}_t$ mit:

$B_k \cap A = B_k \cap A_k$.

Es folgt für die symmetrische Differenz: $A_k \,\Delta\, A \subset B_k^c \downarrow \emptyset$ und somit:

$A = \lim A_k$ $(= \liminf A_k = \limsup A_k) \in \mathfrak{F}_t$. $[]$

2.5 Darstellungssatz. Sei Y ein stochastischer Prozeß auf $(\Omega,\mathfrak{F})$ mit Zustandsraum $(\bar{\mathbb{R}},\bar{\mathfrak{B}})$.

Dann gilt: Y ist genau dann $\mathbb{F}$–vorhersagbar, wenn Y die Darstellung besitzt:

(2.6)
$$Y_t = f_0(t,H_0)\cdot \mathbf{1}_{\{0\le t\le T_1\}} + \sum_1^\infty f_n(t,H_n)\cdot \mathbf{1}_{\{T_n<t\le T_{n+1}\}} + f_\infty(t,H_\infty)\cdot \mathbf{1}_{\{T_\infty\le t\}},$$

für gewisse mb Funktionen $f_n : [0,\infty)\times\Omega_n^o \mapsto \bar{\mathbb{R}}$.

Wichtig ist, daß in (2.6) "$t\le T_{n+1}$" steht; es sind also die Zustände bis einschließlich T_{n+1} durch die Entwicklung bis T_n bestimmt.

Beweis: "dann" Es gelte (2.6). Dann ist $Y_0 = f_0(0,H_0) = f_0(0,X_0)$ $\mathfrak{F}_0$–mb. Jetzt genügt es die einzelnen Summanden auf $(0,\infty)\times\Omega$ zu untersuchen.
Sei zunächst $f_n(t,H_n) = \mathbf{1}_B(t)\cdot\mathbf{1}_C(H_n)$ mit mb Mengen B, C. Dann gilt:

(i) $(t,\omega) \mapsto \mathbf{1}_B(t)$ ist $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb nach 1.15b.

(ii) Sei $\tilde{Y}_t := \mathbf{1}_C(H_n)\cdot\mathbf{1}_{\{T_n<t\le T_{n+1}\}}$; dann ist $\tilde{Y}$ linksstetig und und $\mathbb{F}$–adaptiert;

denn $\tilde{Y}_t = \mathbf{1}_{\{H_n\in C\}\cap\{T_n<t\}}\cdot\mathbf{1}_{\{t\le T_{n+1}\}}$ ist gemäß 2.3d und 1.11a $\mathfrak{F}_t$–mb. Also ist $\tilde{Y}$ nach 1.14 $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb. Somit ist $(\mathbf{1}_B(t)\cdot\tilde{Y}_t)$ $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb. Mit einem Dynkinargument folgt, daß

$(t,\omega) \mapsto \mathbf{1}_\Gamma(t,H_n)\cdot\mathbf{1}_{\{T_n<t\le T_{n+1}\}}(\omega)$ $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb ist für jede mb Teilmenge Γ von $[0,\infty)\times\Omega_n^o$.

Mit maßtheoretischer Induktion erweist sich dann $(t,\omega) \mapsto f_n(t,H_n(\omega)) \cdot \mathbf{1}_{\{T_n<t\le T_{n+1}\}}(\omega)$ als $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb. Für den ersten Term gilt Entsprechendes. Nun soll der letzte Term behandelt werden. Aus obigen Überlegungen folgt:

$\tilde{Y}_t^{n,k} = \mathbf{1}_{\{H_n\in C\}\cap\{T_k<t\}}$ ist $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb für $k\ge n$ und damit auch

$\tilde{Y}_t^{n,\infty} = \lim_{k\to\infty} \tilde{Y}_t^{k} = \mathbf{1}_{\{H_n\in C\}\cap\{T_\infty\le t\}}$. Mit einem Dynkin–Argument und mit

$\sigma(H_\infty) = \sigma(\cup_n \sigma(H_n))$ ergibt sich, daß auch $\tilde{Y}_t^{\infty,\infty} = \mathbf{1}_{\{H_\infty\in C\}\cap\{T_\infty\le t\}}$ $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb ist. Wie oben folgt schließlich, daß $(t,\omega) \mapsto f_\infty(t,H_\infty)\cdot \mathbf{1}_{\{T_\infty\le t\}}$ $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb ist.

"genau dann" Sei nun Y $\mathbb{F}$–vorhersagbar. Dann gilt $Y_0 = f_0(0,H_0)$ für eine mb Funktion f [vgl den Beweis von 2.7 unten]. Die Darstellung ist jetzt auf $(0,\infty)\times\Omega$ zu zeigen.

Sei zunächst $Y_t(\omega) = \mathbf{1}_{(a,b]\times A}(t,\omega)$ mit $A = \{Z_k \in B, T_k \le s\} \in \mathfrak{F}_a$ mit $s \le a$.

Dann gilt für t>a: $\{t \le T_{n+1}\} \cap A \in \{t \le T_{n+1}\} \cap \sigma(H_n)$, n≥0;

denn für $s \le a < t$ hat man: $\{t \le T_{n+1}\} \cap A = \{t \le T_{n+1}, Z_k \in B, T_k \le s\}$ $\left[= \emptyset \text{ für } k > n\right]$.

Mit 2.3b folgt:

$$\{t \le T_{n+1}\} \cap A \in \{t \le T_{n+1}\} \cap \sigma(H_n) \quad , n\ge 0, \text{ für } A \in \mathfrak{F}_a.$$

Also hat man auch $\{T_n < t \le T_{n+1}\} \cap A \in \{T_n < t \le T_{n+1}\} \cap \sigma(H_n)$, $n \ge 1$, und damit

$\mathbf{1}_{(a,b]\times A}(t,\omega)\cdot \mathbf{1}_{\{T_n < t \le T_{n+1}\}} = \mathbf{1}_{(a,b]}(t)\cdot \mathbf{1}_{\{H_n \in B_n\}}\cdot \mathbf{1}_{\{T_n < t \le T_{n+1}\}}$.

Entsprechend gilt: $\mathbf{1}_{(a,b]\times A}(t,\omega)\cdot \mathbf{1}_{\{t \le T_1\}} = \mathbf{1}_{(a,b]}(t)\cdot \mathbf{1}_{\{H_0 \in B_0\}}\cdot \mathbf{1}_{\{t \le T_1\}}$.

Natürlich gilt wegen $\mathfrak{F}_a \subset \mathfrak{F}_\infty = \sigma(H_\infty)$:

$\mathbf{1}_{(a,b]\times A}(t,\omega)\cdot \mathbf{1}_{\{t \le T_\infty\}} = \mathbf{1}_{(a,b]}(t)\cdot \mathbf{1}_{\{H_\infty \in B_\infty\}}\cdot \mathbf{1}_{\{t \le T_\infty\}}$.

Damit hat man die gewünschte Darstellung für $Y_t(\omega) = \mathbf{1}_{(a,b]\times A}(t,\omega)$ mit $A \in \mathfrak{F}_a$ und $f_n(t,\cdot) = \mathbf{1}_{(a,b]}(t)\cdot \mathbf{1}_{B_n}(\cdot)$.

Mit einem Dynkin–Argument und maßtheoretischer Induktion folgt dann die Behauptung. []

Eine Richtung von 2.6 benötigen wir auch für allgemeinere Zustandsräume. Außerdem soll noch eine Beziehung für sogenannte indizierte vorhersagbare Prozesse gegeben werden.

2.7 Korollar. (a) Seien $(D,\mathfrak{D})$ ein Meßraum, $f_n : [0,\infty)\times\Omega_n^o \mapsto D$, $n \in \bar{\mathbb{N}}_0$, mb Abbildungen. Y ist dann ein $\mathbb{F}$–vorhersagbarer Prozeß mit Zustandsraum $(D,\mathfrak{D})$, wenn Y die folgende Darstellung besitzt:

$Y_t = f_n(t,H_n)$ für $t \in (T_n,T_{n+1}]$ bzw. $[0,T_1]$ für n=0 bzw. $[T_\infty,\infty)$ für $n=\infty$.

(b) Für einen durch $x \in S$ indizierten Prozeß $\xi(x)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) Es existiert ein Meßraum $(D,\mathfrak{D})$, eine mb Funktion $f : D\times S \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ und ein $\mathbb{F}$–vorhersagbarer Prozeß Y mit Zustandsraum $(D,\mathfrak{D})$, sodaß gilt: $\xi_t(x) = f(Y_t,x)$.

ii) Es existieren mb Abbildungen $f_n : \Omega_n^o\times[0,\infty)\times S \mapsto \bar{\mathbb{R}}$, $n \in \bar{\mathbb{N}}$, sodaß gilt:

$$\xi_t(x) = f_0(H_0,t,x)\cdot \mathbf{1}_{\{0\le t\le T_1\}} + \sum_1^\infty f_n(H_n,t,x)\cdot \mathbf{1}_{\{T_n<t\le T_{n+1}\}} + f_\infty(H_\infty,t,x)\cdot \mathbf{1}_{\{T_\infty\le t\}} .$$

iii) $(\omega,x) \mapsto \xi_0(x,\omega)$ ist $\mathfrak{F}_0\times\mathfrak{S}$–mb; $(t,\omega,x) \mapsto \xi_t(x,\omega)$ ist $\mathfrak{P}(\mathbb{F})\times\mathfrak{S}$–mb.

Beweis: a) Offenbar ist Y_0 $\mathfrak{F}_0$–mb. Zu zeigen ist:

(*) $\Gamma := \Gamma_B := \{(t,\omega) \in (0,\infty)\times\Omega;\ Y_t(\omega) \in B\} \in \mathfrak{P}(\mathbb{F})\ \ \forall\, B \in \mathfrak{D}$.

Offenbar ist (*) gleichbedeutend damit, daß $Y^B := (\mathbf{1}_\Gamma(t,\omega),\ t\ge 0)$ ein vorhersagberer Prozeß ist. Nun gilt aber: $\mathbf{1}_\Gamma(t,\cdot) = \mathbf{1}_B(Y_t)\cdot\mathbf{1}_{(0,\infty)}(t) = \mathbf{1}_B(f_n(t,H_n))\cdot\mathbf{1}_{(0,\infty)}(t)$

für $t \in (T_n,T_{n+1}]$ bzw. $[0,T_1]$ für n=0 bzw. $[T_\infty,\infty)$ für $n=\infty$.

Nach 2.5 ist nun Y^B vorhersagbar.

b) "(i) ⇒ (iii)" ist offensichtlich.

"(iii) ⇒ (ii)" Es ist $(\omega,x) \mapsto \xi_0(x,\omega)$ $\mathfrak{F}_0\otimes\mathfrak{S}$–mb mit $\mathfrak{F}_0 = \sigma(H_0)$; also gilt $\xi_0(x) = g(H_0,x)$ für eine mb Funktion g. [Ist $\pi : \Omega\times S \mapsto S$ die Projektion, so gilt nämlich: $\mathfrak{F}_0\otimes\mathfrak{S} = \sigma(H_0,\pi)$.] Setze $f_0(h,0,x) := g(h,x)$.

Die Darstellung ist jetzt auf $(0,\infty)\times\Omega\times S$ zu zeigen.

Sei zunächst $\xi_t(x,\omega) = \mathbf{1}_\Gamma(t,\omega)\cdot\mathbf{1}_B(x)$, $\Gamma \in \mathfrak{P}(\mathbb{F})$, $B \in \mathfrak{S}$; dann ist $(t,\omega) \mapsto \mathbf{1}_\Gamma(t,\omega)$ $\mathfrak{P}(\mathbb{F})$–mb , und somit gilt eine Darstellung (2.6); daraus folgt sofort eine Darstellung für

$(t,\omega,x) \mapsto \mathbf{1}_\Gamma(t,\omega)\cdot\mathbf{1}_B(x)$.

Mit einem Dynkinargument und maßtheoretischer Induktion folgt dann die Behauptung.

"(ii) ⇒ (i)" Wir definieren $D := \bar{\mathbb{N}}_0\times\Omega_\infty^o\times[0,\infty)$ und

$Y_t := (n,(H_n,\infty,e,...),t)$ für $t \in (T_n,T_{n+1}]$ (bzw. $[0,T_1]$ für n=0) bzw.

$Y_t := (\infty,H_\infty,t)$ für $t \in [T_\infty,\infty)$.

Dann ist $Y = (Y_t)$ ein Prozeß mit Zustandsraum D. Aus (a) folgt, daß Y vorhersagbar ist.

Seien nun $f_n : \Omega_n^o\times[0,\infty)\times S \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ gegeben; dann setzen wir

$$f(n,(h,\infty,e,...),t,x) := \begin{cases} f_n(h,t,x) & \text{für } h \in \Omega_n^o \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ und erhalten

$f(Y_t,x) = f_n(H_n,t,x)$ für $t \in (T_n,T_{n+1}]$ (bzw. $[0,T_1]$ für n=0 bzw. $[T_\infty,\infty)$ für $n=\infty$).. []

Definition 1. Eine Funktion $\eta : [0,\infty) \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ soll **regulär** [cadlag, RCLL] genannt werden, wenn η rechtsstetig ist und die linksseitigen Limiten $\lim_{s\uparrow t} \eta(s)$ für $t>0$ existieren.

2.8 Darstellungssatz. Sei Y ein $\mathbb{F}$–adaptierter Prozeß auf $(\Omega,\mathfrak{F})$ mit Zustandsraum $(\bar{\mathbb{R}},\bar{\mathfrak{B}})$ und regulären Pfaden. Dann besitzt Y die Darstellung:

(2.9) $$Y_t = \sum_0^\infty f_n(t,H_n)\cdot \mathbf{1}_{\{T_n\le t<T_{n+1}\}} + f_\infty(t,H_\infty)\cdot \mathbf{1}_{\{T_\infty\le t\}},$$

für gewisse mb Funktionen $f_n : [0,\infty)\times\Omega_n^o \mapsto \bar{\mathbb{R}}$.

Wichtig ist, daß in (2.9) "$t<T_{n+1}$" steht im Gegensatz zu (2.6).

Beweis. Sei $Y_{t-} := \lim_{k\to\infty} Y_{(t-1/k)^+}$, dann ist (Y_{t-}) $\mathbb{F}$–adaptiert und linksstetig, also vorhersagbar. Nach Satz 2.5 hat man somit eine Darstellung:

$$Y_{t-} = g_0(t,H_0)\cdot \mathbf{1}_{\{0\le t\le T_1\}} + \sum_1^\infty g_n(t,H_n)\cdot \mathbf{1}_{\{T_n<t\le T_{n+1}\}} + g_\infty(t,H_\infty)\cdot \mathbf{1}_{\{T_\infty\le t\}}.$$

Es ist einfach zu zeigen, daß gilt: $Y_t = \lim_{k\to\infty} Y_{(t+1/k)-}$. Somit hat man:

$$Y_t = \underline{\lim}_{k\to\infty} g_0(t+\tfrac{1}{k},H_0)\cdot \mathbf{1}_{\{0\le t<T_1\}} + \sum_1^\infty \underline{\lim}_{k\to\infty} g_n(t+\tfrac{1}{k},H_n)\cdot \mathbf{1}_{\{T_n\le t<T_{n+1}\}}$$
$$+ \underline{\lim}_{k\to\infty} g_\infty(t+\tfrac{1}{k},H_\infty)\cdot \mathbf{1}_{\{T_\infty\le t\}}.$$

Mit $f_n(t,H_n) := \underline{\lim}_{k\to\infty} g_n(t+\frac{1}{k},H_n)$ folgt die Behauptung. []

2.10 Bemerkung. Ist umgekehrt Y ein Prozeß mit der Darstellung (2.9), so ist Y progressiv.

Der Beweis ist eine Übungsaufgabe. []

2.11 Korollar. Es gilt für $0\le t\le\infty$:

$$\mathfrak{F}_t = \left\{ A = \cup_{n=0}^\infty \{T_n\le t<T_{n+1}\}\cap A_n \cup \{T_\infty\le t\}\cap A_\infty ;\ A_n\in\sigma(H_n)\right\}.$$

Beweis. Der Beweis kann elementar geführt werden, indem man zeigt, daß das rechte Mengensystem eine σ–Algebra ist. Die Inklusion "$\subset$" folgt aber auch aus 2.9 mit $Y_s := \mathbf{1}_{[t,\infty)}(s)\cdot \mathbf{1}_A$ für $A\in\mathfrak{F}_t$. []

2.12 Satz. $\mathfrak{F}_\tau = \sigma((X,N)^\tau) := \sigma((X_{s\wedge\tau},N_{s\wedge\tau}), s\ge 0)$ für jede $\mathbb{F}$–Stoppzeit τ.

Beweis: Sei $\mathfrak{A}_\tau := \sigma((X,N)^\tau)$.

(i) Die Beziehung $\mathfrak{F}_\tau \supset \mathfrak{A}_\tau$ gilt stets, da $(X_{s\wedge\tau},N_{s\wedge\tau})$ $\mathfrak{F}_{s\wedge\tau}$–mb ist mit $\mathfrak{F}_{s\wedge\tau}\subset\mathfrak{F}_\tau$.

(ii) Wir setzen:

$\tau_k := m/2^k =: t_m$ auf $A_m := \{t_{m-1} \le \tau < t_m\}$ bzw. $\tau_k := \infty$ auf $A_\infty := \{\tau = \infty\}$.
Es ist $A_m := \{\tau_k = t_m\} \in \mathfrak{F}_{t_m}$ und τ_k Stoppzeit mit $\tau_k \downarrow \tau$. Wir zeigen zunächst:

(•) $\mathfrak{F}_\tau \subset \mathfrak{A}_{\tau^k}$

Sei $A \in \mathfrak{F}_\tau$, dann ist $A \cap A_m = \{t_{m-1} \le \tau\} \cap A \cap \{\tau < t_m\} \in \{\tau_k \ge t_m\} \cap \mathfrak{F}_{t_m}$.
Wegen $\{t_{m-1} \le \tau\} = \{\tau_k \ge t_m\}$ und $A \cap \{\tau < t_m\}$ genügt es zu zeigen:

(••) $\{\tau_k \ge t_m\} \cap \mathfrak{F}_{t_m} \subset \mathfrak{A}_{\tau^k}$.

Wie bei der Definition von $\mathfrak{F}_{\tau^k-}$, können Ereignisse aus dem linken Mengensystem als Ereignisse der Vergangenheit bis τ^k afgefaßt werden. Ein erster Schritt für (••) ist:

(*) $\{\tau_k \ge t_m\} \cap \mathfrak{F}_{t_m} \subset \{\tau_k \ge t_m\} \cap \mathfrak{A}_{\tau^k}$.

Man hat $s = s \wedge \tau_k \ \forall\, s \le t_m$ auf $\{\tau_k \ge t_m\}$; somit folgt für $s \le t_m$:
$\{\tau_k \ge t_m\} \cap \{(X_s, N_s) \in B\}$
$= \{\tau_k \ge t_m\} \cap \{(X_{s\wedge\tau_k}, N_{s\wedge\tau_k}) \in B\} \in \{\tau_k \ge t_m\} \cap \mathfrak{A}_{\tau^k}$.
Damit ergibt sich (*).
Wir zeigen mit Induktion nach m: $A_m \in \mathfrak{A}_{\tau^k}$.
Für m = 1 gilt wegen $\tau_k \ge t_1$ und (*): $A_1 \in \mathfrak{F}_{t_1} \subset \mathfrak{A}_{\tau^k}$.
"$\{1,...,m\} \to m+1$" Es gilt mit (*) und $\{\tau_k \le t_{m+1}\} = \{\tau < t_{m+1}\}$:
$A_{m+1} = \{\tau_k \ge t_{m+1}\} \cap \{\tau_k \le t_{m+1}\}$
$= \{\tau_k \ge t_{m+1}\} \cap \{\tau < t_{m+1}\} \in \{\tau_k \ge t_{m+1}\} \cap \mathfrak{F}_{t_{m+1}} \subset \{\tau_k \ge t_m\} \cap \sigma((X,N)^{\tau_k})$.
Nun ist nach Induktionvoraussetzung wegen $\{\tau_k \ge t_{m+1}\} = \cap_1^m A_n^c$

(**) $\{\tau_k \ge t_{m+1}\} \in \sigma((X,N)^{\tau_k})$.

Somit folgt: $A_{m+1} \in \mathfrak{A}_{\tau^k}$. Es folgt auch $A_\infty = \Omega \setminus \cup_1^\infty A_n \in \mathfrak{A}_{\tau^k}$.
Also haben wir mit **(*)** und (**) auch (••).
(iii) Wir zeigen jetzt analog zu 2.4 $[\mathbb{F}_+ = \mathbb{F}]$, daß sich für $k \to \infty$ $\mathfrak{A}_{\tau^k}$ und $\mathfrak{A}_\tau$ immer weniger unterscheiden. Setze $B_k := \{T_n \notin (\tau, \tau + (\frac{1}{2})^k], \tau < \infty\} \cup \{\tau = \infty\} \uparrow \Omega$. Dann erhält man wegen $\tau < \tau^k \le \tau + (\frac{1}{2})^k$ mit einer Fallunterscheidung "$\tau \le s$" und "$\tau > s$":
$B_k \cap \{(X,N)_{s\wedge\tau_k} \in B\} = B_k \cap \{(X,N)_{s\wedge\tau} \in B\} \in B_k \cap \mathfrak{A}_\tau \ \forall\, s \ge 0$ und somit
$B_k \cap \mathfrak{A}_{\tau^k} \subset B_k \cap \mathfrak{A}_\tau$.
Nun ergibt sich aus (•):

(+) $B_k \cap \mathfrak{F}_\tau \subset B_k \cap \mathfrak{A}_\tau$.

Jetzt folgt $\mathfrak{F}_\tau \subset \mathfrak{A}_\tau$ aus (+) wie im Beweis von 2.4. $[\,]$

2.13 Korollar. (a) $\mathfrak{F}_{T_n} = \sigma(H_n)$, $0 \le n \le \infty$.

(b) $\mathfrak{F}_{T_{n-}} = \sigma(H_{n-1}, T_n)$, $0 < n < \infty$.

Beweis: a) Gemäß 2.3d ist nur noch "$\subset$" zu zeigen. Nach 2.12 gilt:

$$\mathfrak{F}_{T_n} = \sigma((X_{s \wedge T_n}, N_{s \wedge T_n}),\ s \ge 0).$$

Nach Def. von (X,N) folgt aber leicht $\sigma((X_{s \wedge T_n}, N_{s \wedge T_n}),\ s \ge 0) \subset \sigma(H_n)$.

b) "$\supset$" Wir zeigen zunächst:

(*) $\mathfrak{F}_{T_{n-1}} \subset \mathfrak{F}_{T_n-}$.

Für $A \in \mathfrak{F}_{T_{n-1}}$ hat man nämlich $A = A_1 \cup A_\infty$ mit $A_1 = A \cap \{T_{n-1} < T_n\} \in \mathfrak{F}_{T_n-}$ nach 1.20 und $A_\infty = A \cap \{T_{n-1} = \infty\} \in \mathfrak{F}_{T_{n-1}-} \subset \mathfrak{F}_{T_n-}$ nach (1.19) und 1.18 (0).

Aus (*) folgt, daß H_{n-1} $\mathfrak{F}_{T_n-}$–mb ist. Gemäß 1.18a ist auch T_n $\mathfrak{F}_{T_n-}$–mb.

"$\subset$" Es ist $\mathfrak{F}_0 \subset \sigma(H_{n-1}, T_n)$. Es genügt nun zu zeigen:

(**) $\{T_n > t\} \cap \mathfrak{F}_t \subset \{T_n > t\} \cap \sigma(H_{n-1})$ $\left[\subset \sigma(H_{n-1}, T_n)\right]$.

Nun gilt für $s \le t$:

$\{T_n > t\} \cap \{Z_k \in B,\ T_k \le s\} \in \{T_n > t\} \cap \sigma(H_{n-1})$ $\left[\text{sogar} = \emptyset \text{ für } k \ge n\right]$.

Mit 2.3b folgt (**). $[\,]$

2.14 Korollar. Sei τ $\mathbb{F}$–Stoppzeit.

(a) $\{\tau < T_{n+1}\} \cap \mathfrak{F}_\tau \subset \{\tau < T_{n+1}\} \cap \sigma(H_n)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

b) Sei $Y : \Omega \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{F}_\tau$–mb; dann besitzt Y die Darstellung:

(2.15) $$Y = \sum_0^\infty g_n(H_n) \cdot \mathbf{1}_{\{T_n \le \tau < T_{n+1}\}} + g_\infty(H_\infty) \cdot \mathbf{1}_{\{T_\infty \le \tau\}},$$

für gewisse mb Funktionen $g_n : \Omega_n^o \mapsto \bar{\mathbb{R}}$.

Der Beweis ist eine Übungsaufgabe.

Wendet man (2.15) auf τ an, so sieht man, daß τ auf $\{T_n \le \tau < T_{n+1}\}$ durch H_n bestimmt ist. Unser nächstes Ziel ist eine genauere Darstellung von Stoppzeiten in der Form:

(2.16) $$\begin{aligned} &\tau = T_n + h_n(H_n) && \text{für } T_n \le \tau,\ S_{n+1} > h_n(H_n) \\ &\tau \ge T_{n+1} && \text{für } T_n \le \tau,\ S_{n+1} \le h_n(H_n) \end{aligned}$$

mit gewissen mb Funktionen $h_n : \Omega_n^o \mapsto [0,\infty]$.

Hat man vor dem n–ten Sprung noch nicht gestoppt, so legt man eine Wartezeit $h_n(H_n)$ fest. Tritt der nächste Sprung nicht vor $T_n + h_n(H_n)$ so stoppt man bei $T_n + h_n(H_n)$. Anderenfalls stoppt man nicht und ist der Ausgangsituation mit n+1 anstelle von n.

Für τ gilt eine Darstellung (2.15). Aus (2.16) folgt dann notwendigerweise:

$g_n(H_n) = \tau = T_n + h_n(H_n)$ auf $\{T_n \le \tau < T_{n+1}\}$. Dies führt wegen $h_n \ge 0$ zu dem Ansatz:

(2.17) $\quad h_n(H_n) := [g_n(H_n) - T_n]^+$.

2.18 Lemma. Ist τ eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit, so gibt es eine Darstellung (2.15) mit:

$$\tau \ge T_{n+1} \Rightarrow g_n(H_n) \ge T_{n+1}.$$

Der Beweis soll von 2.18 soll noch zurückgestellt werden.Die Darstellung (2.16) folgt nun aus

2.19 Satz. Sei τ eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit. Dann gilt existieren zu $n \in \mathbb{N}_0$ mb Funktionen

$h_n : \Omega_n^o \mapsto [0,\infty]$, sodaß gilt:

(2.20) $\quad \tau \wedge T_{n+1} = (T_n + h_n(H_n)) \wedge T_{n+1}$ auf $\{\tau \ge T_n\}$.

Beweis. Wir wählen g_n wie in 2.18 und definieren h_n über (2.17).
Im Fall (i) $T_n \le \tau < T_{n+1}$ hat man $\tau = g_n(H_n)$ und somit $g_n(H_n) \ge T_n$; es folgt:
$\tau = g_n(H_n) = T_n + h_n(H_n) < T_{n+1}$.
Im Fall (ii) $\tau \ge T_{n+1}$ hat man nach 2.18: $g_n(H_n) \ge T_{n+1} \ge T_n$; es folgt:
$g_n(H_n) = T_n + h_n(H_n) \ge T_{n+1}$ und damit

$$\tau \wedge T_{n+1} = T_{n+1} = (T_n + h_n(H_n)) \wedge T_{n+1}. \; \square$$

Die Eigenschaft in 2.18 muß nicht für jede Darstellung gelten wie das folgende Beispiel zeigt:.

2.21 Beispiel. Sei $\Omega = \{\omega_1,\omega_2\}$, $E = \{a,b,e\}$ mit $0 < a < 1 < b$, $Z_0(\omega_1) = a$, $Z_0(\omega_2) = b$, $T_1 \equiv 1$; $Z_1 \equiv e$, die übrigen Größen werden nicht gebraucht. Wir betrachten nun die Stoppzeit

$$\tau := Z_0.$$

Dann haben wir die beiden Darstellungen wegen $T_2 \equiv \infty \equiv T_\infty$, $\tau < T_\infty$:

$$\tau = a \cdot \mathbf{1}_{\{0 \le \tau < T_1\}} + b \cdot \mathbf{1}_{\{T_1 \le \tau < T_2\}},$$

$$\tau = Z_0 \cdot \mathbf{1}_{\{0 \le \tau < T_1\}} + Z_0 \cdot \mathbf{1}_{\{T_1 \le \tau < T_2\}}.$$

Nun gilt aber bei der ersten Darstellung

$$\{g_0(H_0)\ (= a)\ \ge T_1\} = \emptyset,$$

dagegen bei der zweiten Darstellung wie gewünscht

$$\{g_0(H_0)\ (= Z_0)\ \ge T_1\} = \{\tau \ge T_1\}. \; \square$$

Um eine geeignete Darstellung (2.15) zu erhalten, müssen wie etwas ausholen.

Definition 2. Die **Restriktion von H_∞ auf $[0,t]$** , $t\geq 0$, sei $H_\infty^t = (Z_0,T_1^t,Z_1^t,T_2^t,Z_2^t,...)$ mit

$$(T_n^t,Z_n^t) := \begin{cases}(T_n,Z_n) & \text{für } T_n\leq t\\ (\infty\ ,e) & T_n>t\end{cases}.$$

Die **Restriktion von H_∞ auf $[0,t)$**, $t>0$, sei $H_\infty^{t-} = (Z_0,T_1^{t-},Z_1^{t-},T_2^{t-},Z_2^{t-},...)$ mit

$$(T_n^{t-},Z_n^{t-}) := \begin{cases}(T_n,Z_n) & \text{für } T_n<t\\ (\infty\ ,e) & T_n\geq t\end{cases}.$$

Entsprechend werden H_n^t, H_n^{t-} definiert.

2.22 Lemma. $\mathfrak{F}_t = \sigma(H_\infty^t)$, $t\geq 0$.

Beweis: Die Aussage ergibt sich aus 2.3b unter Beachtung von

$$\{Z_n^t \in B,\ T_n^t \leq s\} = \{Z_n \in B,\ T_n \leq s\wedge t\}$$

[und $\mathfrak{S}\otimes\overline{\mathfrak{B}}_1\cap[0,\infty] = \sigma(B\times[0,s];\ B\in\mathfrak{S},\ 0\leq s<\infty\}$, vgl. W.th.I].

2.23 Lemma. (a) $\mathfrak{F}_{t-} = \sigma\left(\left\{\{Z_n \in B,\ T_n \leq s\},\ n\in\mathbb{N}_0,\ 0\leq s<t,\ B\in\mathfrak{S}\right\}\right)$, $0<t<\infty$;

(b) $\mathfrak{F}_{t-} = \sigma(H_\infty^{t-})$, $0<t<\infty$.

Beweis: Der Beweis von (a) verläuft wie der von 2.3b;
der Beweis von (b) folgt wie in 2.22 aus:

$$\{Z_n^{t-}\in B,\ T_n^{t-}\leq s\} = \cup_k\{Z_n \in B,\ T_n \leq s\wedge(t-1/k)\}\ .\ [\,]$$

Für den Beweis von 2.18 betrachten wir erst einmal $\{\tau\geq t\}$.

2.24 Lemma. Ist τ eine Stoppzeit, so existiert eine mb Funktion $\psi : [0,\infty]\times\Omega_\infty^o \mapsto [0,\infty)$ mit

$$\mathbf{1}_{\{\tau\geq t\}} = \psi(t,H_\infty) = \psi(t,H_\infty^{t-})\ \ \forall\, t\geq 0 \text{ (auf } \Omega).$$

Beweis. Setze $Y_t := \mathbf{1}_{\{\tau\geq t\}}$. Dann ist Y_t $\mathfrak{F}_t$–mb und (Y_t) hat linksstetige Pfade; also ist (Y_t) vorhersagbar. Gemäß 2.5 gilt eine Darstellung

$$Y_t = f_0(t,H_0)\cdot\mathbf{1}_{\{0\leq t\leq T_1\}} + \sum_1^\infty f_n(t,H_n)\cdot\mathbf{1}_{\{T_n<t\leq T_{n+1}\}} + f_\infty(t,H_\infty)\cdot\mathbf{1}_{\{T_\infty\leq t\}}.$$

Nun hat man

(2.25)
$$\{T_n<t\} = \{T_n^{t-}<t\},\ \{T_n\geq t\} = \{T_n^{t-}\geq t\},$$
$$\{T_\infty\leq t\} = \{T_\infty^{t-}\leq t\} \quad \text{mit } T_\infty^{t-} = \lim_n T_n^{t-},\ t>0\ .$$

Die ersten Beziehungen sind offensichtlich; die letzte folgt aus:

$$\{T_\infty\leq t\} = \{T_n<t\ ,\ \forall\, n\in\mathbb{N}\} = \{T_n^{t-}<t\ ,\ \forall\, n\} = \{T_\infty^{t-}\leq t\}.$$

Zudem gilt: $H_n = H_n^{t-}$ auf $\{T_n<t\}$, $H_\infty = H_\infty^{t-}$ auf $\{T_\infty \le t\}$. Es folgt:

$$Y_t = f_0(t,H_0^{t-})\cdot \mathbf{1}_{\{0\le t\le T_1^{t-}\}} + \sum_1^\infty f_n(t,H_n^{t-})\cdot \mathbf{1}_{\{T_n^{t-}<t\le T_{n+1}^{t-}\}}$$
$$+ f_\infty(t,H_\infty^{t-})\cdot \mathbf{1}_{\{T_\infty^{t-}\le t\}} =: \psi(t,H_\infty^{t-}) \quad \text{mit}$$

$$\psi(t,(z_0,t_1,z_1,...)) := ... + \sum_1^\infty f_n(t,(z_0,t_1,...,z_n))\cdot \mathbf{1}_{\{t_n<t\le t_{n+1}\}} + ... \; . \; []$$

Um eine geeignete Darstellung wie in 2.18 zu erhalten, muß man Ω groß genug wählen. Im Beispiel war Ω zu klein. Dazu gehen wir zu einem kanonischen Raum über. Man kann wählen, ob man die S_n als gegeben ansieht und die T_n über die S_n definiert oder umgekehrt. Die Konstruktion eines W–Maßes ist in der Regel einfacher über die S_n, während die T_n für die weitere Theorie die wichtigere Rolle übernehmen. Hier soll deshalb die zweite Möglichkeit weiterverfolgt werden, während im nächsten Paragraphen wieder die erste Möglichkeit gewählt wird. Als kanonischer W–Raum, auf dem $Z_0,T_1,Z_1,T_2,...$ als Projektionen gewählt werden können, bietet sich zunächst Ω_∞^o an. Dieser enthält aber noch Folgen wie $(z,\infty,e,1,z,...)$, die der Eigenschaft (2.1b) widersprechen.

Definition 3. Als kanonischen Raum Ω^* wählen wir einen Bildraum von H_∞ mit:

$h \in \Omega^* :\Leftrightarrow h = (z_0,t_1,z_1,t_2,...) \in \Omega_\infty^o$ mit

(a) $0 < t_1 \le t_2 \le ...,$

(b) $t_n < t_{n+1}$ für $t_n < \infty$,

(c) $t_n = t_{n+1}$, $z_n = z_{n+1} = e$ falls $t_n = \infty$.

Seien $T_n^*:\Omega^* \mapsto [0,\infty]$ und $Z_n^*:\Omega^* \mapsto S$ die Projektionen mit $T_n(h) := t_n$ und $Z_n^*(h) := z_n$, $\mathfrak{F}^*$ die Spur–σ–Algebra auf Ω^* von der Produkt–σ–Algebra auf Ω_∞^o, $S_n^* = T_n^* - T_{n-1}^*$ mit $T_0^* := 0$ und $\infty-\infty := \infty$. Größen, die auf Ω definiert sind, sind jetzt auch auf Ω^* erklärt und werden durch "*" gekennzeichnet. Ferner setzen wir für $h \in \Omega^*$:

$h^t := H_\infty^{*t}(h)$, $h^{t-} := H_\infty^{*t-}(h)$.

Wir benötigen die folgenden offensichtlichen Eigenschaften:

(2.26) $H_\infty(\omega) \in \Omega^* \;\forall\, \omega \in \Omega$; $h^t, h^{t-} \in \Omega^* \;\forall\; t > 0, h \in \Omega^*$.

2.27 Satz. Eine Funktion $\tau : \Omega \mapsto [0,\infty]$ ist genau dann eine Stoppzeit, wenn eine Stoppzeit τ^* auf Ω^* existiert mit $\tau = \tau^*(H_\infty)$.

Beweis: "dann" Diese Richtung ist eine einfache Übungsaufgabe. Sie wird im folgenden nicht benötigt; der Beweis soll deshalb weggelassen werden.

"genau dann" Wir wählen ψ gemäß 2.24, also: $\mathbf{1}_{\{\tau \geq t\}} = \psi(t,H_\infty^{t-})$. Wir setzen:

$$\tau^*(h) := \inf \{s \in \mathbb{Q};\ s>0,\ \psi(s,h^{s-}) = 0\} .$$

Dann gilt $\tau^*(H_\infty) = \inf \{s \in \mathbb{Q};\ s>0,\ \psi(s,H_\infty^{s-}) = 0\} = \inf \{s \in \mathbb{Q};\ s > \tau\} = \tau$

sowie $\{h \in \Omega^*;\ \tau^*(h) < t\} = \cup_{s\in\mathbb{Q},0<s<t} \{\psi(s,h^{s-}) = 0\} \in \mathfrak{F}_t^*$, da $h \mapsto h^{s-}$ nach 2.23b $\mathfrak{F}_{t-}^*$–mb ist.

Damit ist τ^* nach 1.6 eine $\mathbb{F}_+^*$–Stoppzeit mit $\mathbb{F}_+^* = \mathbb{F}^*$ gemäß 2.4. $[\,]$

Beweis von 2.18. Wir beginnen mit

(2.28) $\quad (h^{s-})^{t-} = h^{t-}$ für $0<t\leq s\leq\infty$, wobei

$h^{t-} := h$ für $t=\infty$.

Zu τ sei τ^* wie in 2.27 gewählt. Gemäß 2.14 besitzt τ^* eine Darstellung

(2.28a) $\quad \tau^*(h) = \sum_0^\infty g_n^*(h_n)\cdot \mathbf{1}_{\{t_n\leq\tau^*<t_{n+1}\}} + g_\infty^*(h)\cdot \mathbf{1}_{\{t_\infty\leq\tau^*\}}$, $h = (z_0,t_1,z_1,...)$,

$h_n = (z_0,t_1,...,z_n)$, $t_\infty = \sup t_n$.

Ferner gilt nach 2.24

$\mathbf{1}_{\{\tau^*\geq t\}}(h) = \psi(t,h^{t-}) = \psi(t,(h^{t-})^{t-}) = \mathbf{1}_{\{\tau^*\geq t\}}(h^{t-})\ \forall\ t>0$ (auf Ω^*), d.h.

(2.28b) $\quad \tau^*(h) \geq t \ \Leftrightarrow\ \tau^*(h^{t-}) \geq t \Leftrightarrow \tau^*(h^{s-}) \geq t,\ \forall\ 0 < t \leq s \leq\ \infty,\ h \in \Omega^*;$

dabei wurde (2.28) benutzt. Es folgt:

(2.28c) $\quad t \leq \tau^*(h) < s \ \Leftrightarrow\ t \leq \tau^*(h^{s-}) < s$ für $0<t<s\leq\infty$, $h \in \Omega^*$.

Für $h = (z_0,t_1,z_1,...)$ setzen wir nun in (2.28b) $t = t_n$; dann folgt:

$\tau^*(h) \geq t_n \ \Leftrightarrow\ \tau^*(h^{t_n-}) \geq t_n$. Dabei ist

(2.28d) $\quad h^{t_n-} = (h_{n-1},\infty,e,\infty,e,...)$.

Also erhalten wir

(2.28e) $\quad \tau^*(h) \geq t_n \ \Leftrightarrow \tau^*((h_{n-1},\infty,e,\infty,e,...)) \geq t_n$.

Sei

(2.28f) $\quad B_n := \{h_n = (h_{n-1},t_n,z_n) \in \Omega_n^o;\ (h_n,\infty,e,...) \in \Omega^*,\ \tau^*((h_{n-1},\infty,e,...)) \geq t_n\}$;

dann gilt: "$\tau^*(h) \geq t_n \ \Leftrightarrow h_n := H_n^*(h) \in B_n$" . Wir definieren nun

(2.28g) $\quad g_n(h_n) := \begin{cases} \infty & \text{für } h_n \in \Omega_n^o \setminus B_n \\ \tau^*((h_n,\infty,e,\infty,e,...) & \text{für } h_n \in B_n \end{cases}$.

Gemäß (2.28c) mit $t=t_n$, $s=t_{n+1}$ und (2.28a) hat man einerseits für $h = (z_0,t_1,z_1,...)$:

$t_n \le \tau^*(h) < t_{n+1} \Leftrightarrow \; t_n \le \tau^*(h^{t_{n+1}-}) < t_{n+1}$

$\Rightarrow h_n \in B_n$ und $\tau^*(h) = g_n^*(h_n) = \tau^*(h^{t_{n+1}-}) = g_n(h_n)$.

Damit ergibt sich gemäß (2.28a) auch die Darstellung:

(2.28h) $\tau^*(h) = \sum_0^\infty g_n(h_n) \cdot \mathbf{1}_{\{t_n \le \tau^* < t_{n+1}\}} + g_\infty(h) \cdot \mathbf{1}_{\{t_\infty \le \tau^*\}}$, $h = (z_0,t_1,z_1,...)$.

Andererseits gilt auch nach (2.28e)

$\tau^*(h) \ge t_{n+1}$ $(\ge t_n) \Rightarrow \tau^*((h_n,\infty,e,e,...)) \ge t_{n+1}$ und $h_n \in B_n$,

somit haben wir schließlich:

(2.28i) $\tau^*(h) \ge t_{n+1} \Rightarrow g_n(h_n) \ge t_{n+1}$.

Mit den g_n haben wir nun die gewünschte Darstellung; denn es folgt jetzt auf Ω:

(2.28h)' $\tau = \tau^*(H_\infty) = \sum_0^\infty g_n(H_n) \cdot \mathbf{1}_{\{T_n \le \tau < T_{n+1}\}} + g_\infty^*(H_\infty) \cdot \mathbf{1}_{\{T_\infty \le \tau\}}$.

(2.28i)' $\tau = \tau^*(H_\infty) \ge T_{n+1} \Rightarrow g_n(H_n) \ge T_{n+1}$. []

In der Situation $\tau \ge T_n$ ist gemäß (2.17) $g_n(H_n)$ der gesuchte Zeitpunkt, an dem gestoppt wird, wenn kein weiterer Sprung zwischen T_n und $g_n(H_n)$ erfolgt. Dabei bedeutet (2.28g) gerade, daß $g_n(H_n)$ als der Zeitpunkt definiert ist, an dem man stoppt, wenn man in T_n die Vorgeschichte H_n beobachtet hat und davon ausgeht, daß kein weiterer Sprung mehr erfolgt.

2.29 Bemerkung.

Wir wissen nach 1.20 und 2.13: $\{\tau \ge T_n\} \in \mathfrak{F}_{T_n-} = \sigma(H_{n-1},T_n)$.

Aus (2.28e) können wir nun eine Verschärfung ableiten. Wir haben nämlich:

$\{\tau \ge T_n\} = \{\tau^*(H_\infty) \ge T_n\} = \{\tau^*(H_{n-1},\infty,e,...)) \ge T_n\}$. []

Lemma 2.30. $\mathfrak{F}_{t\wedge T_n} = \sigma(H_n^t)$.

Beweis: Wir setzen $S_n^t := T_n^t - T_{n-1}^t$, $n \ge 1$, mit $\infty - \infty := \infty$. Dann gilt $T_n^t = \sum_{m=1}^n S_m^t$ und die Folgen $(S_n^t, n \in \mathbb{N})$ und $(Z_n^t, n \in \mathbb{N}_0)$ erfüllen ebenfalls die Generalvoraussetzung von §2:

"$S_n^t = \infty \Rightarrow S_{n+1}^t = \infty$, $Z_n^t = e$ für $n \in \mathbb{N}$" wegen $S_n^t = \infty \Leftrightarrow T_n^t = \infty \Leftrightarrow T_n > t \Leftrightarrow T_n > t$, $Z_n^t = e \Rightarrow T_{n+1} > t$, $Z_n^t = e \Rightarrow T_{n+1}^t = \infty$, $Z_n^t = e \Rightarrow S_{n+1}^t = \infty$, $Z_n^t = e$.

Wir setzen in Anlehnung an 2.3b:

$\mathfrak{F}_s^t = \sigma\left(\left\{\{Z_n^t \in B,\, T_n^t \le u\},\, n \in \mathbb{N}_0,\, 0 \le u < \infty,\, u \le s,\, B \in \mathfrak{S}\right\}\right)$.

Dann haben wir wegen $\{Z_n^t \in B,\, T_n^t \le u\} = \{Z_n \in B,\, T_n \le u \wedge t\}$: $\mathfrak{F}_s^t = \mathfrak{F}_{t\wedge s}$. Aus 2.13 folgt schließlich: $\sigma(H_n^t) = \mathfrak{F}^t_{T_n^t} = \mathfrak{F}_{t\wedge T_n^t} = \mathfrak{F}_{t\wedge T_n}$ wegen $t \wedge T_n^t = t \wedge T_n$. []

§3 Stückweise deterministische Markoff–Prozesse.

Generalvoraussetzung: Es seien $(\Omega,\mathfrak{F})$ ein Meßraum, S ein metrischer Raum mit $e \in S$ und Borel –σ–Algebra $\mathfrak{S}$, (S_n), (Z_n), (T_n), H_n , (N_t), E, $\mathfrak{E}$, $\mathbb{F}$ wie in §2,
P ein W–Maß auf $(\Omega,\mathfrak{F})$. Anstelle von X schreiben wir jetzt $\xi = (\xi_t) = (Z_{N_t})$.

Definition 1. $((T_n,Z_n), n\in\mathbb{N}_0)$ heißt **Markoffscher Erneuerungsprozeß** (**MEP**),
wenn eine ÜW Π von S nach E existiert, sodaß $\forall\, C \in \mathfrak{E}$, $n\in\mathbb{N}_0$ gilt:
$\Pi(Z_n;C)$ ist eine Version von $P\left[(S_{n+1},Z_{n+1}) \in C \,|\, H_n\right]$.
$\xi = (Z_{N_t})$ heißt dann **Semi–Markoff–Prozeß**.

3.1 Bemerkung. In Def. 1 gilt stets:

$$\Pi(e;\{(\infty,e)\}) = 1 \text{ , falls } P\left[\cup_{n\geq 1}\{T_n = \infty\}\right] > 0.$$

Wähle $n\geq 1$ mit $P\left[T_n = \infty\right] > 0$. Mit (2.1a) hat man

$$\{T_n = \infty\} = \cup_{m=1}^{n}\{S_m = \infty\} = \{T_n = \infty, Z_n = e, S_{n+1} = \infty, Z_{n+1}=e\}.$$

Somit ergibt sich

$$P\left[T_n = \infty\right] = P\left[T_n = \infty, Z_n = e, S_{n+1} = \infty, Z_{n+1}=e\right]$$
$$= \int_{\{T_n = \infty,\, Z_n=e\}} P\left[S_{n+1} = \infty, Z_{n+1}=e \,|\, H_n\right]\, dP$$
$$\leq \int_{\{T_n = \infty,\, Z_n=e\}} 1\, dP = P\left[T_n = \infty, Z_n = e\right] = P\left[T_n = \infty\right] \text{ , also}$$

$1 = P\left[S_{n+1} = \infty, Z_{n+1}=e \,|\, H_n\right] = \Pi(Z_n;(\infty,e)) = \Pi(e;\{(\infty,e)\})$ f.s. auf $\{T_n = \infty\}$. [ ]

3.2 Beispiele. (a) Ein Markoffscher Erneuerungsprozeß ist eine Verallgemeinerung eines Erneuerungsprozesses (T_n). Man wählt $Z_n := 0$, $S = \{0,e\}$ und $\Pi(0;D\times\{0\}) = P\left[S_n \in D\right]$.
(b) Ein Markoffscher Erneuerungsprozeß ist eine Verallgemeinerung eines zeitdiskreten Markoff–Prozesses (Z_n). Setze $S_n \equiv 1$, also $T_n = n$. [ ]

Später werden wir noch sehen, daß ein Semi–Markoff–Prozeß auch eine Verallgemeinerung eines Markoffschen Sprungsprozesses ist.

3.3 Beispiel. Das M/G/1–Warteschlangenmodell.
In einem Warteschlangenmodell werde der Ankunftsstrom durch einen Poisson–Prozeß mit Parameter λ beschrieben; die Bedienungszeit habe eine beliebige Verteilungsfunktion F. Ferner mögen die üblichen Unabhängigkeitsbedingungen vorliegen. Ist T_n der Zeitpunkt der n–ten Bedienungsbeendigung und Z_n die Warteschlangenlänge unmittelbar nach T_n, $S = \mathbb{N}_0$, so liegt der folgende Ansatz nahe:

$$P\left[S_{n+1}\leq t, Z_{n+1}= i+k-1 \,|\, H_n\right] = R_k(t) := \int_0^t e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^k}{k!}\, F\left[ds\right] \quad \text{auf } \{Z_n=i\} \text{ , } i>0,$$

$$P\left[S_{n+1}\leq t,\, Z_{n+1}= k \,|\, H_n\right] = \mathrm{Exp}(\lambda)\star R_k(t) := \int_0^t R_k(t-s)\,\mathrm{Exp}(\lambda)\left[ds\right] \quad \text{auf } \{Z_n=0\}.$$

Hier gilt [im Gegensatz zu einer zeitstetigen Markoff–Kette] i.a.:
$P[S_{n+1}\le t,\, Z_{n+1}= i+k-1 \mid H_n] \neq P[S_{n+1}\le t \mid H_n]\cdot P[Z_{n+1}= i+k-1 \mid H_n]$ []

Es ist offenbar leichter, die stochastische Entwicklung von (S_n,Z_n) anstelle von (T_n,Z_n) zu beschreiben.

3.4 Proposition. Es seien Π ÜW von S nach E mit $\Pi(e;\{(\infty,e)\}) = 1$,

$\Omega_\infty^o = S \times \overset{\infty}{\underset{1}{\times}} E$ wie in §2, $\mathfrak{F}_\infty^o = \mathfrak{S} \otimes \overset{\infty}{\underset{1}{\otimes}} \mathfrak{E}$. Auf Ω_∞^o seien definiert

Z_0^o als Projektion S, (S_n^o,Z_n^o) , $n\ge 1$, als n–te Projektion auf E,

$H_n^o := (Z_0^o,S_1^o,...,Z_n^o)$, $H_\infty^o := (Z_0^o,S_1^o,,Z_1^o,...) = id_{\Omega_\infty^o}$, $T_n^o := \sum_1^n S_m^o$.

(a) Es existiert zu $x \in S$ genau ein W–Maß P_x auf $(\Omega_\infty^o,\mathfrak{F}_\infty^o)$, sodaß gilt:

i) $P_x[Z_0^o = x] = 1$;

ii) eine Version von $P_x[(S_{n+1}^o,Z_{n+1}^o) \in C \mid H_n^o]$ ist $\Pi(Z_n^o;C)$, $n\in\mathbb{N}_0$;

iii) $((T_n^o,Z_n^o), n\in\mathbb{N}_0)$ ist ein MEP auf $(\Omega_\infty^o,\mathfrak{F}_\infty^o,P_x)$ mit ÜW Π $\forall$ x.

iv) $x \mapsto P_x[\Gamma]$ ist $\mathfrak{S}$–mb für $\Gamma \in \mathfrak{F}_\infty^o$.

(b) Ist $((T_n,Z_n), n\in\mathbb{N}_0)$ ein MEP auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit ÜW Π, so gilt:

(3.5) $$P[(Z_n,S_{n+1},Z_{n+1},...) \in \Gamma \mid H_n] = P_{Z_n}[H_\infty^o \in \Gamma] = P_{Z_n}[\Gamma] \text{ , } \Gamma \in \mathfrak{F}_\infty^o.$$

Beweis: Teil (a)(i) und (ii) folgt unmittelbar aus dem Satz von Ionescu–Tulcea, (iii) ist dann klar. Für (iv) und (b) überlegt man sich, daß nach Voraussetzung und Konstruktion gilt:

$x \mapsto P_x[(S_1^o,Z_1^o) \in C] = \Pi(x;C)$ ist mb und

$$P[(S_{n+1},Z_{n+1}) \in C \mid H_n] = \Pi(Z_n;C) = P_{Z_n}[(S_1^o,Z_1^o) \in C].$$

Dann zeigt man mit Induktion nach k: $x \mapsto P_x[(Z_0^o,S_1^o,...,Z_k^o) \in \Gamma_k]$ ist mb und

$$P[(Z_n,S_{n+1},...,Z_{n+k}) \in \Gamma_k \mid H_n] = P_{Z_n}[(Z_0^o,S_1^o,...,Z_k^o) \in \Gamma_k].$$

Der allgemeine Fall folgt schließlich mit einem Dynkinargument. []

Der Raum Ω_∞^o ist noch zu groß, um die Anforderungen an $Z_0^o,S_1^o,Z_1^o,...$ von §2 zu genügen.

Definition 2. Seien $\Omega^o \subset \Omega_\infty^o$, $\mathfrak{F}^o := \Omega^o \cap \mathfrak{F}_\infty^o$ derart, daß gilt:

$\omega^o \in \Omega^o \Leftrightarrow \omega^o = (z_0,s_1,z_1,s_2,...) \in \Omega_\infty^o$ mit
"$s_n = \infty \Rightarrow s_{n+1} = \infty$".

Die Restriktionen auf Ω^o der in Proposition 3.4 definierten Größen werden wieder mit dem gleichen Symbol bezeichnet. Die Restriktion von P_x auf $\mathfrak{F}^o$ ist wohldefiniert nach:

3.6 Proposition. Es liege die Situation von 3.4 vor; dann gilt:

(a) $\Omega^o \in \mathfrak{F}_\infty^o$, $\mathfrak{F}^o \subset \mathfrak{F}_\infty^o$;

(b) die $(S_n^o,\ n\geq 1)$ und $(Z_n^o,\ n\geq 0)$ erfüllen auf Ω^o die Voraussetzung (2.1a) aus der Generalvoraussetzung in §2;

(c) $P_x[\Omega^o] = 1,\ x \in S$,

(d) die Eigenschaften (a) (i) – (iv) und (b) aus 3.4 gelten auch für $(\Omega^o,\mathfrak{F}^o,P_x)$.

Beweis. Die Teile (a) und (b) sind einfach; dabei verwendet man "$S_n^o = \infty \Rightarrow Z_n^o = e$" (nach Konstruktion von E). Teil (c) erhält man aus $\Pi(e;\{(\infty,e)\}) = 1$. Teil (d) folgt dann aus (c). []

Definition 3. Eine Funktion $\varphi : [0,\infty) \times S \mapsto S$ heißt ein (deterministischer) **Fluß** (Driftfunktion) auf S, wenn $\varphi(t\,|\,\cdot)$ mb ist $\forall$ t, $\varphi(\cdot\,|\,x)$ stetig ist für $x \in S$, und wenn gilt:

(3.7) $\varphi(0\,|\,x) = x,\ \varphi(t+s\,|\,x) = \varphi(s\,|\,\varphi(t\,|\,x)),\ x \in S,\ s,t \geq 0.$

Durch einen Fluß wird gerade ein deterministischer stetiger Markoff–Prozeß erzeugt gemäß

$X_t = \varphi(t\,|\,X_0)$.

3.8 Beispiel. Zu einem Fluß gelangt man über Lösungen $\varphi =: \varphi(\cdot\,|\,x)$ des Anfangswertproblems bei autonomen DGlen

(3.9) $\frac{d}{dt}\varphi(t\,|\,x) = b(\varphi(t\,|\,x))\ ,\ t\geq 0,\ \text{mit}\ \varphi(0\,|\,x) = x.$

sofern die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gesichert ist wie etwa im Fall der Lipschitz–Stetigkeit von b. Es sind nämlich sowohl $\varphi(t+\cdot\,|\,x)$ als auch $\varphi(\cdot\,|\,\varphi(t\,|\,x))$ Lösungen ψ von

$\psi'(s) = b(\psi(s))\ ,\ s\geq 0,\ \text{mit}\ \psi(0) = \varphi(t\,|\,x)$. []

3.10 Lemma. Ein Fluß $\varphi(t\,|\,x)$ ist mb in (t,x).

Beweis. Der Prozeß $Y_t(x) := \varphi(t\,|\,x)$ ist ein stetiger $\mathbb{F}'$–adaptierter Prozeß auf S mit $\mathfrak{F}_t' := \mathfrak{S}\ \forall$ t. Er ist somit nach 1.4 $\mathbb{F}'$–progressiv. Nach 1.2c ist $(t,x) \mapsto Y_t(x)$ mb. []

3.11 Bemerkung. [Cinlar & Jacod (1981)].

Jeder stetige starke Markoff–Prozeß X mit Zustandsraum $\mathbb{R}^d$, dessen Pfade auf kompakten Zeitintervallen von beschränkter Variation sind, ist deterministisch, es existiert also ein Fluß φ mit $X_t = \varphi(t \mid X_0)$.
Wenn man also nicht–deterministische d–dim.starke MPe betrachten will, so muß man sich entweder von der Voraussetzung lösen, daß die Pfade von lokal beschränkter Variation sind.
Dies führt zu der Klasse der Diffusionsprozessen; dies sind Verallgemeinerungen der Brownschen Bewegung mit Drift und Dispersionskoeffizienten. Oder man muß sich von der Voraussetzung der Stetigkeit der Pfade lösen. Dies führt zu stochastischen Prozessen mit Sprüngen. Läßt man dann nur solche Pfade zu, deren Pfade in kompakten Intervallen nur endlich viele Sprünge haben, eventuell abgesehen von einem Explosionszeitpunkt, so führt dies zu der Klasse der stückweise determistischen Prozesse. Da der Prozeß nämlich zwischen den Sprüngen ebenfalls die Markoff–Eigenschaft besitzt, muß er dort einen deterministischen Verlauf haben, wenn die die Pfade von lokal beschränkter Variation sein sollen. []

Definition 4. Seien φ ein Fluß auf S mit $\varphi(t \mid e) = e \;\forall\; t \geq 0$,
Q eine ÜW von S nach S mit $Q(e;\{e\}) = 1$,
$\lambda : S \mapsto [0,\infty)$ eine mb Funktion mit $\Lambda(t,x) := \int_0^t \lambda(\varphi(s \mid x))\, ds < \infty \;\; \forall\; t \geq 0$, $\lambda(e) = 0$.
Sei Π ÜW von S nach E mit:

(3.12) $$\Pi(x;D\times B) := \int_D e^{-\Lambda(t,x)} \cdot \lambda(\varphi(t \mid x)) \cdot Q(\varphi(t,x);B)\, dt, \quad x \in S,\ D \in (0,\infty)\cap\mathfrak{B}_1,\ B \in \mathfrak{S}.$$

Ist nun $((T_n,Z_n),\ n\in\mathbb{N}_o)$ ein Markoffscher Erneuerungsprozeß mit ÜW Π und setzt man:

$$X_t := \begin{cases} \varphi(t-T_n \mid Z_n) & \text{für } T_n \leq t < T_{n+1} \\ e & \text{für } t \geq T_\infty \end{cases},$$

so heißt $X = (X_t)$ ein **stückweiser deterministischer Prozeß** oder **PDP** (PDP ≅ piecewise deterministic process), λ **Sprungrate** , $\lambda Q(x;B) := \lambda(x) \cdot Q(x;B)$ **Übergangskern**.

In der Definition 4 gilt stets:

(3.12)' $$\Pi(x;\{(\infty,e)\}) := e^{-\Lambda(\infty,x)}, \quad x \in S.$$

Wegen (3.12) und "$(\infty,x) \in E \Leftrightarrow x = e$" hat man nämlich
$\Pi(x;\{(\infty,e)\}) = \Pi(x;\{\infty\}\times S)$

$$= 1 - \Pi(x;(0,\infty)\times S) = 1 - \int_0^\infty e^{-\Lambda(t,x)} \cdot \lambda(\varphi(t,x))\, dt = e^{-\Lambda(\infty,x)}$$

nach folgendem Lemma:

3.13 Lemma. Sei $g : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ mb, und für $G(t) := \int_0^t g(s)\,ds$ sei $G(t) < \infty$,$t \geq 0$.

Dann gilt: $\int_0^t e^{\pm G(s)} \cdot g(s)\,ds = \pm\left[e^{\pm G(t)} - 1\right]$, $t \geq 0$.

Mit Hilfe der Zerlegung $g = g^+ - g^-$ und der Produktformel (4.21) läßt sich 3.13 auch für $g : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ zeigen.

Beweis: Man definiert $G_-(t) = \inf\{ u \geq 0 ,\ G(u) = t \}$, $0 \leq t < G(\infty)$. Dann gilt :

(a) G_- ist streng isoton; (b) $G_-(u) > t \iff G(t) < u$;

(c) $G \circ G_-(u) = u$; (d) das Bildmaß $\lambda_1 G_-^{-1}$ hat die λ_1–Dichte $g \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}$.

Die Einzelheiten sind eine Übungsaufgabe. []

3.14 Exponentialformel. (a) Seien g und G wie in 3.13; dann ist $\Psi(t) := e^{\pm G(t)}$ Lösung von

$$\Psi(t) = 1 \pm \int_0^t \Psi(s) \cdot g(s)\,ds ;$$

Ψ ist die einzige Lösung, die lokal (in jedem kopakten Intervall) beschränkt ist.

(b) Ist μ W–Maß auf $(0,\infty]$, ψ λ_1–Dichte von $\mu\big|_{(0,\infty)\cap\mathfrak{B}_1}$ und $\Psi(t) := \mu[(t,\infty]] > 0$ $\forall\, t>0$ und $\lambda(t) := \psi(t)/\Psi(t)$, so gilt:

$$\Psi(t) = \exp\{-\int_0^t \lambda(s)\,ds\} \quad , 0<t\leq\infty.$$

Beweis: a) Nach 3.13e ist Ψ Lösung und als monotone Funktion lokal beschränkt. Sei $\tilde{\Psi}$ eine weitere lokal beschränkte Lösung, $d(t) := \Psi - \tilde{\Psi}$. Dann hat man

$$|d(t)| \leq \int_0^t |d(s)| \cdot g(s)\,ds.$$

Mit der Gronwallschen Ungleichung folgt $d \equiv 0$.

b) Wir haben $\Psi(t) = 1 - \int_0^t \psi(s)\,ds = 1 - \int_0^t \lambda(s) \cdot \Psi(s)\,ds$. []

3.15 Korollar. (a) Zu φ,λ und Q wie in Def. 4 existiert eine PDP wie in Def. 4.

(b) Ein PDP ist an die Filterung $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_t)$ adaptiert.

Beweis: a) Mit (3.12) und (3.12)' ist Π als ÜW von S nach E mit $\Pi(e;\{(\infty,e)\}) = 1$ festgelegt. Durch 3.6 ist die Existenz gesichert.

b) Es ist $\{X_s \in B, N_s = n\} = \{T_n \leq s\} \cap A \setminus \{T_{n+1} \leq s\}$ mit $A = \{\varphi(s-T_n \,|\, Z_n) \in B\} \in \sigma(H_n) = \mathfrak{F}_{T_n}$, also hat man $\{T_n \leq s\} \cap A \in \mathfrak{F}_s$. Somit ist X_s auf $\{N_s<\infty\}$ $\mathfrak{F}_s$–mb; auf $\{N_s=\infty\}$ ist X_s sogar konstant. []

3.16 Beispiel. Markoffsche Sprungprozesse.

Durch $\varphi(t\,|\,x) = x$, $t\geq 0$, wird ein Fluß definiert. Dann ist X ein Sprungprozeß wegen

$$X_t := \begin{cases} Z_n & \text{für } T_n \leq t < T_{n+1} \\ e & t \geq T_\infty \end{cases}.$$

Ferner gilt: $\Lambda(t,x) = \lambda(x)\cdot t$,

$$\Pi(x;D\times B) := \int_D e^{-\lambda(x)t}\cdot\lambda(x)\ dt\cdot Q(x;B)\ dt,\quad x \in S\setminus\{e\},\ D \in (0,\infty)\cap\mathfrak{B}_1,\ B \in \mathfrak{S},$$

$$\Pi(x;\{(\infty,e)\}) := \begin{cases} 0 & \lambda(x)>0 \\ 1 & \lambda(x)=0 \end{cases} \text{ für}$$

Die Markoff–Eigenschaft wird noch gezeigt werden. □

3.17 Beispiel. Erneuerungsprozesse.

Sei (T_n) ein Erneuerungsprozeß, sodaß PS_n^{-1} ein W–Maß auf $(0,\infty)$ mit einer Lebesgue– Dichte ψ ist mit $\Psi(x) := \int_x^\infty \psi(u)\ du > 0\ \forall\ 0\leq x<\infty$. Mit $Z_n \equiv 0$ ist gemäß 3.1 ist $((T_n,Z_n))$ ein Markoffscher Erneuerungsprozeß.

Wir setzen nun $X_t := t - T_{N_t}$. Beschreibt S_n etwa die Lebenszeit der n–ten Maschine, so stellt X_t die Lebenszeit der z.Zt. t laufenden Maschine dar. Man erhält einen PDP mit

$S = [0,\infty)\cup\{e\}$ (e wird hier allerdings nicht benötigt), $\varphi(t\,|\,x) = x+t$,

$\lambda(x) := \psi(x)/\Psi(x)$, also $\Lambda(t,x) := \int_0^t \lambda(x+u)\ du \leq \frac{1}{\Psi(x+t)} < \infty$

$Q(x;\{0\}) = 1$, $x\neq e$. Es gilt nach 2.12f:

$$\Psi(t) = e^{-\Lambda(t,0)} \text{ und somit } e^{-\Lambda(t,x)} = \frac{\Psi(t+x)}{\Psi(x)}.$$

Es folgt

$\Pi(0;D\times\{0\}) := P[S_n \in D] = \int_D \psi(t)\ dt = \int_D \Psi(t)\cdot\lambda(t)\ dt$.

Eine sinnvolle Definition für $\Pi(x;\cdot)$, $x>0$, ist

$\Pi(x;D\times\{0\}) := P[S_n \in x+D\,|\,S_n \geq x] = \int_D \psi(t+x)\ dt\ /\ \Psi(x) = \int_D \frac{\Psi(t+x)}{\Psi(x)}\cdot\lambda(x+t)\ dt$, und

$\Pi(x;\{(\infty,e)\}) := e^{-\Lambda(\infty,x)} = 0$.

Also hat Π die verlangte Gestalt.

□

3.18 Beispiel. M/G/1–Warteschlangenmodelle.

Zur Zeit 0 sei etwa keine Kunde anwesend. Als T_n werden die Ankunftszeiten gewählt. Die Markoff–Eigenschaft gilt jetzt z.Zt. T_n auf Grund der folgenden Modellannahme:

> Zur Zeit T_n gibt der eintreffende Kunde bekannt, daß er eine Bedienungszeit Y_n benötigt mit $Y_n \sim G$.

Dann bildet die geforderte Gesamtbedienungszeit L_t bis t einen zusammengesetzten Poissonprozeß

$$L_t = \sum Y_m \cdot \mathbf{1}_{\{T_m \le t\}}.$$

Die virtuelle Wartezeit X_t z. Zt. t ist die Zeit, die ein Kunde warten müßte, wenn z. Zt. t einträfe. Sie kann als PDP beschrieben werden.

Setze $S = [0,\infty) \cup \{e\}$, wobei e hier nicht benötig würde.

$$Z_0 = 0,\ Z_{n+1} = (Z_n - S_{n+1})^+ + Y_{n+1}.$$

Man sieht leicht, aus dieser Struktur, daß $((T_n,Z_n))$ einen Markoffschen Erneuerungsprozeß bildet. Zur Konstruktion von X_t kann man $\varphi(t \mid x) = (x-t)^+$ wählen.

Dabei ist φ ein Fluß mit $\frac{d}{dt}\varphi(t \mid x) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(\varphi(t \mid x))$,

$\lambda(x) := \lambda$ sei der Parameter des Ankunftsprozesses,

$Q(x;x+B) := G[B]$.

3.19 Beispiel. Ein Versicherungsmodell.

Zu den Zeitpunkten T_n wird jeweils ein Schaden gemeldet der Höhe $Y_n \sim G$. Dann bildet der Gesamtschaden L_t bis t einen zusammengesetzten Poissonprozeß

$$L_t = \sum Y_m \cdot \mathbf{1}_{\{T_m \le t\}}.$$

Die Gesamthöhe der von den Kunden bis t zu entrichtenden Prämien ist deterministisch und wird durch $c \cdot t$ modelliert. Dabei ist c die Prämienrate. Wenn die Versicherungsgesellschaft nicht genügend Geld hat, um die Schäden zu begleichen, kann sie Geld borgen zu einer Zinsrate β. Sei X_t der Kapitalstand z.Zt. t.

Ist $X_0 = u < 0$ und treffen bis t keine Forderungen ein, so entwickelt sich $X_t = \varphi(t \mid u) := \varphi_t$, solange $\varphi_t < 0$ bleibt, gemäß

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = c + \beta \cdot \varphi_t\ ; \quad \text{d.h.} \quad \varphi_t = (u + \frac{c}{\beta}) \cdot e^{\beta t} - \frac{c}{\beta}\ .$$

Für $u \le e := -\frac{c}{\beta}$ bleibt $\varphi_t \le -\frac{c}{\beta}$. Deswegen tritt z. Zt. τ des Erreichens von e der Ruin ein.

Wir wollen $X^\tau := (X_{t\wedge\tau} \vee (-\frac{c}{\beta}),\ t \ge 0)$ durch einen PDP beschreiben.

Wähle $S = [-\frac{c}{\beta},\infty)$,

$\varphi(t\,|\,x) = (x + \frac{c}{\beta})\cdot e^{\beta t} - \frac{c}{\beta}$ für $x < 0,\ 0 \le t \le t_x$ mit $\varphi(t_x\,|\,x) = 0$ $[:= \infty$ für $x = -\frac{c}{\beta}]$, ,

$\varphi(t\,|\,x) = x + c\cdot t$ für $x \ge 0$.

$\lambda(x) := \lambda\cdot \mathbf{1}_{(e,\infty)}(x)$, wobei λ sei der Parameter des Poissonprozesses ist,

$Q(x;[-\frac{c}{\beta},x-z]) := G[\,[z,\infty)]$.

Setzt man $Z_0 = 0$, $Z_{n+1} = (\varphi(S_{n+1},Z_n) - Y_{n+1}) \vee e$,

so ist $((T_n,Z_n))$ offenbar ein Markoffscher Erneuerungsprozeß. Die zugehörige ÜW hat die verlangte Gestalt.

Unser nächstes Ziel, ist ein Beweis der ME für einen PDP. Aus (3.12) folgt:

(3.20) $\qquad P_x[S_1^o > t] = \Pi(x;(t,\infty]\times S] = e^{-\Lambda(t,x)}$.

3.21 Lemma. Für $C \in \mathfrak{E}$, $B_0 \in \mathfrak{S}$, $t>0$ gilt:

(0) $\quad e^{-\Lambda(t+u,x)} = e^{-\Lambda(t,x)}\cdot e^{-\Lambda(u,\varphi(t,x))}$;

(a) $\quad P_x[S_1^o > t,\ (S_1^o - t, Z_1^o) \in C] = P_x[S_1^o > t]\cdot P_{\varphi(t\,|\,x)}[(S_1^o,Z_1^o) \in C]$;

b) $\quad P[Z_0 \in B_0,\ N_t = 0,\ (S_1 - t, Z_1) \in C] = \int_{\{Z_0\in B_0,\ N_t=0\}} P_{X_t}[(S_1,Z_1) \in C]\ dP$.

Teil (b) wird im folgenden noch in allgemeinere Form aus (a) abgeleitet und soll hier nur die Verbindung zur Markoff–Eigenschaft herstellen.

Beweis: 0) $e^{-\Lambda(t+u,x)} = e^{-\Lambda(t,x)}\cdot \exp\{-\int_0^u \lambda(\varphi(t+s\,|\,x))\ ds\}$

$= e^{-\Lambda(t,x)}\cdot \exp\{-\int_0^u \lambda(\varphi(s\,|\,\varphi(t\,|\,x)))\ ds\}$.

a)Wir betrachten der Einfachheit halber den Fall $(\infty,e) \notin C$, $C = D\times B$; dann folgt:

$P_x[S_1^o > t,\ S_1^o - t \in D,\ Z_1^o \in B]$

$= \int_t^\infty \mathbf{1}_D(s-t)\cdot e^{-\Lambda(s,x)}\cdot \lambda Q(\varphi(s\,|\,x);B)$

$= \int_0^\infty \mathbf{1}_D(u)\cdot e^{-\Lambda(t+u,x)}\cdot \lambda Q(\varphi(t+u\,|\,x);B)\ du$

$= e^{-\Lambda(t,x)}\cdot \int_0^\infty \mathbf{1}_D(u)\cdot e^{-\Lambda(u,\varphi(t\,|\,x))}\cdot \lambda Q(\varphi(u\,|\,\varphi(t\,|\,x));B)\ du$

$= P_x[S_1^o > t]\cdot P_{\varphi(t,x)}[S_1^o \in D,\ Z_1^o \in B]$.

b) Der Beweis verläuft wie der von dem folgenden Lemma 3.22. []

3.22 Lemma. Für $C \in \overset{n}{\underset{0}{\otimes}}\mathfrak{E}$, $\Gamma \in \overset{\infty}{\underset{1}{\otimes}}\mathfrak{E}$, $n \in \mathbb{N}_0$, sei

$A_{n,t-} := \{N_t = n,\ H_n \in C\}$ ein Ereignis der Vergangenheit und

$A_{n,t+} := \{(T_{n+1}-t, Z_{n+1}, S_{n+2}, Z_{n+2}, S_{n+3}, Z_{n+3}, ...) \in \Gamma\}$ ein Ereignis der Zukunft.

Wir schreiben $A^o_{n,t}$, wenn die S_n, Z_n durch S^o_n, Z^o_n ersetzt werden. Dann gilt:

$$P[A_{n,t-} \cap A_{n,t+}] = \int_{A_{n,t-}} P_{X_t}[A^o_{0,0+}]\, dP\ .$$

Beweis: Sei $H_{n+} := (S_{n+1}, Z_{n+1}, ...)$.

Dann gilt mit $f(s,z) := P_z[(s, H^o_\infty) \in \Gamma]$ nach 6.4:

$P[(S^o_1 - u, Z^o_1, H^o_{1+}) \in \Gamma \mid H_1] = f(S_1 - u, Z_1)$ und somit nach 3.21a:

(*) $g(u,x,\Gamma) := P_x[S^o_1 > u,\ (S^o_1 - u, Z^o_1, H^o_{1+}) \in \Gamma] = E_x[\mathbf{1}_{\{S^o_1 > u\}} \cdot f(S^o_1 - u, Z^o_1)]$

$\overset{3.21}{=} P_x[S^o_1 > u] \cdot E_{\varphi(u \mid x)}[f(S^o_1, Z^o_1)] = g(u,x,\Omega^o) \cdot E_{\varphi(u \mid x)}[f(S^o_1, Z^o_1)]$.

Mit (3.5) und (*) erhält man :

$P[A_{n,t-} \cap A_{n,t+}] =$

$P[T_n \le t,\ H_n \in C,\ S_{n+1} > t - T_n,\ (S_{n+1} - (t - T_n), Z_{n+1}, H_{(n+1)+}) \in \Gamma]$

$\overset{3.4}{=} \int_{\{T_n \le t,\ H_n \in C\}} g(t - T_n, Z_n)\, dP$

$\overset{(*)}{=} \int_{\{T_n \le t,\ H_n \in C\}} g(t - T_n, Z_n, \Omega^o) \cdot E_{\varphi(t - T_n \mid Z_n)}[f(S^o_1, Z^o_1)]\, dP$

Zum gleichen Ausdruck gelangt man mit den gleichen Schritten von

$$\int_{A_{n,t-}} E_{\varphi(t - T_n \mid Z_n)}[f(S^o_1, Z^o_1)]\, dP = \int_{A_{n,t-}} E_{X_t}[f(S^o_1, Z^o_1)]\, dP$$

Wiederum mit (*) [für u=0] folgt: $= \int_{A_{n,t-}} P_{X_t}[(S^o_1, Z^o_1, H^o_{1+}) \in \Gamma]\, dP.$ []

3.23 Konstruktion von Shift–Operatoren.

Seien $\Omega^o, \mathfrak{F}^o, S^o_n, T^o_n, Z^o_n, P_x$ wie in 3.4.

Sei X^o auf Ω^o über die Driftfunktion φ genauso definiert, wie X auf Ω.

Für $\omega = (s_0, z_0, s_1, z_1, ...) \in \Omega^o$ setzen wir mit $t_n := s_1 + ... + s_n$ $(t_0 = 0)$
bei $N_t(\omega) = n$: $\vartheta_t(\omega) := (s_0, \varphi(t - t_n \mid z_n), t_{n+1} - t, z_{n+1}, s_{n+2}, z_{n+2}, ...)$
und bei $N_t = \infty$: $\vartheta_t(\omega) := (s_0, e, \infty, e, \infty, ...)$.

Dann ist $\vartheta_t(\omega) \in \Omega^o$ wegen $s_m = \infty \Rightarrow z_m = \infty$ für $m \ge n+1$. Es folgt:

$S_1^o(\vartheta_t(\omega)) = t_{n+1}-t$, $S_m^o(\vartheta_t(\omega)) = s_{n+m}$, $m\geq 2$,

$Z_0^o(\vartheta_t(\omega)) = \varphi(t-t_n \mid z_n)$, $Z_m^o(\vartheta_t(\omega)) = z_{n+m}$, $m\geq 1$, und

$X_s^o(\vartheta_t(\omega)) = \varphi(s \mid Z_0^o(\vartheta_t(\omega))) = \varphi(t+s-t_n \mid z_n) = X_{t+s}^o(\omega)$ für $0 \leq s < S_1^o(\vartheta_t(\omega)) = t_{n+1}-t$,

$X_s^o(\vartheta_t(\omega)) = \varphi(s-T_m^o(\vartheta_t(\omega)) \mid Z_m^o(\vartheta_t(\omega)))$ für $T_m^o(\vartheta_t(\omega)) = t_{n+1}-t + s_{n+2}+\ldots+s_{n+m} \leq s < T_{m+1}^o(\vartheta_t(\omega)) = t_{n+1}-t + s_{n+2}+\ldots+s_{n+m+1}$

also

$X_s^o(\vartheta_t(\omega)) = \varphi(t+s-t_{n+m} \mid z_{n+m}) = X_{t+s}^o(\omega)$ für $t_{n+m} \leq t+s < t_{n+m+1}$.

Ist $\Omega^{oo} := \{\omega \in \Omega^o; \sum s_m = \infty\}$ und $P_x[\Omega^{oo}] = 1$, $x\in S$, so kann man sich auf Ω^{oo} beschränken und man hat $\vartheta_t(\Omega^{oo}) \subset \Omega^{oo}$. $[]$

Satz 3.24. Sei X ein PDP und $\mathbb{F}$ wie in der Generalvoraussetzung. Dann ist $(X,\mathbb{F})$ ein Markoff–ProzeßP auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit interner Markoff–Familie $(X^o,\{P_x\})$ $[$mit X^o wie in 3.23$]$.

Beweis: Auf $\{T_n\leq t\}$ sind nach 2.3 T_n und Z_n $\{T_n\leq t\}\cap\mathfrak{F}_t$ mb mit $\{T_n\leq t\}\cap\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_t$. Es folgt: $\{N_t = n, \varphi(t-T_n \mid Z_n) \in B\} \in \mathfrak{F}_t$ für $B\in\mathfrak{S}$.

Also ist X $\mathbb{F}$–adaptiert und rechtsstetig, somit $\mathbb{F}$–progressiv.

Für die Markoff–Eigenschaft genügt es, Folgendes z.z. mit

$A_{n.t-} := \{((\xi,N)_{t_1},\ldots,(\xi,N)_{t_m},(\xi,N)_t) \in C, N_t=n\}$:

$P[A_{n,t-} \cap \{X_{t+s} \in B\}] = \int_{A_{n,t-}} P_{X_t}[X_s^o \in B]\, dP$.

Dazu läßt sich $A_{n,t-} \cap \{X_{t+s} \in B\}$ schreiben als

$A_{n,t-} \cap \{T_{n+1} > t+s, \varphi(t+s-T_n,Z_n) \in B\} \cup A_{n,t-} \cap \{T_{n+1}\leq t+s, X_{t+s} \in B\}$.

Nun kann man $A_{n,t-}$ auf die gleiche Form wie in 3.22 bringen und

$A_{n,t-} \cap \{T_{n+1}\leq t+s, X_{t+s} \in B\} = A_{n,t-} \cap A_{n,t+}$ mit $A_{n,t+}$ wie 3.22 schreiben.

Die Markoff–Eigenschaft folgt nun aus 3.22.

Der Term $A_{n,t-} \cap \{T_{n+1} > t+s, \varphi(t+s-T_n,Z_n) \in B\}$ läßt sich leicht behandeln. Die genaue Ausführung ist eine Übungsaufgabe.

Die Markoff–Eigenschaft von X^o bzgl. P_x ist ein Spezialfall. Gemäß 3.4(iv) ist $x \mapsto P_x[X_s^o \in B]$ mb. Nach 3.23 existieren Shift–Operatoren. Also ist $(X^o,\{P_x\})$ eine MF und $(X,\mathbb{F})$ ein MP. $[]$

Korollar 3.25. Sei X ein PDP und $\mathbb{F}$ wie 3.24. Dann ist $(X,\mathbb{F})$ ein starker MP auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit interner starker MF $(X^o,\{P_x\})$ $[$mit X^o wie in 3.23$]$.

Beweis: Sei τ eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit. Dann existieren nach 2.19 mb Funktionen

$h_k : \overset{k}{\underset{0}{\times}}([0,\infty]\times S) \mapsto [0,\infty]$ für $k\in\mathbb{N}_0$, sodaß gilt:
$\tau = T_k + h_k(H_k)$ für $S_{k+1} > h_k(H_k)$ und $\tau \geq T_{k+1}$ für $S_{k+1} \leq h_k(H_k)$.
Es folgt:

$\{T_k \leq \tau < T_{k+1}\} = \{T_k \leq \tau,\ S_{k+1} > h_k(H_k)\}$
Sei $A \in \mathfrak{F}_\tau$. Dann ex. nach 2.14a ein $A_n \in \sigma(H_n)$ mit
$A \cap \{\tau < T_{k+1}\} = A_k \cap \{\tau < T_{k+1}\}$. Es gilt:
$A \cap \{X_{\tau+s} \in B\} = \sum A \cap \{X_{\tau+s} \in B,\ T_k \leq \tau < T_{k+1}\} + A \cap \{e \in B,\ T_\infty \leq \tau\}$
Nun ist $\{T_k > \tau\} \in \mathfrak{F}_{T_k} = \sigma(H_k)$ nach 1.13 (oder 1.20) und 2.13.
Setze $A_k' := A_k \cap \{T_k \leq \tau\} \in \sigma(H_k)$. Dann erhält man:

$$A \cap \{X_{\tau+s} \in B,\ T_k \leq \tau < T_{k+1}\} = A_k \cap \{X_{\tau+s} \in B,\ T_k \leq \tau < T_{k+1}\}$$
$$= A_k' \cap \{X_{T_k + h_k(H_k)+s} \in B,\ S_{k+1} > h(H_k)\}$$

Es ergibt sich:

$$P[A \cap \{X_{\tau+s} \in B,\ T_k \leq \tau < T_{k+1}\}] \overset{3.4}{=} \int_{A_k'} f(h_k(H_k), Z_k)\, dP \quad \text{mit}$$

$$f(h,z) := P_z[X_{h+s} \in B,\ S_1 > h] \overset{3.24}{=} \int_{\{S_1>h\}} P_{X_h}[X_s^o \in B]\, dP_z$$
$$= \int_{\{S_1>h\}} P_{\varphi(h,z)}[X_s^o \in B]\, dP_z = P_z[S_1>h] \cdot P_{\varphi(h,z)}[X_s^o \in B].$$

Zum gleichen Ausdruck gelangt man vom folgenden Ausdruck:

$$E[\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_{\{T_k \leq \tau < T_{k+1}\}} \cdot P_{\varphi(h_k(H_k), Z_k)}[X_s^o \in B]]$$
$$= E[\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_{\{T_k \leq \tau < T_{k+1}\}} \cdot P_{X_\tau}[X_s^o \in B]].$$

Schließlich gilt:

$$P[A \cap \{e \in B,\ T_\infty \leq \tau\}] = P[A \cap \{T_\infty \leq \tau\}] = E[\mathbf{1}_{A \cap \{T_\infty \leq \tau\}} \cdot P_e[X_s^o \in B]]$$
$$= E[\mathbf{1}_{A \cap \{T_\infty \leq \tau\}} \cdot P_{X_\tau}[X_s^o \in B]].$$

Durch Summation erhält man:

$$P[A \cap \{X_{\tau+s} \in B\}] = E[\mathbf{1}_A \cdot P_{X_\tau}[X_s^o \in B]]. \ []$$

3.26 Korollar. Sei S metrischer Raum mit Borel–σ–Algebra $\mathfrak{S}$, p eine ÜW von S nach S mit $p(x,S\setminus\{x\}) = 1$, $\lambda : S \mapsto [0,\infty)$ mb.
Seien ferner $e \notin S$, $S_e := S\cup\{e\}$, $\mathfrak{S}_e := \{B, B\cup\{e\}, B \in \mathfrak{S}\}$.
Dann existiert eine Markoffsche Sprungfamilie $(X,\{P_x\})$ mit Sprungrate λ und
$p(x;\cdot) = P_x[X_{T_1} \in \cdot]$, $x\in S$ mit $\lambda(x)>0$.
Ist $(X,\{P_x\})$ regulär, d.h. gilt $T_n \to \infty$ P_x–f.s. $\forall\, x\in S$, so kann S als Zustandsraum von X gewählt werden.

Beweis. Wähle einen PDP X mit Zustandsraum S_e auf $(\Omega^o,\mathfrak{F}^o,P_x)$ wie in 3.4/3.15, Sprungrate λ (wobei $\lambda(e) := 0$), Fluß $\varphi(\cdot\,|\,x) \equiv x$, $x\in S_e$, $Q(x;\cdot) = p(x;\cdot)$, $x\in S$, $Q(e,\{e\}) := 1$, $T_1 := \inf\{s>0;\, X_s \neq X_0\}$. Dann ist $(X,\{P_x\})$ nach 3.24 eine Markoff–Familie und wegen des speziellen Flusses ein Markoffsche Sprungfamilie.
Nach (3.12) gilt für $\lambda(x)>0$:
$P_x[T_1 < \infty] = P_x[Z_1 \neq Z_0,\, T_1 < \infty] = \Pi(x,[0,\infty)\times(S\setminus\{x\}))$
$= \int_{[0,\infty)} e^{-\lambda(x)t}\,\lambda(x)\cdot p(x,S\setminus\{x\})\,dt = 1$ und
$P_x[X_{T_1} \in B] = P_x[Z_1 \in B] = \Pi(x;[0,\infty)\times B) = p(x,B)$,
$P_x[T_1 \in D] = \Pi(x;D\times S_e) = \mathrm{Exp}(\lambda(x))[D]$.
Für $\lambda(x) = 0$ gilt $P_x[T_1 < \infty] = \Pi(x;[0,\infty)\times S_e) = 0$.
Es gilt: $Z_n \in S$ auf $\{T_n < \infty\}$ P_x–f.s.
Gilt nun $T_\infty = \infty$ P_x–f.s. , dann folgt $P_x[X_t \in S\ \forall\, t] = 1$, $x \in S$. []

3.27 Bemerkung. Sei X ein PDP zum Markoffschen Erneuerungsprzeß $((T_n,Z_n), n\in\mathbb{N}_0)$. Setze
$\xi_t = Z_{N_t}$, $\eta_t = t - T_{N_t}$. Dann gilt:
Erhält X_t als zusätzliche Komponenten einige der Zva ξ_t, η_t, N_t oder t, so entsteht wieder ein PDP.
Der Beweis ist eine Übungsaufgabe. []

3.28 Beispiel. Ein zeit–inhomogener Markoffscher Sprungprozeß (Y_t) ist ein Sprungprozeß, für den $X_t := (Y_t,t)$ ein Markoff–Prozeß ist. Dann ist (X_t) auch ein spezieller PDP mit Fluß:
$\varphi(t\,|\,(y,s)) := (y,t+s)$. []

§ 4 Der Projektionssatz für einen PDP.

Sei X ein PDP auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ wie in § 3 bzw. auf $(\Omega^o,\mathfrak{F}^o,P_x)$ wie in 3.4.

4.1 Projektionslemma. Sei $n \geq 1$, $f : \Omega_n^o \mapsto [0,\infty]$ eine mb Funktion. Dann gilt:

(4.2) $$E\left[f(H_n)\cdot \mathbf{1}_{\{T_n<\infty\}}\right] = E\left[\int_{T_{n-1}}^{T_n} f^*(H_{n-1},s)\,ds\right] \quad \text{mit } \int_{\infty}^{\infty}(...)\,ds := 0$$
$$\text{und } f^*(H_{n-1},s) := \int f(H_{n-1},s,z)\,\lambda Q(X_s,dz).$$

Stellt man sich $f(H_n)$ als einen Gewinn vor, der in T_n in Abhängigkeit von der Vorgeschichte H_n ausgezahlt wird, so kann man diesen im Mittel durch eine Gewinnrate $f^*(H_{n-1},s)$ ersetzen, die im Zeitintervall $[T_{n-1},T_n)$ anfällt.

Für Funktionen f mit Werten in $\mathbb{R}$ kann man 4.1 auf f^+ und f^- anwenden.

Beweis von 4.1**:**

$$E\left[f(H_n)\cdot \mathbf{1}_{\{T_n\leq t\}}\right] = E\left[\mathbf{1}_{\{T_{n-1}\leq t\}}\cdot f(H_{n-1},T_n,Z_n)\cdot \mathbf{1}_{\{T_n\leq t\}}\right]$$
$$= E\left[\mathbf{1}_{\{T_{n-1}\leq t\}}\cdot E\left[f(H_{n-1},T_{n-1}+S_n,Z_n)\cdot \mathbf{1}_{\{T_n\leq t\}}\,|\,H_{n-1}\right]\right]$$
$$= E\left[\mathbf{1}_{\{T_{n-1}\leq t\}}\cdot F(H_{n-1})\right] \quad \text{mit}$$

$$F((...,u,x)) := E\left[f((...,u,x),u+S_n,Z_n)\cdot \mathbf{1}_{\{u+S_n\leq t\}}\,|\,H_{n-1}=(...,u,x)\right]$$
$$= \int_{(0,t-u]} ds\, e^{-\Lambda(s,x)} \int \lambda Q(\varphi(s\,|\,x);\,dz)\, f((...,u,x),u+s,z)$$
$$= \int_{(u,t]} ds\, e^{-\Lambda(s-u,x)} \int \lambda Q(\varphi(s-u,x);\,dz)\, f((...,u,x),s,z)$$
$$= \int_{(u,t]} ds\, P\left[S_n \geq s-u\,|\,H_{n-1}=(...u,,x)\right]\, f^*((...,u,x),s)$$
$$= E\left[\int_{(u,t]} ds\, \mathbf{1}_{\{u+S_n\geq s\}}\, f^*((...,u,x),s)\,|\,H_{n-1}=(...,u,x)\right]$$
$$= E\left[\int_{(u,(u+S_n)\wedge t]} ds\, f^*((...,u,x),s)\,|\,(...,T_{n-1},Z_{n-1})=(...,u,x)\right]$$
$$= E\left[\int_{(T_{n-1},T_n\wedge t]} ds\, f^*(H_{n-1},s)\,|\,H_{n-1}=(...,u,x)\right].$$

Dabei wurde der Satz von Fubini (in der nicht bedingten Form) benutzt; denn
$P\left[S_k \in \cdot\,|\,H_{k-1}=(...,u,,x)\right]$ ist hier bei festem (...,u,x) ein (nicht–bedingtes) W–Maß.
Nun können wir weiterfahren mit

(4.3) $$E\left[f(H_n)\cdot \mathbf{1}_{\{T_n\leq t\}}\right]$$
$$= E\left[\int_{(T_{n-1},T_n\wedge t]} ds\, f^*(H_{n-1},s)\right]$$
$$= E\left[\int_{(T_{n-1},T_n\wedge t]} ds\, f^*(H_{n-1},s)\right].$$

Mit $t \to \infty$ ergibt sich die Behauptung. $[\,]$

Im obigen Beweis wurde (4.2) aus (4.3) gefolgert; (4.3) ist andererseits in (4.2) enthalten.
Es soll nun gezeigt, daß die stochastische Entwicklung des Markoffschen Erneuerungsprozesses bereits durch (4.2) und die Verteilung von Z_0 charakterisiert ist.

4.4 Charakterisierungssatz. Es liege die Situation der Generalvoraussetzung von §3 vor;
ferner seien Q und λ wie in Definition 4 aus §3 gegeben.

Gilt dann (4.2) für jede mb Funktion $f : \Omega_n^o \mapsto [0,\infty]$ und $n \geq 1$, so ist $((T_n,Z_n); n \geq 0)$ ein Markoffscher Erneuerungsprozeß mit ÜW Π gemäß (3.12).

Beweis: Wir wählen eine bedingte Verteilung von S_n bzgl. H_{n-1}.
Sei $\{H_{n-1} \in A\} \subset \{T_{n-1} < \infty\}$. Dann erhalten wir mit (4.2) und $D \subset (0,\infty)$:

$$P[H_{n-1} \in A, S_n \in D, Z_n \in B] = P[H_{n-1} \in A, S_n \in D, Z_n \in B, T_n < \infty]$$
$$= E[\,\mathbf{1}_A(H_{n-1}) \cdot \mathbf{1}_D(T_n - T_{n-1}) \cdot \mathbf{1}_B(Z_n) \cdot \mathbf{1}_{\{T_n<\infty\}}\,]$$
$$= E\Big[\int_{T_{n-1}}^{T_n} \Big(\int \lambda Q(\varphi(s-T_{n-1} \mid Z_{n-1}); dz)\, \mathbf{1}_A(H_{n-1}) \cdot \mathbf{1}_D(s-T_{n-1}) \cdot \mathbf{1}_B(z) \Big)\, ds\,\Big]$$
$$= E\Big[\mathbf{1}_{\{H_{n-1}\in A\}} \cdot \int_{T_{n-1}}^{T_n} ds\, \mathbf{1}_D(s-T_{n-1})\, \lambda Q(\varphi(s-T_{n-1} \mid Z_{n-1});B)\,\Big]$$
$$= E\Big[\mathbf{1}_{\{H_{n-1}\in A\}} \cdot \int_0^{S_n} \mathbf{1}_D(s)\, \lambda Q(\varphi(s \mid Z_{n-1});B)\, ds\Big]$$
$$= E\Big[\mathbf{1}_{\{H_{n-1}\in A\}} \cdot \int_D \mathbf{1}_{(0,S_n]}(s)\, \lambda Q(\varphi(s \mid Z_{n-1});B)\, ds\,\Big]$$
$$= \int_D E\Big[\mathbf{1}_{\{H_{n-1}\in A\}} \cdot \lambda Q(\varphi(s \mid Z_{n-1});B) \cdot \mathbf{1}_{(0,S_n]}(s)\,\Big]\, ds$$
$$= \int_D E\Big[\mathbf{1}_{\{H_{n-1}\in A\}} \cdot \lambda Q(\varphi(s \mid Z_{n-1});B) \cdot P[s \leq S_n \mid H_{n-1}]\,\Big]\, ds$$
$$= E\Big[\mathbf{1}_{\{H_{n-1}\in A\}} \cdot \int_D \lambda Q(\varphi(s \mid Z_{n-1});B) \cdot P[s \leq S_n \mid H_{n-1}]\, ds\,\Big]\ , \quad \text{also}$$

(4.5)
$$P[H_{n-1} \in A, S_n \in D, Z_n \in B] = \int_{\{H_{n-1}\in A\}} \Big(\int_D \lambda Q(\varphi(s \mid Z_{n-1});B)\, \cdot P[s \leq S_n \mid H_{n-1}]\, ds \Big)\, dP.$$

Mit B = S erhält man aus (4.5):

$$P[H_{n-1} \in A,\ S_n \leq t] = \int_{\{H_{n-1}\in A\}} \Big(\int_0^t \lambda(\varphi(s \mid Z_{n-1}))\, P[s \leq S_n \mid H_{n-1}]\, ds \Big)\, dP \quad \text{und somit.}$$

$$P[S_n \leq t \mid H_{n-1}] = \int_0^t \lambda(\varphi(s \mid Z_{n-1}))\, P[s \leq S_n \mid H_{n-1}]\, ds \ \text{ auf } \{H_{n-1} \in A_t\}$$

für eine geeignete Menge A_t mit $\{H_{n-1} \in A_t\} \subset \{T_{n-1}<\infty\}$, $P[H_{n-1} \in A_t] = 1$.

Auf $\{H_{n-1} \in \cap_{t\in\mathbb{Q},t>0} A_t\} =: \{H_{n-1} \in A^*\}$ mit $P[H_{n-1} \in A^*] = 1$ haben wir somit:

$$P[S_n > t \,|\, H_{n-1}] = 1 - \int_0^t \lambda(\varphi(s-T_{n-1} \,|\, Z_{n-1}))\, P[S_n > s \,|\, H_{n-1}]\, ds \quad \forall\, t\geq 0.$$

Aus der Exponentialformel 3.14 ergibt sich nun

$$P[S_n > t \,|\, H_{n-1}] = \exp\{-\Lambda(t,Z_{n-1})\} \quad \forall\, t\geq 0 \text{ auf } \{H_{n-1} \in A^*\}.$$

Es folgt jetzt aus (4.5):

$$P[H_{n-1} \in A,\, S_n \in D,\, Z_n \in B] =$$

$$= \int_{\{H_{n-1}\in A\}} \left[\int_D ds\ \lambda Q(\varphi(s \,|\, Z_{n-1});B) \cdot \exp\{-\Lambda(s,Z_{n-1})\} \right] dP \text{ , also}$$

$$P[S_n \in D,\, Z_n \in B \,|\, H_{n-1}] =$$

$$= \int_D ds\ \lambda Q(\varphi(s \,|\, Z_{n-1});B) \cdot \exp\{-\Lambda(s,Z_{n-1})\}$$

$$= \Pi(Z_{n-1},D\times B) \qquad \text{f.s. auf } \{T_{n-1} < \infty\}.$$

Auf $\{T_{n-1}=\infty\} = \cup_{m=1}^{n-1} \{S_m = \infty\} \subset \{S_n=\infty, Z_{n-1}=e\}$ (vgl. 3.1) hat man :

$$P[S_n \in D,\, Z_n \in B \,|\, H_{n-1}] = 0 = \Pi(e,D\times B) = \Pi(Z_{n-1},D\times B) \text{ f.s. . } [\,]$$

4.6 Projektionsatz. Sei Y ein $\mathbb{F}$–vorhersagbarer Prozeß mit Zustandsraum $(D,\mathfrak{D})$ und $f : D\times S \mapsto [0,\infty]$ eine mb Funktion. Dann gilt:

$$E\Big[\sum_{k=1}^{N_t} f(Y_{T_k},X_{T_k}) \Big] = E\Big[\int_0^t \int \lambda Q(X_s,dz)\, f(Y_s,z)\, ds \Big] .$$

Der Name rührt daher, daß der Prozeß $\int_0^t \int \lambda Q(X_s,dz)\, f(Y_s,z)\, ds$ als **duale $\mathbb{F}$–vorhersagbare Projektion** oder auch **Kompensator** des Prozesses $\sum_{k=1}^{N_t} f(Y_{T_k},X_{T_k})$ bezeichnet wird.

Ein Beispiel für Y_t ist ein linksstetiger adaptierter Prozeß, der als Komponenten einige der folgenden Zva haben kann:

X_{t-}, t, $\mathbf{1}_{(0,\tau]}(t)$ für eine Stoppzeit τ, $\mathbf{1}_{\{N_{t-1} \leq n-1\}} = \mathbf{1}_{(0,T_n]}(t)$,

$\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_{(s,\infty)}(t)$ für ein $A \in \mathfrak{F}_s$.

Beim Lebesgue–Integral auf der rechten Seite macht es keinen Unterschied, ob man die linksseitigen Limites X_{t-} nimmt oder die Werte X_t bei t. Die abzählbar vielen Sprungstellen, an denen sich die beiden Versionen unterscheiden, haben das Lebesgue–Maß Null.

Wir zeigen zuerst

4.7 Projektionssatz (Variante). Sei für $k \geq 1$ $f_k : \Omega_k^o \mapsto [0,\infty]$ eine mb Funktion. Dann gilt:

$$\textbf{(4.8)} \qquad E\Big[\sum_{k=1}^{N_t} f_k(H_k) \Big] = E\Big[\int_0^t ds \int \lambda Q(X_s;\, dz)\, f_{N_s+1}(H_{N_s},s,z) \Big] .$$

Beweis von 4.7**:** Wir haben mit (4.3)

$$E\left[f_k(H_k)\cdot \mathbf{1}_{\{T_k\le t\}}\right] = E\left[\,{}_{(T_{k-1},T_k\wedge t]}\int ds \int \lambda Q(X_s;\,dz)\, f_{N_s+1}(H_{N_s},s,z)\,\right].$$

Durch Summation über k erhält man die Behauptung. Dabei ist zu berücksichtigen, daß auf der rechten Seite ${}_0\int^{t\wedge T_\infty}\ldots = {}_0\int^{t}\ldots$ ist wegen $\lambda(X_s) = \lambda(e) = 0$ für $t\ge T_\infty$. $[\,]$

Umgekehrt erhält man (4.3) aus (4.8) zurück, indem man $f_k \equiv 0$ für $k\ne n$ setzt.

Beweis von 4.6: Es gilt nach 2.7b die folgende Darstellung (mit f_{k+1} statt f_k):

(*) $$f(Y_t,x) = f_1(H_0,t,x)\cdot \mathbf{1}_{[0,T_1]}(t) + \sum_1^\infty f_{k+1}(H_k,t,x)\cdot \mathbf{1}_{(T_k,T_{k+1}]}(t) \quad \text{auf } \{t<T_\infty\}$$

d.h. $f_{N_{t-}+1}(H_{N_{t-}},t,x)$ für gewisse nicht negative mb Funktionen f_k. Es folgt

$\sum_{k=1}^{N_t} f(Y_{T_k},X_{T_k}) = \sum_{k=1}^{N_t} f_k(H_{k-1},T_k,Z_k)$ und

$f(Y_s,z) = f_{N_s+1}(H_{N_s},s,z)$ auf $\{s < T_\infty,\ s\ne T_n\ \forall\, n\}$.

Dabei ist $\{s;\ s\ne T_n\ \forall\, n\}^c$ eine Lebesgue–Nullmenge. $[\,]$

4.9 Bemerkung. Man kann 4.7 auch aus 4.6 gewinnen, indem man 2.7b "(ii) ⇒ (i)" anwendet. $[\,]$

4.10 Lévy–Formel. Seien τ eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit, $0 \le t \le \infty$ und $f : S\times S \mapsto [0,\infty]$ mb. Dann gilt:

(a) $$E\left[\sum_{k=1}^{N_\tau} f(X_{T_k-},X_{T_k})\right] = E\left[\,{}_0\int^{\tau} ds \int \lambda Q(X_s;dz)\, f(X_s,z)\,\right];$$

(b) $$E\left[\sum_{k=1}^{N_t} f(X_{T_k-},X_{T_k})\right] = {}_0\int^{t} E\left[\int \lambda Q(X_s;dz)\, f(X_s,z)\,\right] ds.$$

Beweis: a) Wähle $Y_t = (\mathbf{1}_{(0,\tau]}(t), X_{t-})$ in 4.6; dann folgt:

$$E\left[\sum_{k=1}^{N_t} \mathbf{1}_{(0,\tau]}(T_k)\cdot f(X_{T_k-},X_{T_k})\right] = E\left[\sum_{k=1}^{N_{t\wedge\tau}} f(X_{T_k-},X_{T_k})\right]$$
$$= E\left[\,{}_0\int^{t} ds\, \mathbf{1}_{(0,\tau]}(s) \int \lambda Q(X_s;\,dz)\, f(X_s,z)\,\right]$$
$$= E\left[\,{}_0\int^{t\wedge\tau} ds \int \lambda Q(X_s;\,dz)\, f(X_s,z)\,\right].$$

Mit $t\to\infty$ folgt die Behauptung mit monotoner Konvergenz.
Teil b) folgt jetzt aus a) mit Fubini. $[\,]$

Als **Spezialfall** aus der Lévy–Formel erhält man für eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit τ mit $f \equiv 1$:

(4.11) $$E[N_\tau] = E\left[\,{}_0\int^{\tau} \lambda(X_s)\, ds\,\right].$$

4.12 Lemma. Ist λ beschränkt, so gilt für $\alpha>1$: $E[\alpha^{N_t}] < \infty \quad \forall\, t\geq 0$.

Beweis: Sei λ durch $\|\lambda\|$ beschränkt. Wir setzen $Y_t = N_{t-}$ und
$f(N_{t-}) = (\alpha-1)\alpha^{N_{t-}} \cdot \mathbf{1}_{(0,n-1]}(N_{t-})$. Dann gilt nach 7.1:

$$E[\alpha^{N_{t\wedge n}}] - 1 = E\Big[\sum_1^{N_{t\wedge n}} (\alpha-1)\alpha^{k-1}\Big] = E\Big[\sum_1^{N_t} f(N_{T_k-})\Big]$$

$$= E\Big[\int_0^t \lambda(X_s)\cdot(\alpha-1)\cdot\alpha^{N_{s-}}\cdot \mathbf{1}_{(0,n-1]}(N_{s-})\,ds\Big] = (\alpha-1)\cdot E\Big[\int_0^{t\wedge T_n} \lambda(X_s)\cdot\alpha^{N_{s\wedge n}}\,ds\Big]\,.$$

Also erhält man: $E[\alpha^{N_{t\wedge n}}] \leq 1 + \beta\cdot\int_0^t E[\alpha^{N_{s\wedge n}}]\,ds$ mit $\beta = (\alpha-1)\cdot\|\lambda\|$.
Durch Induktion ergibt sich nun für $k \in \mathbb{N}$:

$$E[\alpha^{N_{t\wedge n}}] \leq \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\beta t)^m}{m!} + \frac{\beta^k}{(k-1)!}\cdot\int_0^t E[\alpha^{N_{s\wedge n}}]\,(t-s)^{k-1}ds\,.$$

Wegen $E[\alpha^{N_{s\wedge n}}] \leq \alpha^n$ folgt für $k\to\infty$: $E[\alpha^{N_{t\wedge n}}] \leq e^{\beta\cdot t}$.
Das ist ein Spezialfall der Gronwall–Ungleichung. Mit $n\to\infty$ folgt die Behauptung. []

Definition 1. Zu $f : S \mapsto \mathbb{R}$ sei

$\mathfrak{A}(f) := \{\, \tilde f : S \mapsto \mathbb{R}\,;\, \tilde f \text{ mb}, f(\varphi(t,x)) - f(x) = \int_0^t \tilde f(\varphi(s,x))\,ds \quad \forall\, t\geq 0\,\}$,
$\mathfrak{X}(f)$ bezeichne einen ausgezeichneten (kanonischen) Kandidaten in $\mathfrak{A}(f)$.
$\mathfrak{J}(f)(x) := \int \lambda Q(x;dy)\,[f(y) - f(x)]$, sofern der Ausdruck existiert und endlich ist.
$\mathfrak{A}(f) := \mathfrak{X}(f) + \mathfrak{J}(f)$ für $\mathfrak{A}(f) \neq \emptyset$.
Natürlich kann $\mathfrak{A}(f)$ leer sein.

4.13 Beispiele. (a) Liegt ein Sprungprozeß vor, gilt also $\varphi(\cdot,x) \equiv x$, so können wir $\mathfrak{X}(f) \equiv 0$ wählen.

(b) Ist S eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$, ist $f : S \mapsto \mathbb{R}$ stetig db und gilt für für φ (3.9), also: $\frac{d}{dt}\varphi(t,x) = b(\varphi(t,x))$, $t\geq 0$, mit einer stetigen Funktion $b = (b_1,...,b_d): S \mapsto \mathbb{R}^d$, so gilt:
$\frac{d}{dt} f(\varphi(t,x)) = \sum_1^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t,x))\cdot b_i(\varphi(t,x))$ nach dem Hauptsatz der Diff.& Int.–rechnung. Wir können also setzen:

(4.14) $\mathfrak{X}(f) := \sum_1^d \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot b_i$. []

Für $\mathfrak{X}(f) \neq \emptyset$ gilt auf $\{N_t < \infty\}$:

$$f(X_{T_k-0}) - f(X_{T_{k-1}}) = f(\varphi(S_k, X_{T_{k-1}})) - f(X_{T_{k-1}}) = \int_0^{S_k} \mathfrak{X}(f)(\varphi(s, X_{T_{k-1}}))\, ds$$

$$= \int_{T_{k-1}}^{T_k} \mathfrak{X}(f)(\varphi(s-T_{k-1}, X_{T_{k-1}}))\, ds = \int_{T_{k-1}}^{T_k} \mathfrak{X}(f)(X_s)\, ds$$

und ebenso

$$f(X_t) - f(X_{T_{N_t}}) = \int_{T_{N_t}}^{t} \mathfrak{X}(f)(X_s)\, ds \quad . \quad \text{Es folgt:}$$

$$f(X_t) - f(X_0) = f(X_t) - f(X_{T_{N_t}}) + f(X_{T_{N_t}}) - f(X_0) =$$

$$f(X_t) - f(X_{T_{N_t}}) + \sum_{k=1}^{N_t} \left([f(X_{T_k}) - f(X_{T_k-0})] + [f(X_{T_k-0}) - f(X_{T_{k-1}})] \right)$$

$$= \int_{T_{N_t}}^{t} \mathfrak{X}(f)(X_s)\, ds + \sum_{k=1}^{N_t} \left([f(X_{T_k}) - f(X_{T_k-0})] + \int_{T_{k-1}}^{T_k} \mathfrak{X}(f)(X_s)\, ds \right), \text{ also :}$$

(4.15) $$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t \mathfrak{X}(f)(X_s)\, ds + \sum_{k=1}^{N_t} [f(X_{T_k}) - f(X_{T_k-0})]$$

auf $\{N_t < \infty\}$ für $\mathfrak{X}(f) \neq \emptyset$.

Wir werden die folgenden Voraussetzungen benutzen:

(4.16) **I(f,τ,P)** $$E\left[\int_0^{\tau} ds \int \lambda Q(X_s; dz)\, |f(z) - f(X_s)| \right] < \infty ;$$

Ĩ(f,τ,P) $$E\left[\int_0^{\tau} |\mathfrak{X}(f)(X_s)|\, ds \right] < \infty .$$

4.17 Bemerkung. Die Beziehung (4.15) gilt für $t = \tau(\omega)$ auf $\{\tau < T_\infty\}$.

4.18 Dynkin–Formel. Sei τ $\mathbb{F}$–Stoppzeit mit $\tau < T_\infty$ f.s. , $\mathfrak{X}(f) \neq \emptyset$, sodaß I(f,τ,P) und Ĩ(f,τ,P) erfüllt sind. Dann gilt:

$$E[\, f(X_\tau) - f(X_0)\,] = E\left[\int_0^{\tau} \mathfrak{A}(f)(X_s)\, ds \right].$$

Beweis: Setzt man in der Lévy–Formel 4.10 $f(x,y) = [f(y)-f(x)]^{\pm}$, so erhält man

$$E\left[\sum_{k=1}^{N_\tau} [f(X_{T_k}) - f(X_{T_k-0})]^{\pm} \right] = E\left[\int_0^{\tau} ds \int \lambda Q(X_s; dz)\, [f(z) - f(X_s)]^{\pm} \right] < \infty \quad \text{wegen}$$

I(f,τ). Die Behauptung folgt jetzt aus (4.15). []

Für $\tau = t$ ergibt sich aus 4.18:

4.19 Kolmogoroffsche Vorwärtsgleichung. Sei $T_\infty = \infty$ P_x–f.s., $\mathfrak{X}(f) \neq 0$, sodaß $I(f,t,P_x)$ und $\tilde{I}(f,t,P_x)$ erfüllt sind für $x \in S$. Dann gilt:

$$E_x[f(X_t)] = f(x) + {}_0\int^t E_x[\mathfrak{A}(f)(X_s)]\, ds\,, \quad x \in S.$$

Es soll nun die Rückwärtsgleichung bewiesen werden. Dabei soll die Bildung von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{J}$ mit dem E–Operator vertauscht werden. Dazu untersuchen wie $\mathfrak{X}(F(s,\cdot))$ mit

$$F(s,x) := E_x[f(X_s)].$$

Einen ersten Schritt macht das folgende

4.20 Lemma. Unter den Voraussetzungen von 4.19 gilt für $t \geq 0$:

$$F(s,\varphi(t,x)) \cdot e^{-\Lambda(t,x)} - F(s,x) = {}_0\int^t [g(u) - e^{-\Lambda(u,x)} \cdot \alpha(u)]\, du$$
mit $g(u) := E_x[\mathbf{1}_{\{T_1>u\}} \cdot \mathfrak{A}(f)]$
und $\alpha(u) := \int \lambda Q(\varphi(u,x);dy)F(s,y)$.

Beweis [Gerhild Jakobs]**:** Nach 7.11 ist $F(t,x) \in \mathbb{R}$. Setze $\tau := t \wedge T_1 + s \leq t + s$.
Mit der ME bei t erhält man

$$F(s,\varphi(t,x)) \cdot e^{-\Lambda(t,x)} = E_{\varphi(t,x)}[f(X_s)] \cdot P_x[T_1>t] = E_x[f(X_{t+s}) \cdot \mathbf{1}_{\{T_1>t\}}]$$
$$= E_x[f(X_\tau) \cdot \mathbf{1}_{\{T_1>t\}}] = E_x[f(X_\tau)] - E_x[f(X_\tau) \cdot \mathbf{1}_{\{T_1\leq t\}}].$$

Nun gilt nach der Dynkin–Formel 4.18:

$$E_x[f(X_\tau)] = f(x) + E_x[\, {}_0\int^\tau \mathfrak{A}(f)(X_u)\, du\,]$$
$$= f(x) + E_x[\, {}_0\int^s (\,...\,)\, du\,] + E_x[\, {}_s\int^\tau (\,...\,)\, du\,]$$
$$= F(s,x) + E_x[{}_0\int^{t\wedge T_1} \mathfrak{A}(f)(X_{u+s})\, du\,]$$
$$= F(s,x) + {}_0\int^t E_x[\mathbf{1}_{\{T_1>u\}} \cdot \mathfrak{A}(f)(X_{u+s})]\, du = F(s,x) + {}_0\int^t g(u)\, du\,;$$

Ferner folgt mit der ME bei T_1 und (3.12):

$$E_x[f(X_\tau) \cdot \mathbf{1}_{\{T_1\leq t\}}] = E_x[f(X_{T_1+s}) \cdot \mathbf{1}_{\{T_1\leq t\}}] = E_x[\mathbf{1}_{\{T_1\leq t\}} \cdot F(s,X_{T_1})]$$
$$= {}_0\int^t du\, e^{-\Lambda(u,x)} \cdot \int \lambda Q(\varphi(u,x);dz)F(s,z) = {}_0\int^t e^{-\Lambda(u,x)} \cdot \alpha(u)\, du\,. \quad [\,]$$

4.21 Produktregel (part. Integration). Seien $G_i : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ gegeben mit

$G_i(t) - G_i(0) = {}_0\int^t g_i(u)\, du$, g_i mb und ${}_0\int^t |g_i(u)|\, du < \infty$, $t \geq 0$. Dann gilt:

$$G_1(t)G_2(t) - G_1(0)G_2(0) = {}_0\int^t [G_1(u)g_2(u) + g_1(u)G_2(u)]\, du.$$

Dies ist eine Spezialfall einer noch folgenden allgemeineren Form und kann leicht mit Fubini gezeigt werden.

Gemäß 3.13 ist $e^{\Lambda(t,x)}$ und nach 4.20 ist $F(s,\varphi(t,x))\cdot e^{-\Lambda(t,x)}$ absolut stetig. Also ist nach 4.21 auch $F(s,\varphi(t,x))$ absolut stetig. Genauer gilt:

4.22 Lemma. Unter den Vorauss. von 4.20 gilt:

$$F(s,\varphi(t,x)) - F(s,x) = \int_0^t \left[E_{\varphi(u,x)}[\mathfrak{A}(f)(X_s)] - \mathfrak{I}(F)(s,\varphi(u,x)) \right] du \text{ , also}$$
$$\mathfrak{X}(F)(s.\cdot) \neq \emptyset \text{ mit } \mathfrak{X}(F(s,\cdot))(x) := E_x[\mathfrak{A}(f)(X_s)] - \mathfrak{I}(F(s,\cdot))(x),\ x \in S .$$

Beweis: Nach 4.20 und 4.21 gilt:

$$F(s,\varphi(t,x)) - F(s,x) = \int_0^t [e^{\Lambda(u,x)} g(u) - \alpha(u) + \lambda(\varphi(u,x))F(s,\varphi(u,x))]\, du$$
$$= \int_0^t [e^{\Lambda(u,x)} g(u) - \mathfrak{I}(F(s,\cdot))(\varphi(u,x))]\, du .$$

Nach Voraussetzung ist

$E_x[\int_0^t \mathbf{1}_{\{T_1>u\}} \cdot |\mathfrak{A}(f)(X_{u+s})|\, du] < \infty$. Nach Fubini ist somit

$N := \{u \in [0,t];\ E_x[\mathbf{1}_{\{T_1>u\}} \cdot |\mathfrak{A}(f)(X_{u+s})|] = \infty\}$ ein λ_1–Nullmenge.

Für $[0,t] \setminus N$ folgt nun mit der ME bei u

$$g(u) = E_x[\mathbf{1}_{\{T_1>u\}} \cdot \mathfrak{A}(f)(X_{u+s})]$$
$$= E_x[\mathbf{1}_{\{T_1>u\}} \cdot E_{\varphi(u,x)}[\mathfrak{A}(f)(X_s)]]$$
$$= e^{-\Lambda(u,x)} \cdot E_{\varphi(u,x)}[\mathfrak{A}(f)(X_s)] .\ \square$$

4.22 besagt insbesondere unter den Vorauss. von 4.20:

(4.23) $$\mathfrak{A}(F(s,\cdot))(x) = E_x[\mathfrak{A}(f)(X_s)] \ .$$

4.24 Kolmogoroffsche Rückwärtsgleichung. Sei $T_\infty = \infty$ P_x–f.s., $\mathfrak{X}(f) \neq \emptyset$, sodaß $I(f,t,P_x)$ und $\tilde{I}(f,t,P_x)$ erfüllt sind für $x \in S$, $t \geq 0$. Dann gilt $\mathfrak{X}(F)(s.\cdot) \neq \emptyset$ und:

$$E_x[f(X_t)] = F(t,x) = f(x) + \int_0^t \mathfrak{A}(F(s,\cdot))(x)\, ds$$
mit $\mathfrak{A}(F(s,\cdot))(x) = E_x[\mathfrak{A}(f)(X_s)]$, $x \in S$, $s,t \geq 0$.

Beweis: Aus (4.23) und der Vorwärtsgleichung 4.19 folgt die Behauptung. $\square$

§ 5 Zeitstetige Martingale.

Neben stochastischen Prozessen auf $[0,\infty)$ sollen auch solche auf $[0,T]$ betrachtet werden. Es sei stets ein fester W–Raum $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ zugrundegelegt mit einer Filterung $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_t,\ t \in [0,T]\cap\mathbb{R})$ in $\mathfrak{F}$ für ein $T \in [0,\infty]$.

Definition 1. $X = (X_t,\ t \in [0,T]\cap\mathbb{R})$ sei ein stochastischer Prozeß mit Zustandsraum $\mathbb{R}$.

Dabei ist T der **Zeithorizont**. Dann heißt $(X,\mathbb{F})$ **Martingal** [bzw. **Submartingal** bzw. **Supermartingal**], falls gilt:

i) X ist $\mathbb{F}$–adaptiert;

ii) $E[|X_t|] < \infty \quad \forall\, t\geq 0$;

iii) $E[X_t|\mathfrak{F}_s] = X_s$ f.s. $\forall\, s\leq t$ [bzw. "≥" bzw. "≤"].

Offenbar ist (iii) in der obigen Situation äquivalent zu

iii)' $\int_A (X_t - X_s)\, dP = 0 \quad \forall\, A \in \mathfrak{F}_s,\ s\leq t.$

5.1 Beispiel: **Brownsche Bewegung.** Sei $(W,\mathbb{F})$ eine 1–dim. standard. BB.

(a) $(W,\mathbb{F})$ ist ein Mart, es gilt:

$E[W_t - W_s|\mathfrak{F}_s] = E[W_t - W_s] = 0$ für $s\leq t$;

denn der Zuwachs $W_t - W_s$ ist unabhängig von $\mathfrak{F}_s$.

(b) $((W_t^2 - t),\mathbb{F})$ ist ein Mart und $((W_t^2),\mathbb{F})$ ist ein Submart. Dies folgt aus:

$$E[W_t^2 - W_s^2|\mathfrak{F}_s] = E[(W_t - W_s)^2 + 2W_s\cdot W_t - 2W_s^2|\mathfrak{F}_s]$$
$$= E[(W_t - W_s)^2] + 2W_s\cdot E[W_t|\mathfrak{F}_s] - 2W_s^2 = t - s \geq 0\ .\ \square$$

5.2 Beispiel: Poissonprozeß. Sei N ein Poisson–Prozeß mit Intensität $\lambda \in (0,\infty)$, $\mathbb{F}$ die kanonische Filterung und $M_t := N_t - \lambda\cdot t$. Dann heißt M **kompensierter Poisson–Prozeß**.

N und M haben unabhängige und stationäre Zuwächse,; deshalb folgt wie in Beispiel 5.1:

$(M,\mathbb{F})$ und $((M_t^2 - \lambda t),\mathbb{F})$ sind Martingale, und $(M^2,\mathbb{F})$ und $(N,\mathbb{F})$ sind Submartingale.

Dies sind auch Spezialfälle des folgenden Satzes. $\square$

5.3 Satz. Sei X ein PDP auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit $T_\infty = \infty$ f.s. und $\mathbb{F}$ wie in § 6. Sei ferner $\mathfrak{X}(f) \neq \emptyset$, sodaß $I(f,t,P)$ und $\tilde{I}(f,t,P)$ aus (4.16) erfüllt sind $\forall\, t\geq 0$. Setzt man

$$M_t := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathfrak{A}(f)(X_s)\, ds\ ,\ t\geq 0, \quad \text{mit } \mathfrak{A}(f) := \mathfrak{X}(f) + \mathfrak{J}(f),$$

so ist $(M,\mathbb{F})$ ein Mart.

Beweis: Wir zeigen: $E[\mathbf{1}_A\cdot(M_{t+u} - M_t)] = 0$ für $A \in \mathfrak{F}_t$, $t,u \geq 0$.

Setze $\alpha(x) := |\mathfrak{X}(f)(x)| + \int \lambda Q(x;dz)\,|f(z) - f(x)|$, dann gilt: $|\mathfrak{A}(f)| \le \alpha$.

Wegen I(f,t+u,P) und $\tilde{I}$(f,t+u,P) gilt: $E\left[{}_0\int^u \alpha(X_{t+s})\,ds\right] < \infty$.
Nach (4.15) können wir auf $\{N_t < \infty\}$ schreiben:

(*) $f(X_{t+u}) - f(X_t) = {}_t\int^{t+u} \mathfrak{X}(f)(X_s)\,ds + \sum_{N_t<k\le N_{t+u}} \left[f(X_{T_k}) - f(X_{T_k-0})\right]$.

Nun folgt aus 5.6 unten für $A \in \mathfrak{F}_t$:

$E\left[\mathbf{1}_A \cdot \sum_{N_t<k\le N_{t+u}} \left[f(X_{T_k}) - f(X_{T_k-0})\right]\right] = E\left[\mathbf{1}_A \cdot {}_t\int^{t+u} \lambda Q(X_s;dz)\,\left[f(z) - f(X_s)\right]\right]$.

Aus (*) folgt nun:

$$E\left[1_A \cdot (f(X_{t+u}) - f(X_t))\right] = E\left[\mathbf{1}_A \cdot {}_t\int^{t+u} \mathfrak{A}(f)(X_s)\,ds\right]. \quad [\,]$$

5.4 Anwendung von Satz 5.3 auf Beispiel 5.2.

Seien N und M wie in 5.2. N ist ein PDP mit $\varphi(\cdot,x) = x$, $\lambda(x) = \lambda$ und $Q(x;x+1) = 1$.
Setzt man $f(x) = x$, so folgt $\mathfrak{X}(f) \equiv 0$ nach 4.13a und $\mathfrak{J}(f)(x) = \lambda \cdot (x+1 - x) = \lambda$.
Nach 5.3 ist also $N_t - \lambda \cdot t$ ein Mart.
M ist ein PDP mit $\varphi(t,x) = x - \lambda \cdot t$ und λ und Q wie bei N.

Betrachtet man $f(x) = x^2$, so folgt mit (7.6): $\tilde{f}(x) = -2x \cdot \lambda$.

Also ist $\mathfrak{X}(f)(x) + \mathfrak{J}(f)(x) = -2\lambda x + \lambda \cdot ((x+1)^2 - x^2) = \lambda$.

Also ist nach 5.3 $M_t^2 - \lambda t$ ein Mart.
Die Integrierbarkeitsbedingungen von 5.3 sind leicht nachzuprüfen. [ ]

5.5 Korollar. Gilt in der Situation von 5.3: $\mathfrak{A}(f) \equiv 0$, so ist $(f(X),\mathbb{F})$ ein Mart mit $f(X) := (f(X_t), t\ge 0)$.

5.6 Satz. Sei X ein PDP auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ mit $T_\infty = \infty$ f.s. und $\mathbb{F}$, λQ, N_t wie in § 3. Sei Y ein vorhersagbarer Prozeß mit Zustandsraum $(D,\mathfrak{D})$ und $f : D\times S \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ eine mb Funktion mit:

$$E\left[{}_0\int^t ds \int \lambda Q(X_s,dz)\,|f(Y_s,z)|\right] < \infty \quad \forall\, t\ge 0.$$

Sei $M_t := \sum_{k=1}^{N_t} f(Y_{T_k},X_{T_k}) - {}_0\int^t ds \int \lambda Q(X_s,dz)\, f(Y_s,z)$, $t \ge 0$;
dann ist $(M,\mathbb{F})$ ein Martingal.

Beweis: Wähle $t,u > 0$, $A \in \mathfrak{F}_t$, setze $\tilde{Y}_s = (\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_{(t,\infty)}(s), Y_s)$ und
$\tilde{f}(\tilde{Y}_s,X_s) := \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_{(t,\infty)}(s) \cdot f^{\pm}(Y_s,X_s)$. Dann folgt aus dem Projektionssatz 4.6:

$E\left[\mathbf{1}_A \cdot \sum_{N_t<k\le N_{t+u}} f(Y_{T_k},X_{T_k})\right] = E\left[\mathbf{1}_A \cdot {}_t\int^{t+u} ds \int \lambda Q(X_s,dz)\, f^{\pm}(Y_s,z)\right]$.

Nach Voraussetzung können wir also schreiben: $E\left[\mathbf{1}_A \cdot (M_{t+u} - M_t)\right] = 0$. [ ]

5.7 Lemma. Sei $(X,\mathbb{F})$ Mart [bzw. Submart], $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ konvex [bzw. konvex und isoton], sodaß $\varphi(X_t)$ für $t \geq 0$ intb. ist. Dann ist $(\varphi(X),\mathbb{F})$ Submart mit $\varphi(X) := (\varphi(X_t), t \geq 0)$.

Der **Beweis** verläuft wie im zeitdiskreten Fall.

Viele Aussagen für zeitstetige [Sub–] Martingale können auf entsprechende Aussagen für zeitdiskrete Prozesse zurückgeführt werden Dabei ist es bequem, auch zeitdiskrete [Sub–] Martingale mit einer abzählbaren Indexmenge $I = \{t_0 < t_1 < ...\} \subset [0,\infty)$ zuzulassen. Der Begriff einer Stoppzeit τ mit Werten in I oder $I \cup \{\infty\}$ und die Resultate über [Sub–] Martingale mit Indexmenge $I \subset \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ übertragen sich in natürlicher Weise.

5.8 Stoppsatz. Ist $(X,\mathbb{F})$ Submart mit rechtsstetigen Pfaden und sind σ,τ beschränkte $\mathbb{F}_+$–Stoppzeiten mit $\sigma \leq \tau$, so sind X_σ und X_τ intb und es gilt:

$$E[X_\tau \mid \mathfrak{F}_{\sigma+}] \geq X_\sigma \text{ f.s. .}$$

Nach 1.10 ist X_σ $\mathfrak{F}_{\sigma+}$–mb mit $\mathfrak{F}_{\sigma+} \subset \mathfrak{F}_\infty \subset \mathfrak{F}$.
Ist σ sogar $\mathbb{F}$–Stoppzeit, so folgt in der Situation von 9.8 erst recht [vgl. etwa (5.12)]:

(5.9) $$E[X_\tau \mid \mathfrak{F}_\sigma] \geq X_\sigma \text{ f.s. ;}$$

denn X_σ ist dann $\mathfrak{F}_\sigma$–mb nach 1.10.

5.10 Folgerung Für Martingale X erhält man im Stoppsatz "=" anstelle von "≥", da dann sowohl X als auch –X Submart ist.

5.11 Folgerung. Ist $(X,\mathbb{F})$ Submart [bzw. Mart] mit rechtsstetigen Pfaden, so ist auch $(X,\mathbb{F}_+)$ Submart [bzw. Mart].

Beweis von 5.8. Sei etwa $\tau < N \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist neben der Integrierbarkeit:

(5.12) $$\int_A X_\sigma \, dP \leq \int_A X_\tau \, dP \quad \text{für } A \in \mathfrak{F}_{\sigma+}.$$

Sei $\sigma_n := k/2^n$ auf $\{(k-1)/2^n \leq \sigma < k/2^n$ für $k = 1,...,N \cdot 2^n$ und τ_n entsprechend definiert. Dann gilt: $\sigma < \sigma_n \leq \tau_n \leq \tau_{n-1}$, $\sigma_n \downarrow \sigma$, $\tau_n \downarrow \tau$. Wegen $\{\sigma_n \leq k/2^n\} = \{\sigma < k/2^n\}$ sind σ_n und entsprechend τ_n gemäß 1.6 $\mathbb{F}$–Stoppzeiten mit [vgl. 1.9e und 1.12]

$$\mathfrak{F}_{\sigma+} \subset \mathfrak{F}_{\sigma_n} \subset \mathfrak{F}_{\tau_n} \subset \mathfrak{F}_{\tau_{n-1}}.$$

Nun kann als Vorstufe Folgendes gezeigt werden:

(*) $$\int_A X_{\sigma_n} \, dP \leq \int_A X_{\tau_m} \, dP \quad \text{für } A \in \mathfrak{F}_{\sigma_n} \supset \mathfrak{F}_{\sigma+},\ m \leq n$$

Die Zufallsabhängigkeit von σ_n beherrscht man durch Einführung von

(**) $$A_k^n := A \cap \{\sigma_n = k/2^n\} = A \cap \{\sigma < k/2^n\} \setminus \{\sigma < (k-1)/2^n\} \in \mathfrak{F}_{k/2^n}$$

und diejenige von τ_m durch den zeitdiskreten Stoppsatz.

Sei $I_n := \{k/2^n;\ k = 0,1,...,N\cdot 2^n\}$.
Dann ist $(X_t,\mathfrak{F}_t,\ t \in I_n)$ ein zeitdiskretes Submart und τ_m Stoppzeit dazu wegen:

$\{\tau_m = t\} \in \mathfrak{F}_t$ für $t \in I_m$ nach (**) und $\{\tau_m = t\} = \emptyset$ für $t \in I_n \setminus I_m$.

Somit ist nach dem zeitdiskreten Stoppsatz [vgl. W.th. II 4.6] $(X_{t\wedge\tau_m},\mathfrak{F}_t,\ t \in I_n)$ Submart, insbesondere $X_{\tau_m} = X_{N\wedge\tau_m}$ intb. Es folgt:

$$A\int_k^n X_{\sigma_n}\,dP = A\int_k^n X_{(k/2^n)\wedge\tau_m}\,dP \le A\int_k^n X_{N\wedge\tau_m}\,dP = A\int_k^n X_{\tau_m}\,dP\ .$$

Durch Summation über k erhält man (*). Setzt man (*) $\sigma = \tau$, so ergibt sich:

$$A\int X_{\tau_n}\,dP \le A\int X_{\tau_m}\,dP \quad \text{für } A \in \mathfrak{F}_{\tau_n},\ m\le n.$$

Definiert $\tilde{X}_{-n} := X_{\tau_n}$ und $\tilde{\mathfrak{F}}_{-n} := \mathfrak{F}_{\tau_n}$, so ist $(\tilde{X}_{-m}, \tilde{\mathfrak{F}}_{-m},\ m=...-2,-1,0)$ also ein Submart. Somit ist $(X_{\tau_n}\vee a)$ für $a \in \mathbb{R}$ glm intb [vgl. W.th. II 4.4]. Entsprechendes gilt für σ anstelle von τ. Das gestattet den Grenzübergang $m=n \to \infty$ [vgl. W.th.II 4.3] in (*) für $A \in \mathfrak{F}_{\sigma+}$, wenn man X_t durch $X_t\vee a$ ersetzt, was nach 5.7 erlaubt ist. Also ergibt sich wegen der Rechtsstetigkeit der Pfade:

$$A\int X_\sigma\vee a\,dP \le A\int X_\tau\vee a\,dP,\ A \in \mathfrak{F}_{\sigma+},\ \text{insbesondere: } E[X_0\vee a] \le E[X_\tau\vee a] \le E[X_N\vee a]\ .$$

Wegen monot. Konv. folgt schließlich für $a\downarrow-\infty$ das gewünschte Resultat.
Der letzte Teil ist dem Beweis des zeitdiskreten Martingal–Konvergenzsatzes [vgl. W.th. II 4.9] nachgebildet. []

5.13 Stoppsatz. Sei $(X,\mathbb{F})$ Submart [bzw. Mart] mit rechtsstetigen Pfaden und

$X^\tau = (X_{t\wedge\tau},\ t\ge 0)$ der gestoppte Prozeß. Ist τ $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit, so ist auch $(X^\tau,\mathbb{F}_+)$ Submart [bzw. Mart].

Beweis. Die Adaptiertheit an $\mathbb{F}_+$ folgt aus 1.10. Sei $s<t$, $A \in \mathfrak{F}_{s+}$. Es gilt $\{\tau > s\} \in \mathfrak{F}_{s+}$.
Auf $\{\tau \le s\}$ gilt: $X_{s\wedge\tau} = X_{t\wedge\tau}$. Ferner folgt mit dem Stoppsatz 5.8 für die Stoppzeiten s und $\tau' := t\wedge(\tau\vee s) \ge s$:

$$A\cap\{\tau>s\}\int X_{s\wedge\tau}\,dP = A\cap\{\tau>s\}\int X_s\,dP \le A\cap\{\tau>s\}\int X_{\tau'}\,dP = A\cap\{\tau>s\}\int X_{t\wedge\tau}\,dP\ .[]$$

Im Fall, daß X nicht nur Submart, sondern sogar isotone Pfade hat, ist folgender Satz gerade die Markoffsche Ungleichung.

5.14 Maximal–Ungleichung von Doob. Sei $(X,\mathbb{F})$ ein rechtsstetiges nichtnegatives Submart, z.B. $X_s = |M_s|^p$ für ein Mart M und $p\geq 1$. Dann gilt für $t\geq 0$:

(a) $\quad P[\sup_{0\leq s\leq t} X_s \geq \alpha] \leq \alpha^{-p}\cdot E[X_t^p] \quad \forall\, \alpha > 0;$

(b) $\quad E[\sup_{0\leq s\leq t} X_s^2] \leq 4\cdot E[X_t^2].$

Beweis: a) Wähle $I_n := \{kt/2^n;\ k=0,...,2^n\}$. Dann ist $(X_s;\ s\in I_n)$ zeitdiskretes Submart. Aus dem Beweis der zeitdiskreten Maximal–Ungleichung von Doob [vgl. W.Th. II 4.14] folgt

für $V_n := \max_{I_n} X:\ P[V_n \geq z] \leq z^{-p}\cdot \int_{\{V_n\geq z\}} X_t^p\, dP.$

Es gilt: $V_n \uparrow \sup_{[0,t]} X =: V$ wegen der Rechtsstetigkeit der Pfade und somit $\{V_n > z\} \uparrow \{V > z\}$. Damit ergibt sich:

(*) $\quad P[V > z] = \lim_n P[V_n > z] \leq z^{-p}\cdot \int_{\{V>z\}} X_t^p\, dP \leq z^{-p}\cdot E[X_t^p].$

Mit $z\uparrow\alpha$ erhält man die Beh. . b) Es gilt:

(**) $\quad E[V^2] = 2\cdot \int_0^\infty z\cdot P[V > z]\, dz.$

1. Bew. von (*): $E[V^2] = \int_0^\infty P[V^2 > y]\, dy$; setze $y = z^2$.

2. Bew. von (*): $E[V^2] = 2\cdot E[\int_0^V (V-u)\, du] = 2\cdot E[\int_0^V du \int_u^V 1\, dz]$; benutze jetzt Fubini. Mit (*) für p=1 und (**) folgt:

$$E[V^2] \leq 2\cdot \int_0^\infty \int_{\{V>z\}} X_t\, dP\, dz = 2\cdot E[X_t \int_0^V 1\, dz]$$
$$= 2\cdot E[X_t\cdot V] \leq 2\cdot \{E[X_t^2]\cdot E[V^2]\}^{\frac{1}{2}}.[\,]$$

Ein Martingal soll einen Prozeß beschreiben, bei dem weder ein Trend nach oben noch ein Trend nach unten besteht. Die obige Definition ist an die Endlichkeit des Erwartungswertes gebunden. Davon kann man sich durch ein "Stutzung" befreien. Offenbar ist die Stutzung $\varphi_n(X) := X^+\wedge n - X^-\wedge n$ nicht geeignet, da sie eine eventuell bereits vorliegende Martingaleigenschaft zerstören kann, denn φ_n ist nicht konvex. Dagegen kann das Stoppen eines Prozesses in Hinblick auf den Stoppsatz 5.13 eine geeigneten Stutzung bieten.
Ein Prozeß X heißt natürlich glm. intb., wenn es die Familie der Zva $(X_t,\ t\geq 0)$ ist.

Definition 2.(a) Eine isotone Folge (τ_n) von $\mathbb{F}_+$–Stoppzeiten heißt **Lokalisierungsfolge**, falls : $\tau_n \uparrow \infty$ f.s. im Falle $T=\infty$ bzw. $P[\cup_n \{\tau_n \geq T\}] = 1$ im Falle $T<\infty$.

(b) Ist X ein $\mathbb{F}$–adaptierter rechtsstetiger Prozeß und existiert eine Lokalisierungsfolge, sodaß der gestoppte Prozeß $(X^{(n)},\mathbb{F})$ mit $X_t^{(n)} := X_{t\wedge\tau_n}$, $n\in\mathbb{N}$, ein glm. intb. Mart ist, so heißt $(X,\mathbb{F})$ ein **lokales Martingal** mit Lokalisierungsfolge (τ_n) und (τ_n) Lokalisierungsfolge für X.

Sowohl für $T=\infty$ als auch für $T<\infty$ hat man die wichtige Eigenschaft:

(5.15) $X_{t\wedge\tau_n} \to X_t$ f.s. für $n\to\infty$, $t \in [0,T]\cap\mathbb{R}$ für jede Lokalisierungsfolge (τ_n).

Aus dem Stoppsatz 5.13 folgt:

5.16 Lemma. Sei $(X,\mathbb{F})$ lokales Mart mit Lokalisierungsfolge (τ_n), σ eine $\mathbb{F}_+$–Stoppzeit und (σ_n) eine beliebige Lokalisierungsfolge. Dann ist $X^\sigma = (X_{t\wedge\sigma},\ t \in [0,T]\cap\mathbb{R})$ wieder ein lokales Mart; $(\tau_n\wedge\sigma_n)$ und insbesondere $(\tau_n\wedge n)$ sind Lokalisierungsfolgen für X.

Beweis: Sicher ist $(\tau_n\wedge\sigma_n)$ Lokalisierungsfolge. Nach dem Stoppsatz 5.13 ist $(X^{(n)}_{t\wedge\sigma},\ t\ge0) = (X_{t\wedge\tau_n\wedge\sigma},\ t\ge0)$ ein Martingal. Sei $\psi(x) := (|x|-\alpha)^+$. Dann ist ψ konvex und somit $\psi(X^{(n)})$ nach 5.7 ein Submart. Es folgt nach dem Stoppsatz 5.8: $E[\psi(X^{(n)}_{t\wedge\sigma})] \le E[\psi(X^{(n)}_t)]$.

Aus der glm. Integrierbarkeit von $X^{(n)}$ folgt also die von $(X^{(n)}_{t\wedge\sigma},\ t\ge0)$. Dies gilt auch für σ_n anstelle von σ. $[]$

Jedes Martingal ist ein lokales Martingal; man kann $\tau_n=n$ als Lokalisierungsfolge wählen. Die glm. Integrierbarkeit von $(X_t,\ t\le n)$ folgt aus $E[\psi(X_t)] \le E[\psi(X_n)] \to 0$ für $\alpha\uparrow\infty$, wobei ψ wie im Beweis von 5.16 gewählt wird. [vgl. auch den Beweis von W.th. II 4.4.]

5.17 Lemma. (a) Ein nichtnegatives lokales Mart X ist ein Supermart.

(b) Ein Supermart [Submart] X mit $E[X_0] = E[X_t]\ \forall\ t\ge0$ ist ein Mart.

Beweis. Sei $s<t$.

a) Ist (τ_n) eine Lokalisierungsfolge für X, so folgt zunächst die Integrierbarkeit mit Fatou:

$$0 \le E[X_t] \le \underline{\lim}\, E[X_{t\wedge\tau_n}] = \underline{\lim}\, E[X_{0\wedge\tau_n}] = E[X_0].$$

Aus dem Lemma von Fatou für bedingte Erwartungwerte [vgl. W.th. II 1.11b] ergibt sich :

$$X_s = \lim X_{s\wedge\tau_n} = \lim E[X_{t\wedge\tau_n}|\mathfrak{F}_s] \ge E[\lim X_{t\wedge\tau_n}|\mathfrak{F}_s] = E[X_t|\mathfrak{F}_s].$$

b) Einerseits gilt: $Y := E[X_t - X_s|\mathfrak{F}_s] \le 0$, andererseits $E[Y] = 0$; also folgt $Y = 0$ f.s. . $[]$

Das obige Lemma liefert u.a. eine hinreichende Bedingung dafür, daß ein lokales Mart ein Mart ist. Weitere Bedingungen bietet

5.18 Proposition. Ist X ein lokales Mart mit Lokalisierungsfolge (τ_n), so ist X sogar ein Mart unter jeder der folgenden Bedingungen:

(i) $\{X_{t\wedge\tau_n},\ n\in\mathbb{N}\}$ ist glm. intb. $\forall\ t \ge 0$;

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X^2_{t\wedge\tau_n}] < \infty\ \forall\ t\ge0$.

Beweis: Unter (i) folgt für $A \in \mathfrak{F}_s$ und u = s,t aus der glm. Integrierbarkeit [vgl. W.th.II 4.3]:

$$\int_A X_u \, dP = \int_A \lim_n X_{u\wedge\tau_n} \, dP = \lim_n \int_A X_{u\wedge\tau_n} \, dP \, .$$

Der Fall (ii) ist ein Spezialfall von (i) [vgl. W.th.II 4.2(4)]. □

5.19 Proposition. Ist M ein Mart, so gilt:

$$E[M_t \,|\, \mathfrak{F}_{s-}] = M_{s-} \text{ f.s. } \forall\, 0<s\le t \text{ mit } M_{s-} = \lim_n M_{s-1/n} \, .$$

Beweis: Es gilt $M_{s-1/n} = E[M_t \,|\, \mathfrak{F}_{s-1/n}]$.

Nun ist $(\mathfrak{F}_{s-1/n}, n\in\mathbb{N})$ eine zeitdiskrete Filterung, sodaß offenbar gilt:

$$\mathfrak{F}_{s-} = \sigma(\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_{s-1/n}) \, .$$

Aus dem Lévyschen Martingalsatz [vgl. W.th.II Korollar 4.11] folgt:

$$\lim_n E[\, M_t \,|\, \mathfrak{F}_{s-1/n} \,] = E[\, M_t \,|\, \mathfrak{F}_{s-} \,] \quad \text{f.s. .} \; □$$

§ 6 Der Martingaldarstellungssatz.

Eine alternative Formulierung für den Satz 5.6 ist die folgende:

6.1 Korollar. Sei $T_\infty = \infty$ f.s. . Für $k \geq 1$ seien $f_k : \Omega_k^o \mapsto \mathbb{R}$ mb Funktionen mit

(6.1)' $\quad E\left[\int_0^t ds \int \lambda Q(X_s; dz) \, | f_{N_s+1}(H_{N_s}, s, z) | \right] < \infty \quad \forall\, t \geq 0.$

Sei $M_t := \sum_{k=1}^{N_t} f_k(H_k) - \int_0^t ds \int \lambda Q(X_s; dz)\, f_{N_s+1}(H_{N_s}, s, z)$, $t \geq 0$;
dann ist $(M, \mathbb{F})$ ein Martingal.

Man gewinnt 6.1 aus 5.6, indem man mit Hilfe von 2.7 $\xi_t(x) = f_{N_{t-}+1}(H_{N_{t-}}, t, x)$ in der Form $\xi_t(x) = f(Y_t, x)$ schreibt mit einer mb Funktion f und einem vorhersagbaren Prozeß Y.

Ziel dieses § 6 ist es zu zeigen, daß die Form von (M_t) aus 6.1 oder auch 5.6 bereits die allgemeinste Form eines Martingals ist mit $M_0 = 0$. Dabei muß allerdings die Integrierbarkeitsbedingung (6.1)' nicht notwendigerweise gelten. Sie ist nur hinreichend dafür, daß ein Prozeß (M_t) wie in 6.1 ein Martingal ist.

Beispiel 6.2.
Um die Vorgehensweise zu motivieren betrachten wir zunächst:

(6.3) $\quad M_t := E\left[c(H_1) \,|\, \mathfrak{F}_t\right] = E\left[c(Z_0, T_1, Z_1) \,|\, \mathfrak{F}_t\right]$

Unser Ziel ist eine Darstellung:

(6.4) $\quad M_t - M_0 = f(H_1) \cdot \mathbf{1}_{\{T_1 \leq t\}} - \int_0^{t \wedge T_1} ds \int \lambda Q(X_s; dz)\, f(Z_0, s, z)$.

Nun ist $M_0 = E\left[c(H_1) \,|\, \mathfrak{F}_0\right] = \Gamma(0, Z_0)$ mit

(6.5) $\quad \Gamma(t,x) := \int_t^\infty ds \exp\{-\Lambda(s,x)\}\, \bar{c}(x,s) + \exp\{-\Lambda(\infty,x)\} \cdot c(x, \infty, e)$ mit

$\bar{c}(x,s) := \int \lambda Q(\varphi(s \,|\, x); dz) c(x,s,z)$.

Dann gilt

(6.6) $\quad \Gamma(t,x) = \Gamma(0,x) - \int_0^t ds \exp\{-\Lambda(s,x)\}\, \bar{c}(x,s),$

Es ergibt sich

(6.7) $\quad M_t - M_0 = E\left[c(H_1) \,|\, \mathfrak{F}_t\right] - \Gamma(0, Z_0).$

Lemma 6.8. $E\left[c(H_1) \,|\, \mathfrak{F}_t\right] = \mathbf{1}_{\{T_1 \leq t\}} \cdot c(H_1) + \mathbf{1}_{\{T_1 > t\}} \cdot h(t, Z_0)$ mit

$h(t,x) := E_x\left[c(H_1^o) \,|\, T_1^o > t\right] = E_x\left[\mathbf{1}_{\{T_1^o > t\}} \cdot c(H_1^o)\right] / P_x\left[T_1^o > t\right]$

$= \exp\{\Lambda(t,x)\} \cdot \Gamma(t,x).$

Beweis: Es ist $c(H_1)$ $\mathfrak{F}_{T_1}$–mb.; mit maßtheoretischer Induktion folgt sofort, daß $\mathbf{1}_{\{T_1\le t\}}\cdot c(H_1)$ $\mathfrak{F}_t$– mb ist. Dies kann auch aus 2.8 oder 2.11 hergeleitet werden.
Ebenso ist $\mathbf{1}_{\{T_1>t\}}\cdot h(t,Z_0)$ $\mathfrak{F}_t$– mb . Ferner gilt für $A\in\mathfrak{F}_t$ nach 2.11

$A=\cup_{n=0}^{\infty}\{T_n\le t<T_{n+1}\}\cap A_n'\ \cup\{T_\infty\le t\}\cap A_\infty'$; $A_n'\in\sigma(H_n)$, also

$A=\{T_1>t\}\cap A_0\ \cup\{T_1\le t\}\cap A_\infty$, $A_n\in\sigma(H_n)$. Es ergibt sich

$$\int_A c(H_1)\,dP = \int_{\{T_1>t\}\cap A_0} c(H_1)\,dP + \int_{\{T_1\le t\}\cap A_1} c(H_1)\,dP \text{ mit}$$

$$\int_{\{T_1>t\}\cap A_0} c(H_1)\,dP = \int_{A_0}\mathbf{1}_{\{T_1>t\}}\cdot c(H_1)\,dP = \int_{A_0} E_{Z_0}\left[\mathbf{1}_{\{T_1^o>t\}}\cdot c(H_1^o)\right]$$

nach 3.4. Ebenso erhält man:

$$\int_{A_0}\mathbf{1}_{\{T_1>t\}}\cdot h(t,Z_0)\,dP = \int_{A_0} P_{Z_0}[T_1>t]\cdot h(t,Z_0)\,dP$$
$$= \int_{A_0} E_{Z_0}\left[\mathbf{1}_{\{T_1^o>t\}}\cdot c(H_1^o)\right]\,dP = \int_{\{T_1>t\}\cap A_0} c(H_1)\,dP\ .$$

Also hat man insgesamt:

$$\int_A c(H_1)\,dP = \int_{\{T_1>t\}\cap A_0}\mathbf{1}_{\{T_1>t\}}\cdot h(t,Z_0)\,dP + \int_{\{T_1\le t\}\cap A_\infty}\mathbf{1}_{\{T_1\le t\}}\cdot c(H_1)\,dP$$
$$= \int_A\left[\mathbf{1}_{\{T_1>t\}}\cdot h(t,Z_0)+\mathbf{1}_{\{T_1\le t\}}\cdot c(H_1)\right]\,dP\ .\ []$$

Nun kennen wir also mit (6.7) und (6.10) die folgende Darstellung:

$M_t-M_0=\mathbf{1}_{\{T_1\le t\}}\cdot c(H_1)+\mathbf{1}_{\{T_1>t\}}\cdot\exp\{\Lambda(t,Z_0)\}\cdot\Gamma(t,Z_0)-\Gamma(0,Z_0)$, also

(6.9) $$M_t-M_0=\mathbf{1}_{\{T_1\le t\}}\cdot\left[c(H_1)-\Gamma(0,Z_0)\right]$$
$$+\mathbf{1}_{\{T_1>t\}}\cdot\left[\exp\{\Lambda(t,Z_0)\}\cdot\Gamma(t,Z_0)-\Gamma(0,Z_0)\right]$$

Unserem Ziel (6.4) läßt sich in der Form schreiben

(6.10) $$M_t-M_0=\left[f(Z_0,T_1,Z_1)-\int_0^{T_1}ds\int\lambda Q(\varphi(s\,|\,Z_0);dz)\,f(Z_0,s,z)\right]\cdot\mathbf{1}_{\{T_1\le t\}}$$
$$-\mathbf{1}_{\{T_1>t\}}\cdot\int_0^t ds\int\lambda Q(\varphi(s\,|\,Z_0);dz)\,f(Z_0,s,z)\ ,$$

Vergleicht man (6.11) mit (6.4)', so benötigt man

$$c(x,u,y)-\Gamma(0,x)=f(x,u,y)-\int_0^u ds\int\lambda Q(\varphi(s\,|\,x);dz)\,f(x,s,z).$$

Wir machen nun den Ansatz: $f(x,u,y)=c(x,u,y)+\eta(x,u)$; dann erhält man

$$\eta(x,u)+\Gamma(0,x)=\int_0^u ds\int\lambda Q(\varphi(s\,|\,x);dz)\left[\eta(x,s)+c(x,s,z)\right]$$
$$=\int_0^u ds\,\lambda(\varphi(s\,|\,x);dz)\eta(x,s)+\int_0^u ds\,\bar c(x,s)\ .$$

Diese lineare Integralgleichung kann man lösen gemäß

$\eta(x,u) = \exp\{\Lambda(u,x)\} \cdot {}_0\int^u ds\, \exp\{-\Lambda(s,x)\}\ [\bar c(x,s) - \lambda(\varphi(s\,|\,x)) \cdot \Gamma(0,x)] - \Gamma(0,x)$

$= \exp\{\Lambda(u,x)\} \cdot {}_0\int^u ds\, \exp\{-\Lambda(s,x)\}\ \bar c(x,s)$

$\qquad - \exp\{\Lambda(u,x)\} \cdot [1 - \exp\{-\Lambda(u,x)\}] \cdot \Gamma(0,x) - \Gamma(0,x)$

$= \exp\{\Lambda(u,x)\} \cdot {}_0\int^u ds\, \exp\{-\Lambda(s,x)\}\ \bar c(x,s) - \exp\{\Lambda(u,x)\} \cdot \Gamma(0,x)$,

$= -\exp\{\Lambda(u,x)\} \cdot \Gamma(u,x)$ wegen (6.6), also

(6.11) $f(x,u,y) = c(x,u,y) - \exp\{\Lambda(u,x)\} \cdot \Gamma(u,x)$.

Man kann zeigen, daß damit auch die restlichen Terme von (6.9) und (6.10) übereinstimmen.
Da $E[c(H_1)\,|\,\mathfrak{F}_t]$ gemäß 6.8 auch $\sigma(H_1)$–mb und somit auch mb bzgl. $\mathfrak{F}_{T_1} \cap \mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_{t\wedge T_1}$ (vgl. 1.13) ist, folgt

(6.12) $M_t = E[c(H_1)\,|\,\mathfrak{F}_{t\wedge T_1}]$. $[]$

Als nächstes wenden wir uns der Darstellung von bedingten Erwartungswerten von allgemeinen Zva C zu. Wir können uns o.E. auf den Fall $C \geq 0$ beschränken.

(6.13) Sei C intb und $C \geq 0$, sei $M_t = E[C\,|\,\mathfrak{F}_t]$, $C_k := E[C\,|\,H_k]$ ($< \infty$ o.E.), also
$C_k = c_k(H_k)$ für eine geeignete Funktion $c_k : \Omega_k^o \mapsto [0,\infty)$.

Auf $\{T_\infty > t\}$ gilt

(6.14) $M_t - M_0 = \sum_{k=0}^{N_t} (M_{t\wedge T_{k+1}} - M_{T_k}) = \sum_{k=0}^{\infty} (M_{t\wedge T_{k+1}} - M_{T_k}) \cdot \mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}}$.

Dabei hat man

(6.15) $M_{t\wedge T_{k+1}} = E[\,C_{k+1}\,|\,\mathfrak{F}_{t\wedge T_{k+1}}]$

wegen $E[C\,|\,\mathfrak{F}_{t\wedge T_{k+1}}] = E[E[C\,|\,\mathfrak{F}_{T_{k+1}}]\,|\,\mathfrak{F}_{t\wedge T_{k+1}}]$.

In Hinblick auf (6.12) ist das folgende Lemma eine Verallgemeinerung von 6.8 von dem Fall k=0 auf den Fall k≥0.

Lemma 6.16.

$M_{t\wedge T_{k+1}} \cdot \mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}} = E[c_{k+1}(H_{k+1})\,|\,\mathfrak{F}_{t\wedge T_{k+1}}] \cdot \mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}}$
$= \mathbf{1}_{\{T_{k+1} \leq t\}} \cdot c_{k+1}(H_{k+1}) + \mathbf{1}_{\{T_k \leq t < T_{k+1}\}} \cdot \exp\{\Lambda(t-T_k, Z_k)\} \cdot \Gamma_k(t-T_k, H_k)$ f.s.
mit

(6.17) $\Gamma_k(t,H_k) = {}_t\int^\infty ds\ \exp\{-\Lambda(s,Z_k)\} \cdot \bar c_k(H_k,s) + \exp\{-\Lambda(\infty,Z_k)\} \cdot c_{k+1}(H_k,\infty,e)$
$\bar c_k(H_k,s) := \int \lambda Q(\varphi(s\,|\,Z_k);dz) c_{k+1}(H_k, T_k{+}s, z)$.

Beweis: Sei $A \in \mathfrak{F}_{t\wedge T_{k+1}}$, also $A = \{ H_{k+1}^t \in B\}$ nach 2.30. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\int_{\{H_{k+1}^t\in B,T_k\le t\}} c(H_{k+1})\,dP \\
&= \int_{\{H_{k+1}^t\in B,T_{k+1}\le t\}} c(H_{k+1})\,dP \;+\; \int_{\{H_{k+1}^t\in B,T_k\le t<T_{k+1}\}} c(H_{k+1})\,dP \\
&= \int_{\{H_{k+1}^t\in B,T_k\le t\}} c(H_{k+1}^t)\cdot \mathbf{1}_{\{T_{k+1}^t\le t\}}\,dP \\
&\qquad + \int_{\{(H_k,\infty,e)\in B,T_k\le t\}} c(H_k,T_{k+1},Z_{k+1})\cdot \mathbf{1}_{\{t<T_{k+1}\}}\,dP \\
&=: \ldots + \int_{\{H_k\in B_t\}} c(H_k,T_k+S_{k+1},Z_{k+1})\cdot \mathbf{1}_{\{t<T_k+S_{k+1}\}}\,dP \\
&= \ldots + \int_{\{H_k\in B_t\}} E\left[c(H_k,T_k+S_{k+1},Z_{k+1})\cdot \mathbf{1}_{\{t<T_k+S_{k+1}\}} \,|\, H_k\right] dP \\
&=: \ldots + \int_{\{H_k\in B_t\}} \gamma_t(H_k)\,dP \quad .
\end{aligned}$$

Dabei berechnet sich $\gamma_t(h)$, $h \in \Omega_n^o$, gemäß (3.12) und (3.12)' zu:

$$\begin{aligned}
\gamma_t(\ldots,u,x) &= \int_{t-u}^{\infty} ds\, \exp\{-\Lambda(s,x)\} \int \lambda Q(\varphi(s\,|\,x);dz)c(\ldots,u,x,u+s,z) \\
&\qquad + \exp\{-\Lambda(\infty,x)\}\cdot c(\ldots,u,x,\infty,e)\ .
\end{aligned}$$

Ersetzt man in diesen Überlegungen $c(H_{k+1})$ durch $\exp\{\Lambda(t-T_k,Z_k)\}\cdot\gamma_t(H_k)$, so erhält man

$$\int_{\{H_{k+1}^t\in B,T_k\le t<T_{k+1}\}} \exp\{\Lambda(t-T_k,Z_k)\}\cdot\gamma_t(H_k)\,dP = \int_{\{H_k\in B_t\}} \tilde{\gamma}_t(H_k)\,dP \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_t(\ldots,u,x) &= \exp\{\Lambda(t-u,x)\}\cdot\gamma_t(\ldots,u,x)\cdot\left[\int_{t-u}^{\infty} ds\,\exp\{-\Lambda(s,x)\}\lambda(\varphi(s\,|\,x)) + \exp\{-\Lambda(\infty,x)\}\right] \\
&= \exp\{\Lambda(t-u,x)\}\cdot\gamma_t(\ldots,u,x)\cdot\exp\{-\Lambda(t-u,x)\} = \gamma_t(\ldots,u,x)\ .
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
&\int_{\{H_{k+1}^t\in B,T_k\le t\}} c(H_{k+1})\,dP \\
&= \ldots + \int_{\{H_{k+1}^t\in B,T_k\le t<T_{k+1}\}} \exp\{\Lambda(t-T_k,Z_k)\}\cdot\gamma_t(H_k)\,dP \\
&= \int_{\{H_{k+1}^t\in B,T_k\le t\}} c(H_{k+1}^t)\cdot\mathbf{1}_{\{T_{k+1}^t\le t\}}\,dP \\
&\qquad + \int_{\{H_{k+1}^t\in B,T_k\le t\}} \exp\{\Lambda(t-T_k^t,Z_k)\}\cdot\gamma_t(H_k^t)\cdot\mathbf{1}_{\{t<T_{k+1}\}}\,dP \\
&= \int_{\{H_{k+1}^t\in B,T_k\le t\}} \left[c(H_{k+1}^t)\cdot\mathbf{1}_{\{T_{k+1}^t\le t\}} + \exp\{\Lambda(t-T_k^t,Z_k)\}\cdot\gamma_t(H_k^t)\cdot\mathbf{1}_{\{t<T_{k+1}^t\}}\right] dP.
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt wegen $\{T_n\le t\} = \{T_n^t\le t\}$, $\{T_n>t\} = \{T_n^t>t\}$:

$$\begin{aligned}
&E\left[c(H_{k+1})\,|\,\mathfrak{F}_{t\wedge T_{k+1}}\right]\cdot\mathbf{1}_{\{T_k\le t\}} \\
&\qquad = \mathbf{1}_{\{T_{k+1}\le t\}}\cdot c(H_{k+1}^t) + \mathbf{1}_{\{T_k\le t<T_{k+1}\}}\cdot\exp\{\Lambda(t-T_k^t,Z_k^t)\}\cdot\gamma_t(H_k^t)\ .
\end{aligned}$$

Mit $H_k^t = H_k$ auf $\{T_k\le t\}$ und $\gamma_t(H_k) = \Gamma_k(t-T_k,H_k)$ folgt die Behauptung. $[]$

Die folgende Beziehung ergibt sich wegen $M_{T_k} = E\left[c_{k+1}(H_{k+1}) \mid \mathfrak{F}_{T_k}\right]$ sofort aus (3.12) und (3.12)':

(6.18) $\quad \Gamma_k(t,H_k) \le \Gamma_k(0,H_k) = C_k = M_{T_k}$, $t \ge 0$, $\forall\, k$ f.s. .

Wir setzen nun auf $\{N_t<\infty\} = \{T_\infty>t\}$:

(6.19) $\quad M_t^* := \exp\{\Lambda(t-T_{N_t},Z_{N_t})\} \cdot \Gamma_{N_t}(t-T_{N_t},H_{N_t}) \cdot \mathbf{1}_{\{D_{N_t}<\infty,\, N_t<\infty\}}$.

6.20 Proposition. Ist $T_\infty = \infty$ f.s. , so ist $\{M_t^*\}$ ein rechtsstetiges reelles Martingal mit $M_t^* = E\left[C \mid \mathfrak{F}_t\right]$ $(= M_t)$ f.s. . Dabei ist $\{M_t^*\}$ in $[T_n,T_{n+1})$ sogar absolut stetig.

Beweis. Auf $\{N_t=k\}$ gilt $M_t^* = m_t(H_k)$ für eine geeignete mb Funktion m_t. Es folgt: $\{N_t=k,\, M_t^* \in B\} = \{T_k \le t<T_{k+1}\} \cap \{m_t(H_k) \in B\} \in \mathfrak{F}_t$ nach 2.11. Auf $\{N_t=\infty\}$ ist $M_t^* \equiv 0$; also ist M_t^* $\mathfrak{F}_t$–mb . Nach Konstruktion ist M_t^* reellwertig. Für $t \in [T_\infty,\infty)$ ist wie gesagt $M_t^*=0$, für $t \in [T_k,T_{k+1})$ und $\Gamma_k(0,H_k) = \infty$ ist ebenfalls $M_t^*=0$; für $t \in [T_k,T_{k+1})$ und $\Gamma_k(0,H_k) < \infty$ gilt: $M_t^* = \exp\{\Lambda(t-T_k,Z_k)\} \cdot \Gamma_k(t-T_k,H_k)$. Mit $\exp\{\Lambda(t,z)\}$ (vgl. Exponentialformel 3.13, 3.14) und $\Gamma_k(t,h)$ bei $\bar\Gamma_k(0,h)<\infty$ ist auch $\exp\{\Lambda(t,z)\} \cdot \Gamma_k(t,h)$ absolut stetig (vgl. Produktformel 4.21).
Auf $\{\Gamma_k(0,H_k) < \infty\,,\, C_k = \Gamma_k(0,H_k)\ \forall\, k,\ T_\infty = \infty\}$ haben wir mit 6.16 und (6.17):

$$(M_{t\wedge T_{k+1}} - M_{T_k}) \cdot \mathbf{1}_{\{T_k\le t\}} = \mathbf{1}_{\{T_{k+1}\le t\}} \cdot c_{k+1}(H_{k+1}) + \mathbf{1}_{\{T_k\le t<T_{k+1}\}} \cdot \exp\{\Lambda(t-T_k,Z_k)\} \cdot \Gamma_k(t-T_k,H_k) - \Gamma_k(0,H_k) \cdot \mathbf{1}_{\{T_k\le t\}} .$$

Es folgt $M_t - M_0 = \sum_{k=0}^{\infty} (M_{t\wedge T_{k+1}} - M_{T_k}) \cdot \mathbf{1}_{\{T_k\le t\}}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_{k+1}\le t\}} \cdot c_{k+1}(H_{k+1}) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_k\le t<T_{k+1}\}} \cdot \exp\{\Lambda(t-T_k,Z_k)\} \cdot \Gamma_k(t-T_k,H_k) - \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_k(0,H_k) \cdot \mathbf{1}_{\{T_k\le t\}}$$

$$= \sum_{k=0}^{N_t-1} c_{k+1}(H_{k+1}) + \exp\{\Lambda(t-T_{N_t},Z_{N_t})\} \cdot \Gamma_{N_t}(t-T_{N_t},H_{N_t}) - \sum_{k=0}^{N_t} \Gamma_k(0,H_k)$$

$$= \exp\{\Lambda(t-T_{N_t},Z_{N_t})\} \cdot \Gamma_{N_t}(t-T_{N_t},H_{N_t}) - C_0 .$$

Mit $C_0 = M_0$ folgt die Behauptung. $[]$

6.21 Bemerkung. Bei $T_\infty = \infty$ f.s. kann die Beziehung:

$$E\left[C \mid \mathfrak{F}_t\right] = M_t = \exp\{\Lambda(t-T_{N_t},Z_{N_t})\} \cdot \Gamma_{N_t}(t-T_{N_t},H_{N_t}) \text{ mit}$$

$$\Gamma_{N_t}(t-T_{N_t},H_{N_t}) \le \Gamma_{N_t}(0,H_{N_t})$$

auch direkt gezeigt werden: Sei $A \in \mathfrak{F}_t$, also $A = \cup_{0\le k\le\infty} A_k\cap\{N_t=k\}$ mit $A_k \in \sigma(H_k)$ nach 2.11. Nun hat man mit den Methoden aus dem Beweis von 6.16:

$$\int_{A_k\cap\{N_t=k\}} C\,dP = \int_{A_k\cap\{T_k\le t\}} \mathbf{1}_{\{T_{k+1}>t\}}\, C\,dP = \int_{A_k\cap\{T_k\le t\}} \mathbf{1}_{\{T_{k+1}>t\}}\, C_{k+1}\,dP$$
$$= \int_{A_k\cap\{T_k\le t\}} E\left[\mathbf{1}_{\{T_{k+1}>t\}}\, C_{k+1}\,|\,H_k\right] dP = \int_{A_k\cap\{T_k\le t\}} \gamma_t(H_k)\,dP$$
$$= \int_{A_k\cap\{T_k\le t\}} \mathbf{1}_{\{T_{k+1}>t\}}\, \exp\{\Lambda(t-T_k,Z_k)\}\,\gamma_t(H_k)\,dP$$
$$= \int_{A_k\cap\{N_t=k\}} \exp\{\Lambda(t-T_{N_t},Z_{N_t})\}\,\Gamma_{N_t}(t-T_{N_t},H_{N_t})\,dP\,.$$

Es ergibt sich schließlich

$$\int_A C\,dP = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k\cap\{N_t=k\}} C\,dP$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k\cap\{N_t=k\}} \exp\{\Lambda(t-T_{N_t},Z_{N_t})\}\,\Gamma_{N_t}(t-T_{N_t},H_{N_t})$$
$$= \int_A \exp\{\Lambda(t-T_{N_t},Z_{N_t})\}\,\Gamma_{N_t}(t-T_{N_t},H_{N_t})\,dP\,. \quad \square$$

6.22 Bemerkung. Ist $\{M_t,t\ge0\}$ ein glm. intb. Martingal,, so gilt dies auch für $\{M_n,n\in\mathbb{N}\}$.
Nach dem Martingalkonvergenzsatz existiert eine intb. Zva $C = M_\infty$ mit $M_n = E\left[C\,|\,\mathfrak{F}_n\right]$. Es folgt für $t\ge0$, $n=\lceil t\rceil+1$: $M_t = E\left[M_n\,|\,\mathfrak{F}_t\right] = E\left[\,E\left[C\,|\,\mathfrak{F}_n\right]\,|\,\mathfrak{F}_t\right] = E\left[C\,|\,\mathfrak{F}_t\right]$ f.s. . Ist speziell $\{M_t,t\ge0\} \hat{=} \{M_t,0\le t\le T\}$ mit $T<\infty$, so kann man direkt $C := M_T$ setzen.
Definiert man $\{M_t^*,t\ge0\}$ wie (6.19), 6.20, so ist $A_t := \{M_t \ne M_t^*\}$ eine Nullmenge, die allerdings von t abhängt. Somit muß $\cup_{t\ge0} A_t$ keine Nullmenge mehr sein, und $\{M_t^*\}$ muß von $\{M_t\}$ nicht unterscheidbar sein. Das gilt nur, wenn man etwa weiß, daß $\{M_t\}$ bereits rechtsstetig ist (vgl. 1.1). $\square$

Wir fahren nun weiter; auf $\{\Gamma_k(0,H_k) < \infty\}$ haben wir mit 6.16 und (6.17):

$$(M_{t\wedge T_{k+1}} - M_{T_k})\cdot\mathbf{1}_{\{T_k\le t\}} = \mathbf{1}_{\{T_{k+1}\le t\}}\cdot c_{k+1}(H_{k+1}) +$$
$$\mathbf{1}_{\{T_k\le t<T_{k+1}\}}\cdot\exp\{\Lambda(t-T_k,Z_k)\}\cdot\Gamma_k(t-T_k,H_k) - \Gamma_k(0,H_k)\cdot\mathbf{1}_{\{T_k\le t\}}$$
$$= \mathbf{1}_{\{T_{k+1}\le t\}}\cdot\left[c_{k+1}(H_{k+1}) - \Gamma_k(0,H_k)\right] +$$
$$\mathbf{1}_{\{T_k\le t<T_{k+1}\}}\cdot\left[\exp\{\Lambda(t-T_k,Z_k)\}\cdot\Gamma_k(t-T_k,H_k) - \Gamma_k(0,H_k)\right].$$

Also haben wir auf $\{\Gamma_k(0,H_k) < \infty\}$:

(6.23)
$$(M_{t\wedge T_{k+1}} - M_{T_k})\cdot\mathbf{1}_{\{T_k\le t\}}$$
$$= \mathbf{1}_{\{T_{k+1}\le t\}}\cdot\left[c_{k+1}(H_{k+1}) - \Gamma_k(0,H_k)\right]$$
$$+\ \mathbf{1}_{\{T_k\le t<T_{k+1}\}}\cdot\left[\exp\{\Lambda(t-T_k,Z_k)\}\cdot\Gamma_k(t-T_k,H_k) - \Gamma_k(0,H_k)\right]$$

Wir rechnen zuerst mit nichtnegativen Funktionen und definieren:

(6.24) $$f_{+,k+1}(H_k,T_k+u,x) := c_{k+1}(H_k,T_k+u,x) + \exp\{\Lambda(u,Z_k)\}\cdot(\Gamma_k(0,H_k) - \Gamma_k(v,H_k)) \ ,$$

$$F_{+,k}(H_k,v) := {}_0\int^v du \int \lambda Q(\varphi(u\,|\,Z_k);dz)\, f_{+,k+1}(H_k,T_k+u,z) \ .$$

Da der zweite Term von $f_{+,k+1}(H_k,u,x)$ unabhängig von x ist, folgert man:

$$F_{+,k}(H_k,v) = {}_0\int^v du\ \bar c_k(H_k,u) + {}_0\int^v du\ \lambda(\varphi(u\,|\,Z_k))\exp\{\Lambda(u,Z_k)\}\cdot \cdot {}_0\int^u ds \exp\{-\Lambda(s,Z_k)\}\ \bar c_k(H_k,s)$$

$$= \ldots + {}_0\int^v ds \exp\{-\Lambda(s,Z_k)\}\ \bar c_k(H_k,s)\ {}_s\int^v du\ \lambda(\varphi(u\,|\,Z_k))\exp\{\Lambda(u,Z_k)\} \ .$$

Nun ist ${}_s\int^v du\ \lambda(\varphi(u\,|\,Z_k))\exp\{\Lambda(u,Z_k)\} = \exp\{\Lambda(v,Z_k)\} - \exp\{\Lambda(s,Z_k)\}$ nach 3.13.

Also können wir weiterschreiben

$$F_{+,k}(H_k,v) = {}_0\int^v du\ \bar c_k(H_k,u) + {}_0\int^v ds \exp\{-\Lambda(s,Z_k)\}\ \bar c_k(H_k,s)\cdot\left[\exp\{\Lambda(v,Z_k)\} - \exp\{\Lambda(s,Z_k)\}\right]$$

$$= {}_0\int^v ds\ \bar c_k(H_k,s)\cdot\left[1 + (\exp\{\Lambda(v,Z_k) - \Lambda(s,Z_k)\} - 1)\right]$$

$$= \exp\{\Lambda(v,Z_k)\}\cdot {}_0\int^v ds \exp\{-\Lambda(s,Z_k)\}\ \bar c_k(H_k,s) \ , \text{ also}$$

(6.25) $$F_{+,k}(H_k,v) \ = \exp\{\Lambda(v,Z_k)\}\cdot(\Gamma_k(0,H_k) - \Gamma_k(v,H_k)).$$

Somit erhalten wir nach (6.24):

(6.26) $$f_{+,k+1}(H_k,T_k+u,x) = c_{k+1}(H_k,T_k+u,x) + F_{+,k}(H_k,u) \ .$$

Wir definieren nun:

(6.27) $$f_{k+1}(H_k,T_k+u,x) := f_{+,k+1}(H_k,T_k+u,x) - \exp\{\Lambda(u,Z_k)\}\cdot\Gamma_k(0,H_k) \quad \text{auf } \{\Gamma_k(0,H_k) < \infty\}$$

$$f_{k+1}(H_k,T_k+u,x) := 0 \ \text{ auf } \{\Gamma_k(0,H_k) = \infty\},$$

$$F_k(H_k,v) := {}_0\int^v du \int \lambda Q(\varphi(u\,|\,Z_k);dz)\, f_{k+1}(H_k,T_k+u,z) \ .$$

Dann gilt auf $\{\Gamma_k(0,H_k) < \infty\}$ mit (6.25):

$$F_k(H_k,v) := F_{+,k}(H_k,v) - {}_0\int^v du\ \lambda(\varphi(u\,|\,Z_k))\exp\{\Lambda(u,Z_k)\}\cdot\Gamma_k(0,H_k)$$
$$= F_{+,k}(H_k,v) - \left[\exp\{\Lambda(u,Z_k)\} - 1\right]\cdot\Gamma_k(0,H_k)$$
$$= \exp\{\Lambda(v,Z_k)\}\cdot(\Gamma_k(0,H_k) - \Gamma_k(v,H_k)) - \left[\exp\{\Lambda(u,Z_k)\} - 1\right]\cdot\Gamma_k(0,H_k)$$
$$= \Gamma_k(0,H_k) - \exp\{\Lambda(v,Z_k)\}\cdot\Gamma_k(v,H_k) \ ,$$

also:

(6.28) Auf $\{\Gamma_k(0,H_k) < \infty\}$ gilt für $v \geq 0$:

$$\mathbb{R} \ni F_k(H_k,v) = \Gamma_k(0,H_k) - \exp\{\Lambda(v,Z_k)\} \cdot \Gamma_k(v,H_k)) ,$$

$$f_{k+1}(H_k,T_k+v,x) = c_{k+1}(H_k,T_k+v,x) - \exp\{\Lambda(v,Z_k)\} \cdot \Gamma_k(v,H_k)) \in \mathbb{R} \ ;$$

auf $\{\Gamma_k(0,H_k) = \infty\}$ gilt für $v \geq 0$: $F_k(H_k,v) = 0$.

Jetzt können wir auf $\{\Gamma_k(0,H_k) < \infty\}$ mit (6.23) und (6.28) schreiben:

$$\begin{aligned}
&(M_{t\wedge T_{k+1}} - M_{T_k}) \cdot \mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}} \\
&= \mathbf{1}_{\{T_{k+1} \leq t\}} \cdot [c_{k+1}(H_{k+1}) - \Gamma_k(0,H_k)] \\
&\qquad + \mathbf{1}_{\{T_k \leq t < T_{k+1}\}} \cdot [\exp\{\Lambda(t-T_k,Z_k)\} \cdot \Gamma_k(t-T_k,H_k) - \Gamma_k(0,H_k)] \\
&= [f_{k+1}(H_{k+1}) - F_k(H_k,S_{k+1}) \cdot \mathbf{1}_{\{T_{k+1} \leq t\}} \ - \ \mathbf{1}_{\{T_k \leq t < T_{k+1}\}} \cdot F_k(H_k,t-T_k) . \\
&= f_{k+1}(H_{k+1}) \cdot \mathbf{1}_{\{T_{k+1} \leq t\}} - F_k(H_k,S_{k+1}) \cdot \mathbf{1}_{\{T_{k+1} \leq t\}} - \mathbf{1}_{\{T_k \leq t < T_{k+1}\}} \cdot F_k(H_k,t-T_k) .
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

(6.29) $$(M_{t\wedge T_{k+1}} - M_{T_k}) \cdot \mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}} = f_{k+1}(H_{k+1}) \cdot \mathbf{1}_{\{T_{k+1} \leq t\}} - \mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}} \cdot F_k(H_k,(t-T_k)\wedge S_{k+1}) .$$

Dabei ist $F_k(H_k,v) = 0$ auf $\{\Gamma_k(0,H_k) = \infty\}$ nach Def. von f_{k+1}. Wegen

(6.30) $$F_k(H_k,v) = \int_{T_k}^{T_k+v} ds \int \lambda Q(X_s;dz)\, f_{k+1}(H_k,s,z)$$

erhalten wir schließlich auf $\{T_\infty = \infty, \Gamma_k(0,H_k) < \infty \ \forall\, k\}$ die Darstellung:

$$\begin{aligned}
M_t - M_0 &= \sum_{k=0}^{\infty} (M_{t\wedge T_{k+1}} - M_{T_k}) \cdot \mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_{k+1}(H_{k+1}) \cdot \mathbf{1}_{\{T_{k+1} \leq t\}} \ - \ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}} \cdot F_k(H_k,(t-T_k)\wedge S_{k+1}), \text{ also}
\end{aligned}$$

(6.31) $$\begin{aligned}
M_t - M_0 &= \sum_{k=1}^{N_t} f_k(H_k) - \sum_{k=0}^{N_t-1} F_k(H_k,S_{k+1}) + F_{N_t}(H_{N_t},t-T_{N_t}) \\
&= \sum_{k=1}^{N_t} f_k(H_k) - \int_0^t ds \int \lambda Q(X_s;dz)\, f_{N_s+1}(H_{N_s},s,z) \\
&\qquad \text{auf } \{T_\infty = \infty, \Gamma_k(0,H_k) < \infty \ \forall\, k\} .
\end{aligned}$$

6.32 Martingaldarstellungssatz. Ist $T_\infty = \infty$ f.s. und C intb. , so gilt:

(6.32)* $$M_t^{**} := \left[\sum_{k=1}^{N_t} f_k(H_k) - \int_0^t ds \int \lambda Q(X_s;dz)\, f_{N_s+1}(H_{N_s},s,z) \right] \cdot \mathbf{1}_{\{N_t < \infty\}}$$

ist als reelle Zva erklärt und Version von $E[C \mid \mathfrak{F}_t] - E[C \mid \mathfrak{F}_0]$.

Dabei ist $f_{k+1}(H_k,T_k+u,x)$ gemäß (6.28) gegeben.

Der Name "Martingaldarstellungssatz wurde in 6.22 gerechtfertigt.

6.33 Bemerkung. Es kann nicht gezeigt werden, daß in der obigen Situation notwendigerweise

(6.1)' $$E\left[\,{}_0\!\int^t ds \int \lambda Q(X_s;\,dz)\;|f_{N_s+1}(H_{N_s},s,z)|\,\right] < \infty \quad \forall\, t\geq 0$$

gilt. Wir haben jedoch die folgende Situation:

$${}_0\!\int^v du \int \lambda Q(\varphi(u\,|\,Z_k);dz)\;|f_{k+1}|(H_k,T_k+u,z) \leq 2\exp\{\Lambda(v,Z_k)\}\cdot\Gamma_k(0,H_k)$$
$$E[\Gamma_k(0,H_k)] = E[C_k] < \infty \text{ f.s. (nach (6.16))}$$

wegen ${}_0\!\int^v du \int \lambda Q(\varphi(u\,|\,Z_k);dz)\;|f_{k+1}|(H_k,T_k+u,z)$

$$\leq {}_0\!\int^v du \int \lambda Q(\varphi(u\,|\,Z_k);dz)\,[f_{+,k+1}(H_k,T_k+u,z) + \exp\{\Lambda(u,Z_k)\}\cdot\Gamma_k(0,H_k)]$$
$$= F_{+,k}(H_k,v) + [\exp\{\Lambda(v,Z_k)\}-1]\cdot\Gamma_k(0,H_k)$$
$$= \exp\{\Lambda(v,Z_k)\}\cdot[\Gamma_k(0,H_k)-\Gamma_k(v,H_k)] + [\exp\{\Lambda(v,Z_k)\}-1]\cdot\Gamma_k(0,H_k)$$

Wenn man nicht schon weiß, daß Y ein Martingal ist, kann man aus diesen Eigenschaften bereits zeigen, daß Y_t zumindest ein lokales Martingal ist mit Lokalisierungsfolge $(T_n \wedge \tau_n)$ ist. Dabei definiert man [vgl. Davis 1993)]:

$$S_k^n := \inf\{\, s\geq 0;\ \exp\{-\Lambda(s,Z_k)\} \leq 1/n^3\},$$
$$\tau_n := \inf\{\, T_k + S_k^n\,;\ T_k + S_k^n \leq T_{n+1}\,\}\,.\ []$$

Unter Beschränktheitsbedingungen erhält man (6.1)' leicht:

6.34 Korollar. Sind C durch $\|C\|$ und λ durch λ^o beschränkt, so gilt $T_\infty = \infty$ f.s. und man erhält eine Version (M_t^{**}) von $(E[C\,|\,\mathfrak{F}_t] - E[C\,|\,\mathfrak{F}_0],\ t\geq 0)$ mit (6.32)* und

$$|f_{k+1}(H_k,T_k+v,x)| \leq \|C\|\cdot e^{v\lambda^o},$$
$${}_0\!\int^t ds \int \lambda Q(X_s;dz)\;|f_{N_s+1}|(H_{N_s},s,z) \leq 2\cdot\|C\|\cdot(e^{t\lambda^o}-1)\,.$$

Beweis. Sei wieder o.E. $C \geq 0$. Es folgt $c_k \leq \|C\|$, $\Gamma_k(0,H_k) \leq \|C\|$. Es ist

$$f_{+,k+1}(H_k,T_k+u,x) = c_{k+1}(H_k,T_k+u,x) + \exp\{\Lambda(u,Z_k)\}\cdot(\Gamma_k(0,H_k)-\Gamma_k(u,H_k))$$
$$\leq c_{k+1}(H_k,T_k+u,x) + \exp\{\Lambda(u,Z_k)\}\cdot\|C\|\cdot{}_0\!\int^u \lambda(\varphi(s\,|\,Z_k))\cdot\exp\{-\Lambda(s,Z_k)\}\,ds$$
$$\leq (1+\exp\{\Lambda(u,Z_k)\}-1)\cdot\|C\| = \exp\{\Lambda(u,Z_k)\}\cdot\|C\|$$

und somit

$$f_{k+1}(H_k,T_k+u,x) \leq f_{+,k+1}(H_k,T_k+u,x) + \exp\{\Lambda(u,Z_k)\}\cdot\Gamma_k(0,H_k)$$
$$\leq 2\cdot\exp\{\Lambda(u,Z_k)\})\cdot\|C\| \leq 2\cdot\|C\|\cdot e^{u\lambda^o} \leq 2\cdot\exp\{(T_k+u)\cdot\lambda^o\})\cdot\|C\|\,.$$

Es folgt schließlich

$$\int_0^t ds \int \lambda Q(X_s;dz)\,|f_{N_s+1}|(H_{N_s},s,z) \le 2\cdot\|C\|\cdot \int_0^t \lambda^o e^{s\lambda^o}\,ds = 2\cdot\|C\|\cdot[e^{t\lambda^o}-1]\ .\ \square$$

6.35 Korollar. Sei $T \in [0,\infty)$. Ist C eine beschränkte $\mathfrak{F}_T$–mb Zva und λ beschränkt, so existiert ein durch $x \in S$ indizierter Prozeß $(\xi_t(x))$, für den eine der äquivalenten Eigenschaften (i) – (iii) aus 2.7 gelten, mit:

$$C = E[C] + \left[\sum_{k=1}^{N_T} \xi_{T_k}(Z_k) - \int_0^T dt \int \lambda Q(X_t;dz)\,\xi_t(z)\right]\cdot \mathbf{1}_{\{N_T<\infty\}}\ ,$$

$\sup_{0\le t\le T}|\xi_t(z)|$ und $\int_0^T dt \int \lambda Q(X_t;dz)\,|\xi_t(z)|$ sind beschränkt.

Beweis. Wegen $E[C|\mathfrak{F}_T] = C$, kann man 6.34. Den Prozeß $(\xi_t(x))$ definiert man zu den Funktionen $f'_k(h,t,x) := f_{k+1}(h,t,x)$, $h \in \Omega_k^o$ wie in 2.7b (ii). $\square$

6.36 Beispiel (vorhersagbare Sprünge). Es existiere $\zeta : S \mapsto S$ mit

(6.37) $$Z_k = \zeta(X_{T_k-0}) = \zeta(\varphi(S_k,Z_{k-1}))\ ,\ k \ge 1,$$

also $Q(x;\zeta(x)) = 1$, $x \in S$. Es sei wie oben C intb und $T_\infty = \infty$.

Ein konkretes Beispiel dazu ist:

(6.38) N_t ist ein Poissonprozeß mit Intensität $\lambda =: \lambda(x)$,

$X_t = Z_0\cdot\exp\{aN_t - bt\}$, $a\ne 0\ne b$, also $\varphi(t|x) = x\cdot e^{-bt}$,

$\zeta(x) = x\cdot e^a$.

In der Situation (6.37) erhält man auf $\{N_t<\infty\}$ aus 6.32:

$$M_t^{**} := \sum_{k=1}^{N_t} f_k(H_{k-1},T_k,\zeta(\varphi(S_k,Z_{k-1}))) - \int_0^t \lambda(X_s)\,f_{N_s+1}(H_{N_s},s,\zeta(X_s))\,ds\ .$$

Definiert man nun den vorhersagbaren Prozeß (ξ_s) über (vgl. 2.5):

(6.39) $$\xi_s := f_{N_{s-0}+1}(H_{N_{s-0}},s,\zeta(\varphi(s-T_{N_{s-0}},Z_{N_{s-0}})))\ ,$$

so erhält man

(6.40) $$M_t^{**} = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_{T_k} - \int_0^t \lambda(X_s)\,\xi_s\,ds =: \int_{[0,t]} \xi_s\,(dN_s - \lambda(X_s)\,ds)\ .$$

Ist λ durch λ_o beschränkt, so ist der Integrator in (6.40) $M'_t := N_t - \int_0^t \lambda(X_s)\,ds$ ist ein Martingal. Dazu setzt man in 6.1 $f_k \equiv 1$ und hat dann

$$\int_0^t ds \int \lambda Q(X_s;dz)\,|f_{N_s+1}|(H_{N_s},s,z) \le \lambda_o\cdot t\ .$$

Ist C eine beschränkte $\mathfrak{F}_T$–mb Zva, so existiert nach 6.35 ein vorhersagbarer Prozeß (ξ_t) mit:

(6.41) $C = E[C] + \int_{[0,T]} \xi_s \, (dN_s - \lambda(X_s)\, ds)$ f.s. ,

$\sup_{s\le t} |\xi_s|$ und $\int_0^T \lambda(X_s)\, |\xi_s|\, ds$ sind beschränkt. []

6.42 Bemerkung: Markierte Prozesse. Die Situation von 6.26 läßt sich verallgemeinern.
Sei dazu $S = S' \times S'' := \{1,...,m\} \times S''$, $Z_n =: (Z_n', Z_n'')$. Für $x = (i,x'')$ heißt i die **Marke** von x. Es existiere dazu eine mb Funktion $\zeta : S \times \{1,...,m\} \mapsto S''$ und eine ÜW Q' von S nach $\{1,...,m\}$ mit

$$Z_n'' = \zeta(X_{T_n-}, Z_n') \,, \quad Q(x, \{i\} \times B'') = \sum Q'(x,i) \cdot \mathbf{1}_{B''}(\zeta(x,i)) \,,$$

d.h. $Q'(X_{T_n-}; \cdot)$ ist eine bedingte Verteilung von Z_n' bzgl. (H_{n-1}, T_n).

Setzt man dann $N_t^i = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_k \le t,\, Z_k' = i\}}$, so folgt leicht:

$$M_t^{**} = \sum_{i=1}^m M_t^i \quad \text{mit} \quad \lambda^i(x) = \lambda(x) \cdot Q'(x; \{i\}) \quad \text{und}$$

$$M_t^i := \sum_{k=1}^{N_t} \xi_{T_k}^i - \int_0^t \lambda^i(X_s)\, \xi_s \, ds =: \int_{[0,t]} \xi_s^i \, (dN_s^i - \lambda^i(X_s)\, ds) \,.$$

Ein konkretes Beispiel dazu ist:

(6.43) (N_t^i) sind unabhängige Poissonprozesse mit Intensität λ^i, i = 1,2,

$X_t = (i, X_t'')$, falls $\Delta N_t^i := N_t^i - N_{t-0}^i = 1$,

$X_t'' = Z_0 \cdot \exp\{a^1 \cdot N_t^1 + a^2 \cdot N_t^2 - bt\})$, , $a^1 > 0 > a^2$, $b \ne 0$, also

$\varphi(t \,|\, (i,x)) = (i, x \cdot e^{-bt})$, $\quad \zeta(x,i) = x \cdot e^{a^i}$.

Dann wählt man $\lambda(x) := \lambda^1 + \lambda^2$, $\lambda Q'(x; \{i\}) = \lambda^i$

[vgl. Stoch. Anal. 95/96 4.20] . []

Es ist nun für Modelle mit vorhersagbaren Sprüngen eine zu (6.41) analoge Darstellung gesucht, wo der Integrator unter P kein Martingal ist. Solche Darstellungen spielen in der Stochastik der Finanzmärkte eine große Rolle, wenn es um die Vollständigkeit des Marktes geht.

Gegeben sei ein PDP X und eine Abbildung $f : S \mapsto (0,\infty)$, $\tilde{f} \in \mathfrak{X}(f)$, also

$$f(\varphi(t \,|\, x)) = f(x) + \int_0^t \tilde{f}(\varphi(s \,|\, x))\, ds.$$

Wir setzen $Y_t := f(X_t)$ und stellen uns Y_t als Prozeß vor, der die Preisentwicklung einer Aktie beschreibt. Es liege die Situation aus 6.36 vor jetzt mit

(6.44) $f(\zeta(x)) \ne f(x)$, $x \in S$.

Dann haben wir

(6.45) $\Delta Y_{T_n} := Y_{T_n} - Y_{T_n-0} = f(\zeta(X_{T_n-0})) - f(X_{T_n-0})$.

$Y_{T_n+t} = Y_{T_n} + \int_{T_n}^{T_n+t} \tilde{f}(X_s)\, ds.$

Eine konkrete Situation ist

(6.46) N_t ist ein Poissonprozeß mit Intensität λ , $\psi : (0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$, z.B. $\psi \equiv 1$,

$X_t = \left[a \cdot \sum_{k=1}^{N_t} \psi(S_k) - bt + c,\ t - T_{N_t} \right]$,$a \neq 0 \neq b$,

also $\varphi(t \mid (x,s)) = (x - bt, s + t)$, $\zeta(x,s) = x + a \cdot \psi(s)$,

$Y_t = \exp\{ a \cdot \sum_{k=1}^{N_t} \psi(S_k) - bt + c \} = f(X_t)$ mit $f(x,s) = e^x$,

$e^{x-bt} = e^x - \int_0^t b \cdot e^{x-bs}\, ds$, also $\tilde{f} = -b \cdot f$,

wegen $f(x - bt, u + t) = e^{x-bt} = e^x - \int_0^t b \cdot e^{x-bs}\, ds = f(x,u) + \int_0^t \tilde{f}((x - bu, s + u))\, du$.

Wir wollen nun herausfinden, ob man bei vorhersagbaren Sprüngen $E[C \mid \mathfrak{F}_t]$ für eine integrierbare Zva C durch ein Integral $\int_0^t \xi_s\, dY_s$ darstellen kann, wobei (ξ_s) ein vorhersagbarer Prozeß ist, also gemäß 2.5 gilt:

$\xi_s = g_{N_{s-0}+1}(H_{N_{s-0}}, s)$ für gewisse Funktionen g_k.

Aus (6.44) ergibt sich, sofern die Integrale erklärt sind:

$$\int_0^t \xi_s\, dY_s = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_{T_k} \cdot \Delta Y_{T_k} + \int_0^t \xi_s\, \tilde{f}(X_s)\, ds$$

$$= \sum_{k=1}^{N_t} g_k(H_{k-1}, T_k) \cdot [f(\zeta(X_{T_n-0})) - f(X_{T_n-0})] + \int_0^t g_{N_s+1}(H_{N_s}, s)\, \tilde{f}(X_s)\, ds$$

In Hinblick auf 6.32 machen wir den Ansatz:

$f_k(H_{k-1}, T_k) = g_k(H_{k-1}, T_k) \cdot [f(\zeta(\varphi(S_k \mid Z_{k-1}))) - f(\varphi(S_k \mid Z_{k-1}))]$, also

(6.47) $f_k(H_{k-1}, s) = g_k(H_{k-1}, s) \cdot [f(\zeta(\varphi(s - T_{k-1} \mid Z_{k-1}))) - f(\varphi(s - T_{k-1} \mid Z_{k-1}))]$.

Dann folgt:

$f_{N_s+1}(H_{N_s}, s) = g_{N_s+1}(H_{N_s}, s) \cdot [f(\zeta(X_s))) - f(X_s)]$ und

$$\int_0^t \xi_s\, dY_s = \sum_{k=1}^{N_t} f_k(H_{k-1}, T_k) - \int_0^t f_{N_s+1}(H_{N_s}, s)\, \lambda^*(X_s)\, ds$$

mit $\lambda^*(x) = -\tilde{f}(x) / [f(\zeta(x))) - f(x)]$.

Die gewünschte Darstellung von $E[C|\mathfrak{F}_t]$ ist also nach dem Martingaldarstellungssatz 6.32 möglich, wobei hier speziell $f_k(...,z_{k-1},t_k,z_k) = f_k(...,z_{k-1},t_k)$ gelten würde, wenn $\lambda = \lambda^*$ gilt. Wenn man dann nämlich zu den über 6.32 gefundenen Funktionen f_k die Funktionen g_k gemäß (6.47) und ξ über die g_k definiert, so hat eine Darstellung

$$E[C|\mathfrak{F}_t] = E[C|\mathfrak{F}_0] + \int_0^t \xi_s \, dY_s \quad \text{f.s.},$$

insbesondere ergibt sich für eine integrierbare und $\mathfrak{F}_T$–mb Zva C_T:

$$C_T = E[C_T|\mathfrak{F}_0] + \int_0^T \xi_s \, dY_s \quad \text{f.s.}.$$

Nun bedeutet aber $\lambda = \lambda^*$ gerade $\tilde{f}(x) + \lambda(x)[f(\zeta(x))) - f(x)] = 0$, d.h.
$\mathfrak{A}f(x) = 0$; damit ist unter Intergrierbarkeitsbedingungen nach 5.3 $Y_t = f(X_t)$ ein Martingal.
Diesen Fall wollten wir aber gerade nicht betrachten.
Ein Ausweg ergibt sich über sogenannte äquivalente Martingalmaße. Wir nehmen an, es gibt auf $(\Omega,\mathfrak{F})$ ein W–Maß P*, sodaß (X_t) einerseits unter P* ein PDP mit Sprungrate λ^* ist. Andererseit soll zu $0<T<\infty$ $P^*_T := P^*\big|_{\mathfrak{F}_T}$ eine positive P_T–Dichte dP^*_T/dP_T mit $P_T = P\big|_{\mathfrak{F}_T}$ haben. Die Eigenschaft (6.37) $Z_k = \zeta(X_{T_k-0}) = \zeta(\varphi(S_k,Z_{k-1}))$ bleibt natürlich erhalten, ebenso der Fluß φ.
Ist dann C_T beschränkt und $\mathfrak{F}_T$–mb, so folgt folgt nach den obigen Überlegungen

(6.48) $$C_T = E^*[C_T|\mathfrak{F}_0] + \int_0^T \xi_s \, dY_s \quad P^*\text{–f.s. und damit P–f.s.}.$$

Ist auch λ^* beschränkt, so gilt für den Anteil $\int_0^t f_{N_s+1}(H_{N_s},s)\,\lambda^*(X_s)\,ds$ des Integrals $\int_0^t \xi_s \, dY_s$: $\int_0^t |f_{N_s+1}(H_{N_s},s)|\,\lambda^*(X_s)\,ds$ ist beschränkt.

Es genügt auch eine etwas allgemeinere Situation, wo P* nur auf $\mathfrak{F}_T$ erklärt ist und dort die Eigenschaften eines PDPs mit Sprungrate λ^* hat, was natürlich noch zu präzisieren ist. Der Beweis des Martingaldarstellungsatzes zeigt, daß für die Darstellung von $\{E[C_T|\mathfrak{F}_t],\ 0\le t\le T\}$, insbesondere für die Darstellung von C_T, die Eigenschaften des PDPs nur auf $\mathfrak{F}_T$ benötigt werden. Dabei kann P^*_T über eine positve $\mathfrak{F}_T$–mb Dichte Z_T gemäß $dP^* = Z_T\,dP$ definiert werden. Dieser Problemkreis wird in [Stoch. Anal. 95/96 § 12] angesprochen. Dabei stellt sich heraus, daß Z_T erklärt werden kann, wenn λ und λ^*/λ beschränkt sind. Dabei ist hier

$$\lambda^*/\lambda = -\tilde{f} / \lambda \cdot [f(\zeta(\cdot))) - f].$$

In der speziellen Situation (6.46) haben wir:

$f(\zeta(x,s)) = f(x + a\cdot s,0) = e^{x+a\psi(s)}$, $f(x) = e^x$, $\tilde{f}(x) = -b\cdot e^x$, also

$$-\tilde{f}(x,s) / \lambda(x,s)\cdot [f(\zeta(\cdot))) - f] = b/\lambda(x,s)\cdot(e^{a\psi(s)} - 1).$$

Ist also λ beschränkt und sind λ und ψ von Null wegbeschränkt, so haben wir die Beschränktheit von λ und λ^*/λ.

Ein für die Anwendungen wichtiger Fall ist der, daß gilt:

(6.49) $P[A] \in \{0,1\}$ und somit $P^*[A] \in \{0,1\}$ für $A \in \mathfrak{F}_0$.

Dann hat man $E[C_T|\mathfrak{F}_0] = E[C_T]$ und $E^*[C_T|\mathfrak{F}_0] = E^*[C_T]$; (6.48) wird dann zu:

(6.50) $C_T = E^*[C_T] + {}_0\int^T \xi_s \, dY_s$ P*–f.s. und damit P–f.s.

Wir wollen uns noch überlegen, daß in der Situation (6.49) P* eindeutig bestimmt ist.

Sei noch P' ein weiteres zu P äquivalentes Maß, sodaß Y_t ein P'–Martingal und das stochastische Integral $({}_0\int^t \xi_s \, dY_s)$ ein lokales P'–Martingal ist für alle $C_T = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathfrak{F}_T$. Unter P' braucht (X_t) keine Markoff–Prozeß oder PDP zu sein. Dann haben wir:

(6.50)' $\mathbf{1}_A = P^*[A] + M_T^A$ mit $M_t^A := {}_0\int^t \xi_s^A \, dY_s$, $A \in \mathfrak{F}_T$.

Gemäß (6.50) gilt: $M_t^A := {}_0\int^t \xi_s^A \, dY_s = P^*[A|\mathfrak{F}_t] - P^*[A]$ und somit $|M_t^A| \le 1$ f.s. . Also ist das lokale P'–Martingal $(M_t^A,\ 0 \le t \le T)$ auch ein P'–Martingal (vgl. 5.18). Nun ergibt sich aus (6.50)': $P'[A] = E'[\mathbf{1}_A] = P^*[A] + E'[M_T^A] = P^*[A] + E'[M_0^A] = P^*[A]$.

Somit stimmen P' und P* auf $\mathfrak{F}_T$ überein.