Stochastische Finanzmärkte

PROSEMINAR

Manfred Schäl, Inst. f. Angewandte Mathematik, Univ. Bonn.

WINTERSEMESTER 2004/05

0.1 Ein Finanzmarktmodell

Es werden **einperiodige** Modelle zugrundegelegt (also mit einem Z**eithorizont T**=1). Der Markt wird durch die folgende **Situation** beschrieben:

Es bestehen 2 Anlagemöglichkeiten jeweils zum Zeitpunkt t = 0:

Eine der Anlagemöglichkeiten ist das *Sparbuch*/*Bankkonto (bond)*, das durch den *Zinssatz* r beschrieben wird. Dabei wird angenommen, daß der gleiche Zinssatz r gilt, wenn man Geld anlegt und wenn man Geld leiht. Dies ist natürlich eine Modelleinschränkung. Eine Anlage von η Euro z.Zt. 0 hat z.Zt. 1 den Wert $\eta \cdot B_1$ mit

(0.1) $B_1 := 1+r\ ,\quad B_0 := 1.$

Die andere Anlagemöglichkeit ist ein risikobehaftete *Wertpapier* (*stock*) [z.B. Aktien oder Devisen]; sein Preis oder Kurs wird durch den *Preisprozess* $\{S_t,\ t=0,1\} = \{S_0, S_1\}$ beschrieben. Eine Anlage von $\xi \in \mathbb{R}$ Anteilen in das kursabhängige Wertpapier kostet z.Zt. t=0 $\xi \cdot S_0$ Euro und hat z.Zt. 1 den Wert $\xi \cdot S_1$. Die Anlage (η,ξ) kostet also z.Zt. t=0 $\eta \cdot B_0 + \xi \cdot S_0$ Euro und hat z.Zt t=1 den Wert $\eta \cdot B_1 + \xi \cdot S_1$.

Negative Anteile ξ entsprechen sogenannten *Wertpapierleerverkäufen*. D.h. etwa, daß man Aktien verkauft, die man noch nicht besitzt, die man also einem anderen Investor schuldet. Die Größen S_t werden stets als positiv angenommen.

Der Unsicherheit über die Marktentwicklung soll dadurch Rechnung getragen werden, daß mehrere Möglichkeiten (Szenarios) zugelassen werden. In dem hier gewählten Modell sollen genau zwei Möglichkeiten betrachten werden. Wir machen folgende Annahme:

Es sei $S_0 > 0$ gegeben; es existieren zwei Zahlen $d < 1 < u$ mit

$$S_1 \in \{S_1(d) := d \cdot (1+r) \cdot S_0,\ S_1(u) := u \cdot (1+r) \cdot S_0\}\ ,$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & u \cdot (1+r) \cdot S_0 = S_1(u) \\ S_0 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & d \cdot (1+r) \cdot S_0 = S_1(d). \end{tikzcd}$$

Die beiden möglichen Ergebnisse werden durch die Symbole u (up) und d (down) repräsentiert und in einem zweielementigen sogenannten Ergebnisraum Ω zusammengefaßt

$$\Omega = \{u,d\}.$$

Dabei gibt es also die Möglichkeit geben, daß der Kurs steigt oder fällt. Funktionen auf Ω bezeichnen wir als Zufallsvariablen (Zva). Dabei ist $S_1(\omega)$ eine Zva mit

$$S_1(u) > S_0 \cdot (1+r) > S_1(d).$$

Investitionen können gemäß eines Portfolioplanes vorgenommen werden:

0.2 Definition. *Ein* ***Portfolioplan*** ξ *ist* (hier) *gegeben durch einen* Wert $\xi \in \mathbb{R}$.
Dabei bezeichnet $\xi \in \mathbb{R}$ die Anteile, die der Investor in der Periode hält.
Gibt man die *Anfangsinvestition* x vor, so ist der Stand auf dem Sparbuch z.Z. 1 bestimmt durch η und η wiederum durch die *Budgetgleichungen*:

(0.3) $$\eta + \xi \cdot S_0 = x \left[= \eta \cdot B_0 + \xi \cdot S_0\right].$$

Dann beschreibt $\eta \cdot B_1 + \xi \cdot S_1(\omega)$ den *Endwert* des Portfolios .

0.4 Definition. $\{V_t^\xi(x,\omega)\ , t=0,1\}$ *ist der* ***Wertprozeß*** *zum Plan* ξ *mit*

(0.5) $$V_t^\xi(x,\omega) := \eta \cdot B_t + \xi \cdot S_t(\omega)\ \ , t=0,1, \text{ also } V_0^\xi(x) = x,$$

wobei η *jeweils durch* (0.5) *festgelegt wird* ($S_0(\omega) := S_0$).

Also ergibt sich

(0.6) $$V_1^\xi(x,\omega) = x \cdot (1+r) + \xi \cdot \left[S_1(\omega) - (1+r) \cdot S_0\right]\ .$$

Es beschreibe $(x,\xi) \in \mathbb{R}^2$ *stets einen Portfolioplan* ξ *mit einer Anfangsinvestition* x.

Im Mittelpunkt wird die *Bewertung von Derivaten* stehen. Dies sind Verträge, die eine *Zahlung* $X(\omega)$ zusichern, der sich aus der Kursentwicklung $\{S_t\}$ herleiten läßt in der Weise, daß etwa $X(\omega) = \psi(S_1(\omega))$ gilt.

Für diesen Vertrag muß z. Zt. 0 eine *Prämie* (ein *Preis*) bezahlt werden, die gerade die **Bewertung** des Finanztitels darstellt.

0.7 Definition. *Ein* ***Zahlungsanspruch*** *(contingent claim) ist eine Funktion* (*Zva*) $X(\omega)$ *auf* Ω.

Bei Optionen z.B. wird dieser Zahlungsanspruch X in jedem Fall nichtnegativ sein, sodaß der Vertragsunterzeichner (Käufer) also ohne die Prämie in jedem Fall einen Gewinn erzielen würde.

Im klassischen Fall würde

$$E\left[\frac{X}{1+r}\right] := p \cdot \frac{X(u)}{1+r} + (1-p) \cdot \frac{X(d)}{1+r}$$

als faire Prämie angesehen werden, wenn u mit der relativen Häufigkeit p und d mit der relativen Häufigkeit 1–p eintritt. Die Diskontierung ist nötig, weil die Zahlung X erst in t=1 erfolgt.

Hier kann aber eine andere Antwort gegeben werden. Eine faire Prämie hat zwar die obige Gestalt, aber mit einem künstlichen p*, das unabhängig von der auf dem Markt beobachteten Häufigkeit p ist, die nicht bekannt zu sein braucht. Dazu betrachten wir die folgende Situation: Wenn der Verkäufer durch einen Vertrag eine Zahlung $X = a \cdot S_1$ zusichert, so ist $a \cdot S_0$ eine *faire Prämie*; denn offenbar kann der Verkäufer die Prämie von $a \cdot S_0$ sofort in das Wertpapier investieren und hat dann z. Zt. t=1 den auszuzahlenden Betrag $X = a \cdot S_1$ zur Verfügung.
Der Verkäufer geht dann also kein Risiko ein. Ebenso kann der Käufer anstelle des Vertrages selbst $a \cdot S_0$ z.Zt. t=0 in das kursabhängige Wertpapier investieren. In dem Sinn sind also die Prämie und der Vertrag gleichwertig. Dies gilt noch in allgemeineren Situationen.

0.8 Definition. *Ein Zahlungsanspruch* X *heißt* ***erreichbar*** *(attainable) oder* ***duplizierbar*** $[$*durch* $(x,\xi)]$, *wenn gilt*: $V_1^\xi(x,\omega) = X(\omega)\ \forall\ \omega$ *für einen Plan* ξ *und eine Anfangsinvestition* $x \in \mathbb{R}$.

0.9 Definition. *In der Situation* $V_1^\xi(x,\omega) = X(\omega)\ \forall\ \omega$ *ist* x *eine* ***faire Prämie*** *für den Zahlungsanspruch* X.

In der Situation von 0.9 kann sich der Verkäufer nämlich gegen den Zahlungsanspruch X *absichern (hedging)*, indem er die Prämie x benutzt, um gemäß (x,ξ) zu investieren. Dann hat er z. Zt. t=1 den Betrag $V_1^\xi(x) = X$ zur Verfügung. Das gleiche kann jeder andere Marktteilnehmer tun. Im vorliegenden speziellen Modell wir noch gezeigt, daß jeder Zahlungsanspruch erreichbar ist und somit vollständig abgesichert werden kann.

0.10 Beispiel. Bewertung von Optionen. Eine *europäische (Kauf-) Option* $[$*call option*$]$ ist ein Vertrag, der dem Käufer das Recht einräumt, zum *Fälligkeitstermin* t=1 *(maturity time, exercise time)* für einen festen *Wahrnehmungs- / Basispreis* K *(exercise/striking price)*, unabhängig von dem vorliegenden Kurs S_1, a Anteile des Wertpapiers zu kaufen, z.B. $K = a \cdot (1+r) \cdot S_0$. Dann ist der Gewinn des Käufers und damit der Verlust des Verkäufers

$$X(\omega) := \psi(S_1(\omega)) := [a \cdot S_1(\omega) - K]^+ = \max(0\ ,\ a \cdot S_1(\omega) - K).$$

Es ist also günstig für den Käufer, wenn der Kurs steigt; es ist günstig für die Bank, wenn der Kurs fällt. Um den Verlust bei steigendem Kurs abzusichern (hedging), kann die Bank selbst Wertpapiere kaufen . Dadurch kann es auch günstig für den Verkäufer werden, wenn der Kurs steigt. $\square$

0.11 Definition. *Ein Markt heißt* ***vollständig****, wenn jeder Zahlungsanspruch erreichbar ist.*

Es soll wieder ein Modell betrachtet werden, in dem sich der Kurs nur um einen Faktor $(1+r)\cdot d$ nach unten oder um einen Faktor $(1+r)\cdot u$ noch oben bewegen kann.
Es sei $S_0>0$ gegeben, $S_1(\omega) = (1+r)\cdot\omega\cdot S_0$, $\omega\in\Omega$.

X sei der Zahlungsanspruch zu einem Derivat, setze:

$$x_\omega := \frac{1}{1+r} X(\omega) \quad \text{für} \quad \omega = d, u \,.$$

Es soll gezeigt werden, daß im vorliegenden Fall X stets erreichbar ist. Gesucht sind also gemäß (0.6) x,ξ mit

$$(1+r)\cdot x + \xi\cdot\left[S_1(\omega) - (1+r)\cdot S_0\right] = X(\omega) \quad \text{für} \quad \omega = d, u$$

$$\Leftrightarrow \qquad x + \xi\cdot[\omega - 1]\cdot S_0 = x_\omega \quad \text{für} \quad \omega = d, u.$$

0.12 Lemma. *Das Gleichungssystem* $x + \xi\cdot[\omega-1]\cdot S_0 = x_\omega$, für $\omega = d, u$, *in* $(x,\xi)\in\mathbb{R}^2$ *hat eine eindeutige Lösung; dabei ist:*

$$x = p_d x_d + p_u x_u\,, \quad \xi\cdot S_0 = (x_u - x_d)/(u-d)\,, \text{ mit}$$

$$p_d := \frac{u-1}{u-d}\,,\ p_u := \frac{1-d}{u-d}\,, \ \textit{und} \quad 0 < p_\omega < 1,\ p_d + p_u = 1.$$

[Dabei heißt ξ auch *Hedge-Ratio* und wird bei Optionen als *Delta* bezeichnet.]

Würde S_1 mehr als zwei Werte annehmen, so hätte man für die beiden Unbekannten x und ξ mehr als zwei Bestimmungsgleichungen. Dann wäre der Markt nicht mehr vollständig.
Der **Beweis** von 0.12 ist einfach.
X ist also erreichbar durch (x,ξ). Ferner ist p_ω eine W–Funktion (Zähldichte) gemäß

0.13 Definition. Eine Funktion $P(\omega)$ auf Ω mit $P(\omega) \geq 0$ und $\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1$ heißt *Wahrscheinlichkeitsfunktion* (W–Funktion)/*Zähldichte*.

Beschreibt Ω die Menge aller möglichen Ergebnisse bei einem (wiederholbaren) zufallsabhängigen Experiment [und ist Ω höchstens abzählbar], so soll $P(\omega)$ ein Maß für die relative Häufigkeit des Eintretens von ω sein. Besteht das Experiment in dem Werfen einer Münze und beschreibt u Zahl, d Wappen, so wird man $P(\omega) = \frac{1}{2}$ wählen.

0.14 Bemerkung. Wählt man eine künstliche W–Funktion P* auf Ω mit $P^*(\omega) = p_\omega$ wie in 0.12, so gilt:

(0.15) $$x = E^*\left[\frac{X}{1+r}\right] := p_u\cdot\frac{X(u)}{1+r} + p_d\cdot\frac{X(d)}{1+r}\,,$$

(0.16) $$E^*\left[\frac{S_1}{1+r}\right] := p_u\cdot\frac{S_1(u)}{1+r} + p_d\cdot\frac{S_1(d)}{1+r} = S_0 \quad \text{wegen}$$

(0.17) $$p_d\cdot d + p_u\cdot u = 1.$$

P* ist die einzige Wahrscheinlichkeitsfunktion mit $E^*[\frac{S_1}{1+r}] = S_0 \Leftrightarrow E^*[\frac{S_1}{S_0 \cdot (1+r)}] = 1$.
Dies bedeutet, daß unter P* das Verhältnis einer Anlage von S_0 auf dem Bankkonto und einer Anlage von S_0 in das Wertpapier im Mittel gleich bleibt. P* heißt deswegen *risiko-neutral*. Die Eigenschaft (0.17) besagt gerade, daß $\{S_0, S_1/(1+r)\}$ ein sogenanntes *Martingal* ist.

0.18 Beispiel. Im Falle einer europäischen Kaufoption mit a=1, also für $X(\omega) = [S_1(\omega) - K]^+$ mit

$$S_1(d) \le K < S_1(u) \text{, d.h. } (1+r)d \cdot S_0 \le K < (1+r) \cdot u \cdot S_0$$

gilt: $\xi \cdot S_0 > x$, also $\eta = x - \xi_0 \cdot S_0 < 0$; zur Absicherung von X muß also zusätzlich Geld geliehen werden, um in das kursabhängige Wertpapier gemäß ξ zu investieren.
Wegen X(d) = 0 hat man

$$x = p_u \cdot X(u)/(1+r) = \frac{1 - d}{u - d} \cdot [u \cdot S_0 - \frac{1}{1+r} K]$$

$$\xi \cdot S_0 = \frac{1}{u - d} \cdot [u \cdot S_0 - \frac{1}{1+r} K] > x. \quad \square$$

Oft wird auch die Modellannahme mit einer Wahrscheinlichkeitsfunktion P formuliert, das wie P* aussieht mit einem anderen Parameter p anstelle von P*. Dann beschreibt $P(\omega)$ die relative Häufigkeit des Eintretens von ω.
Der Wechsel von P zu P* bedeutet gerade einen Wechsel vom Parameter p zu p*. Offenbar wird diese Wahrscheinlichkeitsfunktion P aber nicht benötigt.

Gemäß 0.8 und 0.12/0.15 ist jeder Zahlungsanspruch X erreichbar mit einer Anfangsinvestition

$$x = E^*[\frac{X}{1+r}].$$