Stochastische Finanzmärkte II

§9 Der Erwartungswert–Varianz–Ansatz im Ein–Perioden–Modell

Die mathematische Theorie zu diesem Ansatz geht zurück auf Markowitz (1952). In diesem Paragraphen sei T=1, r_1 =:r deterministisch und der Markt arbitragefrei. Dann ist ein Portfolioplan durch einen Vektor $\xi \in \mathbb{R}^d$ gegeben. Es sei ein Anfangsvermögen x > 0 vorgegeben. Wir schreiben dann

(9.1) $$\Delta\breve{S}^k := \Delta\breve{S}^k_T = \Delta\breve{S}^k_1 \ , \ G(\xi) := G_T(\xi) = \xi^\top \cdot \Delta\breve{S} \ , \ \breve{X} := \frac{X}{1+r}.$$

Ein klassisches Problem zu gegebenen $\rho \in \mathbb{R}$ ist in dieser Situation:

(9.2) minimiere $\mathrm{Var}\left[V^\xi_T(x)\right]$ über $\xi \in \mathbb{R}^d$

unter der Nebenbedingung $\mathrm{E}\left[V^\xi_T(x)\right] = x(1+\rho)$.

Bei gegebener mittlerer Rendite ρ (vgl. 9.3) soll also das Risiko über die Varianz minimiert werden. Für ρ=r erhält man sofort als Lösung ξ=0 und $\mathrm{Var}\left[V^\xi_T(x)\right] = 0$. Man wird also ρ>r wählen.

9.3 Bemerkung: Es empfiehlt sich oft eine andere Beschreibung eines Porfolios: Ein Vektor $\pi \in \mathbb{R}^d$ heißt *Portfoliovektor,* wenn durch $\pi^k = \xi^k \cdot S^k_0/x$ ein Plan $\xi = (\xi^1,...,\xi^d)$ beschrieben wird. Dann gilt mit $\breve{R} := \breve{R}_1 = \breve{R}_T$:

(9.4) $$V^\xi_T(x) = (1+r)\cdot(x + G(\xi)) = x\cdot(1+r)\cdot\left[1 + \sum_{k=1}^d \pi^k \cdot \breve{R}^k\right] =: V^\pi_T(x) \ .$$

Dabei heißt R^π definiert durch $V^\pi_T(x) =: x\cdot(1 + R^\pi)$ die *Portfoliorendite*.

Die Beziehung (9.4) ist leicht nachzurechnen. Die Komponenten π^k von π beschreiben also, welche Prozentzahlen des Anfangsvermögen in die einzelnen Wertpapiere investiert werden. Dann gibt $\pi^0 := 1 - \sum_{k=1}^d \pi^k \in \mathbb{R}$ an, wieviel Prozent auf das Sparbuch kommen. Ein Vorteil der Darstellung mit einem Portfoliovektor ist, daß die Wertfunktion proportional zum Anfangsvermögen x ist. Dies erlaubt auch eine Darstellung der Portfoliorendite unabhängig von x:

(9.5) $$R^\pi := r + (1+r)\cdot\sum_{k=1}^d \pi^k \cdot \breve{R}^k = (1+r)\cdot\left[1 + \pi^\top \cdot \breve{R}\right] - 1.$$

Offenbar ist $\mathrm{Var}\left[R^\pi\right] = x^{-2}\cdot\mathrm{Var}\left[V^\pi_T(x)\right]$ und $\mathrm{E}\left[R^\pi\right] = x^{-1}\cdot\mathrm{E}\left[V^\pi_T(x)\right] - 1 = \rho$.

Das Optimierungsproblem (9.2) kann also auch für R^π anstelle von $V^\pi_T(x)$ formuliert werden. □

In Hinblick auf den zweiten Teil des Paragraphen formulieren wir das Optimierungsproblem (9.2) mit Hilfe von G(ξ); wegen (9.4) ist (9.2) äquivalent mit:

(9.6) minimiere $\mathrm{Var}\left[G(\xi)\right] = \mathrm{Var}\left[\sum_{k=1}^d \xi^k \cdot \Delta\breve{S}^k\right]$ über $\xi \in \mathbb{R}^d$

unter der Nebenbedingung $\mathrm{E}\left[G(\xi)\right] = \sum_{k=1}^d \xi^k \cdot \mathrm{E}\left[\Delta\breve{S}^k\right] = \frac{\rho - r}{1 + r}\, x$.

Die Verteilung des Anfangsvermögens in verschiedene Wertpapiere bewirkt eine *Varianzreduktion*; diese nennt man auch *Diversifikationseffekt*. Dieser Effekt ist auch schon vom Gesetz der großen Zahlen bekannt. Sind die Zva $\check{R}^k = \check{R}_1^k$, $1 \le k \le d$, etwa unabhängig und identisch verteilt, und ist $\sum_{k=1}^d \xi^k S_0^k =: x - \eta$, so gilt die Nebenbedingung ebenfalls für

$$\tilde{\xi}^k S_0^k := \frac{1}{d}(x - \eta)\ ,\ 1 \le k \le d, \text{ und } \check{\xi}^k S_0^k := \delta_{1k} \cdot (x - \eta)\ ,\ 1 \le k \le d\ .$$

Es ist aber: $\mathrm{Var}\left[G(\tilde{\xi})\right] = \frac{1}{d} \cdot (x - \eta)^2 \cdot \mathrm{Var}\left[\check{R}^1\right] < (x - \eta)^2 \cdot \mathrm{Var}\left[\tilde{R}^1\right] = \mathrm{Var}\left[G(\check{\xi})\right]$.

Für den Fall d=2 läßt sich noch eine explizit Lösung angeben.

9.7 Satz. *Es sei* $d=2$, $\mu_k := E\left[\Delta\check{S}^k\right]$, $\tau_k^2 := \mathrm{Var}\left[\Delta\check{S}^k\right] > 0$, $k=1,2$, $\mathrm{Kov}(\Delta\check{S}^1, \Delta\check{S}^2) := \gamma$.

Dann wird (9.6) *gelöst durch* $\xi^1 \cdot \mu^1 := x \cdot \frac{\rho - r}{1 + r} \cdot \frac{\mu_1^2 \cdot \tau_2^2 - \frac{1}{2}\ \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \gamma}{\mu_1^2 \cdot \tau_2^2 + \mu_2^2 \cdot \tau_1^2 - \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \gamma}$;

ξ^2 *erhält man aus* ξ^1 *durch Vertauschung der Indizes 1 und 2.*

Den Beweis erhält man ohne Optimierung durch Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Die Optimierungsprobleme sollen nun eingebettet werden in das folgende; dabei sei X ein beliebiger Zahlungsanspruch.

(9.8) minimiere $E\left[\left\{X - V_T^{\xi}(x)\right\}^2\right]$ über alle Pläne ξ.

Man kann sich einen Marktteilnehmer mit einem Anfangsvermögen vorstellen, der in T einen Zahlungsanspruch erfüllen muß. Er versucht nun durch Investition in den Markt, dem Zahlungsanpruch durch sein Endvermögen möglichst nahe zu kommen. Aus (9.4) ergibt sich:

(9.9) $V_T^{\xi}(x) = (1+r) \cdot (x + G(\xi))$ mit $G(\xi) = \sum_{k=1}^d \xi^k \cdot \Delta\check{S}^k = \xi^{\top} \cdot \Delta\check{S}$.

Demnach ist die Aufgabe (9.8) gleichbedeutend mit der folgenden:

(9.10) minimiere $E\left[\left\{\check{X} - x - G(\xi)\right\}^2\right]$ über alle Pläne ξ.

Die Lösung läßt sich durch die orthogonale Projektion auf einen linearen Teilraum beschreiben. Um dies zu sehen, sollen die folgenden Größen eingeführt werden. Die Menge aller reellen Zva auf Ω ist

$$\mathbb{R}^{\Omega} := \left\{Z : \Omega \mapsto \mathbb{R}\right\} \cong \mathbb{R}^{|\Omega|},$$

wobei wie üblich die Menge aller reellen Funktion auf einem Raum mit n Elementen mit dem $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden kann. In unserem Fall ist $\mathbb{R}^{\Omega}$ also auch mit dem $|\Omega|$–dimensionalen euklidischen Raum zu identifizieren. Wir werden allerdings ein anderes Skalarprodukt einführen, nämlich das eines L^2–Raumes gemäß:

(9.11) $\quad <Y,Z> := E[Y \cdot Z] = \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)\, Y(\omega)\cdot Z(\omega), \quad Y,Z \in \mathbb{R}^{\Omega}.$

Im Falle der Gleichverteilung haben wir also das normale euklidische Skalarprodukt bis auf den Faktor $1/|\Omega|$. Der von $\Delta\check{S}^k$, $1\le k\le d$, aufgespannte lineare Raum ist wegen $\Xi = \mathbb{R}^d$:

(9.12) $\quad G(\Xi) := \{\, G(\xi) = \sum_{k=1}^{d} \xi^k\, \Delta\check{S}^k,\ \xi^k \in \mathbb{R}\}.$

Über das Skalarprodukt (9.11) ist auch das orthogonale Komplement $G(\Xi)^{\perp}$ zu $G(\Xi)$ definiert.

(9.13) $\quad \Pi$ und $\Pi^{\perp}$ seien die orthogonalen Projektionen auf $G(\Xi)$ bzw. $G(\Xi)^{\perp}$, also

$$Z = \Pi(Z) + \Pi^{\perp}(Z) \quad \text{für} \quad Z \in \mathbb{R}^{\Omega}.$$

Der folgende Projektionssatz ist wohl bekannt:

9.14 Projektionssatz. *Als Lösung von*

(9.15) $\quad$ minimiere $E[\{Z - G(\xi)\}^2]$ über alle Pläne ξ

ergibt sich jeder Plan ζ *mit* $G(\zeta) = \Pi(Z)$.

Als Lösung von (9.8) und (9.10) ergibt sich demnach jeder Plan ξ^* mit $G(\xi^*) = \Pi(\check{X} - x)$.

Dabei wird wie üblich jede Konstante x, etwa 1, auch als Element von $\mathbb{R}^{\Omega}$ aufgefaßt wird. Für $\zeta\in\mathbb{R}^d$ mit $\Pi(Z) = \sum_{k=1}^{d} \zeta^k\, \Delta\check{S}^k$ ergeben sich die Bestimmungsgleichungen:

(9.16) $\quad <\Delta\check{S}^j,Z> = \sum_{k=1}^{d} \zeta^k\, <\Delta\check{S}^j,\Delta\check{S}^k>$, d.h. $E[\Delta\check{S}^j \cdot (Z - \zeta^{\top}\cdot\Delta\check{S})] = 0,\ 1\le j\le d.$

Dabei müssen die $\Delta\check{S}^k$, $1\le k\le d$, nicht linear unabhängig sein. Im vorliegenden Fall T=1 ist die Unabhängigkeit allerdings keine große Einschränkung. Ein Wertpapier mit Index i mit $\Delta\check{S}^i = \sum_{k=1}^{i-1} \zeta^k\, \Delta\check{S}^k$ ist nicht besonders interessant, denn eine Investition in dieses kann auch durch eine Investition in die Wertpapiere mit Index k<i ersetzt werden. Wir setzen

(9.17) $\quad \Gamma := \left(<\Delta\check{S}^j,\Delta\check{S}^k>\right)_{1\le j,k\le d} = \left(E[\Delta\check{S}^j \cdot \Delta\check{S}^k]\right)_{1\le j,k\le d} \in \mathbb{R}^{d\times d},$

$$\psi(Z) := (<\Delta\check{S}^j,Z>,\ 1\le j\le d) = (E[\Delta\check{S}^j \cdot Z],\ 1\le j\le d) \in \mathbb{R}^d.$$

Dann gilt:

9.18 Proposition. $\Delta\check{S}^1,\ldots,\Delta\check{S}^d$ sind genau dann *linear unabhängig*, wenn Γ^{-1} existiert, *und es gilt* dann *für die Lösung* $\zeta\in\mathbb{R}^d$ *zu* (9.16): $\zeta = \Gamma^{-1}\psi(Z)$.

Beweis. Wir zeigen die Äquivalenz von

(i) $\quad G(\xi)(\omega) = \sum_{k=1}^{d} \xi^k\, \Delta\check{S}^k(\omega) = 0 \quad \forall\, \omega\in\Omega;$

(ii) $\quad \sum_{k=1}^{d} \xi^k\, <\Delta\check{S}^j,\Delta\check{S}^k> = 0 \quad \forall\, 1\le j\le d$, d.h. $\Gamma\xi = 0.$

Aus (i) folgt umittelbar aus $\sum_{k=1}^{d} \xi^k\, <\Delta\check{S}^j,\Delta\check{S}^k> = E[\,\Delta\check{S}^j \cdot (\sum_{k=1}^{d} \xi^k\, \Delta\check{S}^k)] = 0.$

Aus (ii) erhält man: $0 = \sum_{j=1}^{d} \xi^j \sum_{k=1}^{d} \xi^k \langle \Delta\check{S}^j, \Delta\check{S}^k \rangle = E\left[\{\sum_{k=1}^{d} \xi^k \Delta\check{S}^j\}^2\right] = 0$ und damit (i). Der Rest der Aussage ist klar. []

9.19 Definition. *Jede Lösung* $\beta = (\beta^1,...,\beta^d)$ *von* (9.15) *mit* $Z \equiv 1$, *also von* $\Pi(1) = G(\beta)$ *heißt* ***Anpassungsvektor*** (*für* $\Delta\check{S}$).

Die folgende Aussage ist offensichtlich:

9.20 Lemma. *Sei* β *ein Anpassungsvektor und* $c \in \mathbb{R}$, *dann ist* $\xi = c\beta$ *eine Lösung von* (9.15) *mit* $Z \equiv c$, *also von* $\Pi(c) = G(\xi)$.

9.21 Lemma. (a) $0 \le E\left[\Pi(1)\right] = E\left[\Pi(1)^2\right] < 1$, $0 < E\left[\Pi^{\perp}(1)\right] = E\left[\Pi^{\perp}(1)^2\right] \le 1$;

(b) es sind äquivalent: (1) $E\left[\Pi(1)\right] = 0$, (2) es ist $\beta = 0$ wählbar,

(3) $E\left[\Delta\check{S}^k\right] = 0$, $1 \le k \le d$, d.h. $\{\check{S}_0, \check{S}_1\}$ ist ein Martingal unter P.

Beweis: a) Es ist $E\left[\Pi(1)\right] = \langle 1, \Pi(1) \rangle = \langle \Pi(1) + \Pi^{\perp}(1), \Pi(1) \rangle = \langle \Pi(1), \Pi(1) \rangle = E\left[\Pi(1)^2\right]$;

ferner $1 = \langle 1,1 \rangle = \langle \Pi(1), \Pi(1) \rangle + \langle \Pi^{\perp}(1), \Pi^{\perp}(1) \rangle$. Die Beziehung $1 \in G(\Xi)$, also

$1 = G(\xi)$ für ein $\xi \in \mathbb{R}^d$ würde gemäß 1.18 eine Arbitragemöglichkeit bieten; also gilt $\Pi^{\perp}(1) \neq 0$.

b) Offenbar ist $\{\check{S}_0, \check{S}_1\}$ genau dann ein Martingal unter P, wenn gilt: $\langle 1, \Delta\check{S}^k \rangle = 0$, $1 \le k \le d$.

Sei nun $E\left[\Pi(1)^2\right] = 0$ und damit $\Pi(1) = 0$; dann gilt $1 = \Pi^{\perp}(1)$ und somit:

$\langle 1, \Delta\check{S}^k \rangle = \langle \Pi^{\perp}(1), \Delta\check{S}^k \rangle = 0$ wegen $\Delta\check{S}^k \in G(\Xi)$. Ist andererseits $\{\check{S}_0, \check{S}_1\}$ ein Martingal unter P, dann gilt $\Delta\check{S}^k \perp 1$, also $G(\Xi) \perp 1$ und somit $\Pi(1) = 0$. []

Es ist eine Erweiterung des Begriffs Martingalmaß notwendig auf signierte Maße.

9.22 Definition. *Es heißt* $\mathfrak{L} := \{L \in \mathbb{R}^{\Omega};\ E\left[L\right] = 1,\ E\left[L \cdot \Delta\check{S}^k\right] = 0\ \forall\ k\}$ *die Menge der* ***signierten Martingaldichten*** *und* $\tilde{L} \in \mathfrak{L}$ ***varianz-optimal***, *falls gilt*:

$$\mathrm{Var}\left[\tilde{L}\right] \le \mathrm{Var}\left[L\right] = E\left[\{L-1\}^2\right] = E\left[L^2\right] - 1 \quad \forall\ L \in \mathfrak{L}.$$

Es ist $L \in \mathfrak{L}$ offensichtlich genau dann die Dichte eines Martingalmaßes, wenn gilt: $L > 0$.
Da der Markt arbitragefrei ist, existiert nach dem 1. Fundamentalsatz ein äquivalentes Martingalmaß und insbesondere ist $\mathfrak{L}$ nicht leer. Bei der Minimierung von $E\left[\{L-1\}^2\right]$ kann man 1 als auch als Dichte von P bzgl. sich selbst auffassen. Dann sucht man also ein signiertes Martingalmaß mit einer Dichte L in $\mathfrak{L}$, das P möglichst nahe kommt.

9.23 Lemma. (a) $E[L \cdot G(\xi)] = 0 \quad \forall\, \xi, \forall\, L \in \mathfrak{L}$.

(b) Es sind äquivalent:

(1) $\tilde{L} \in \mathfrak{L}$ ist varianz–optimal;

(2) Für $L \in \mathfrak{L}$ gilt: $L = \tilde{L} + N$ mit $E[N \cdot \tilde{L}] = 0$;

(3) $\tilde{L} = E[\Pi^{\perp}(1)]^{-1}\, \Pi^{\perp}(1)$;

(4) $\tilde{L} = x + G(\xi) \in \mathfrak{L}$ für ein $(x,\xi) \in \mathbb{R}\times\Xi$;

(5) $\tilde{L} = x + G(\xi) \in \mathfrak{L}$ für ein $(x,\xi) \in [1,\infty)\times\Xi$.

Beweis: a) Diese Aussage ist wegen $G(\xi) = \sum_{k=1}^{d} \xi^k\, \Delta\check{S}^k$ offensichtlich.

b) "(1) $\Leftarrow$ (2)" Für $L \in \mathfrak{L}$ ist $E[L^2] = E[\tilde{L}^2] + E[(N)^2]$. Daraus folgt $E[L^2] \geq E[\tilde{L}^2]$.

"(4) $\Rightarrow$ (2)" Es ist $E[L \cdot \tilde{L}] = x + E[L \cdot G(\xi)] = x \quad \forall\, L \in \mathfrak{L}$ wegen (a), insbesondere $E[\tilde{L} \cdot \tilde{L}] = x$. Somit gilt auch $E[(L - \tilde{L}) \cdot \tilde{L}] = 0$.

"(5) $\Rightarrow$ (4)" ist offensichtlich.

"(3) $\Rightarrow$ (5)" Sei $\tilde{L}$ wie in (3) definiert, dann gilt: $\infty > \nu := E[\Pi^{\perp}(1)]^{-1} = E[\Pi^{\perp}(1)^2]^{-1} \geq 1$ nach 9.21. Offensichtlich ist $E[\tilde{L}] = 1$; ferner gilt: $E[\tilde{L} \cdot G] = \nu \cdot \langle \Pi^{\perp}(1), G\rangle = 0 \quad \forall\, G \in G(\Xi)$; somit ist $\tilde{L} \in \mathfrak{L}$. Nun gilt $\tilde{L} = \nu - \nu \cdot \Pi(1) = \nu + G(-\nu\beta)$.

"(1) $\Rightarrow$ (3)" Es geht um die Eindeutigkeit von $\tilde{L}$. Sei $\tilde{L}$ wie in (3); in Hinblick auf das Vorangegangene gilt dann auch (2) und (1). Sei nun L ebenfalls varianz–optimal. Dann folgt nach dem Beweis von "(1) $\Leftarrow$ (2)": $E[L^2] = E[\tilde{L}^2] + E[(L - \tilde{L})^2]$, also $E[(L - \tilde{L})^2] = 0$ und somit $L = \tilde{L}$. $[\,]$

Wir haben nun eine Beziehung zwischen der varianz–optimalen signierten Martingaldichte $\tilde{L}$ und einem Anpassungsvektor β erhalten.

9.24 Satz. Ist $\tilde{L} \in \mathfrak{L}$ varianz–optimal, so gilt für jeden Anpassungsvektor β:

(a) $\Pi(1) = 1 - \tilde{L}/E[\tilde{L}^2] = \beta^{\top} \cdot \Delta\check{S}$;

(b) $\tilde{L} = 1 - \nu\, \beta^{\top} \cdot (\Delta\check{S} - E[\Delta\check{S}]) = \nu \cdot [1 - G(\beta)]$ mit $\nu = \{1 - E[G(\beta)]\}^{-1} = E[\tilde{L}^2]$.

Die Gestalt von $\tilde{L}$ ist offenbar die, die sich bei der Girsanov–Transformation (vgl. 4.18) ergibt.

Beweis von 9.24**:** Gemäß 9.23(3) und 9.21(a) gilt:

$E[\tilde{L}^2] = E[\Pi^{\perp}(1)^2]/E[\Pi^{\perp}(1)]^2 = E[\Pi^{\perp}(1)]/E[\Pi^{\perp}(1)]^2 = 1/E[\Pi^{\perp}(1)] =: \nu$. Damit besagt 9.23(3): $\tilde{L} = E[\tilde{L}^2]\, \Pi^{\perp}(1) = E[\tilde{L}^2] \cdot \{1 - \Pi(1)\} = \nu \cdot \{1 - \beta^{\top} \cdot \Delta\check{S}\}$.

Nun ist $1 = E[\tilde{L}] = \nu \cdot \{1 - E[\beta^{\top} \cdot \Delta\check{S}]\}$ $[\,]$

Die varianz–optimale signierte Martingaldichte $\tilde{L}$ erlaubt auch die Lösung einer weiteren interessanten Optimierungsaufgabe:

(9.25) minimiere $E\left[\{X - V_T^{\xi}(x)\}^2\right]$ über alle $(x,\xi) \in \mathbb{R}\times\Xi$.

In dem Fall, wo der Zahlungsanspruch X nicht erreichbar ist, versucht man also X möglichst gut durch den Wert eines Planes zu approximieren. Ist (x^*,ξ^*) eine Lösung, so kann man x^* in dieser Situation als Kandidaten für einen fairen Preis betrachten. Der Preis ist in dem Sinne fair, daß $\{X - V_T^{\xi}(x)\}^+$ und $\{X - V_T^{\xi}(x)\}^-$ bei der Approximation (9.25) gleiches Gewicht haben. Man nennt x^* auch *Approximationspreis* (Schweizer, 1995). Die Aufgabe (9.25) ist wieder äquivalent zu einer diskontierten Version:

(9.25)* minimiere $E\left[\{\check{X} - x - G(\xi)\}^2\right]$ über alle $(x,\xi) \in \mathbb{R}\times\Xi$.

Bei festem x haben wir diese Aufgabe (9.10) mit 9.14 gelöst. Diese Aufgabe steht in Beziehung zu einem einfachen Spezialfall der *Föllmer-Schweizer- Zerlegung*. Dazu benötigen wir:

9.26 Definition. *Sei*

$V(\mathbb{R}\times\Xi) := \{V_T^{\xi}(x) = (1+r)\left[x + G(\xi)\right]; (x,\xi)\in\mathbb{R}\times\Xi\} = \{z + G(\zeta) = z\cdot 1 + \zeta^{\top}\cdot\Delta\check{S}; (z,\zeta)\in\mathbb{R}\times\Xi\}$;

$V(\mathbb{R}\times\Xi)^{\perp}$ *sei das orthogonale Komplement zu* $V(\mathbb{R}\times\Xi)$.

Da $V(\mathbb{R}\times\Xi)$ von 1 und $\Delta\check{S}^k$, $1\le k\le d$, aufgespannt wird, gilt also:

(9.27) $N \in V(\mathbb{R}\times\Xi)^{\perp} \Leftrightarrow E\left[N\right] = 0 = E\left[N\cdot\Delta\check{S}^k\right]$, $1\le k\le d$.

9.28 Proposition. *Für* $\check{X}$ *existiert eine Zerlegung*

$\check{X} = x^* + G(\xi^*) + N$ mit $x^* \in \mathbb{R}$, $\xi^* \in \mathbb{R}^d$, $N \in V(\mathbb{R}\times\Xi)^{\perp}$.

Sie heißt Föllmer-Schweizer-Zerlegung.

Beweis: Wähle $x^* + G(\xi^*)$ also orthogonale Projektion von $\check{X}$ auf $V(\mathbb{R}\times\Xi)$. []

Aus Lemma 9.23 ("(1) ⇒ (4)") erhält man nun:

(9.29) $\tilde{L} \in \mathbb{R}^{\Omega}$ ist genau dann varianz–optimale signierte Martingaldichte, wenn gilt:

$E\left[\tilde{L}\right] = 1$, $\tilde{L} \in G(\Xi)^{\perp} \cap V(\mathbb{R}\times\Xi)$.

Eine Lösung von (9.25) und eine gewisse Eindeutigkeit der Föllmer–Schweizer–Zerlegung liefert:

9.30 Satz. Sei $\tilde{L} \in \mathfrak{L}$ varianz–optimal und β ein Anpasungsvektor.

(a) Es sind äquivalent:

(1) (x^*,ξ^*) ist eine Lösung von

minimiere $E\left[\{\check{X} - x - G(\xi)\}^2\right]$ über alle $(x,\xi) \in \mathbb{R}\times\Xi$:

(2) $\check{X} = x^* + G(\xi^*) + N$ mit $N := \check{X} - x^* - G(\xi^*)$ ist eine Föllmer–Schweizer–Zerlegung;

(3) $x^* = E\left[\tilde{L}\cdot\check{X}\right]$, $G(\xi^*) = \Pi(\check{X} - x^*) = \Pi(\check{X}) - x^*\cdot G(\beta)$.

(b) In der Situation von (a) gilt: $\inf_{x,\xi} E\left[\{\check{X} - x - G(\xi)\}^2\right] = E\left[N^2\right]$,

$\inf_{\xi} E\left[\{\check{X} - x - G(\xi)\}^2\right] = (x - x^*)^2/\nu + E\left[N^2\right]$.

Beweis. a) Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt wieder aus dem Projektionssatz.

"(1),(2) $\Rightarrow$ (3)" Aus (2) folgt mit (9.29):

$E\left[\tilde{L}\cdot\check{X}\right] = x^* + E\left[\tilde{L}\,G(\xi^*)\right] + E\left[\tilde{L}\cdot N\right] = x^* + 0 + 0$. Ferner ist

$E\left[\{\check{X} - x^* - G(\xi^*)\}^2\right] = \inf_{x,\xi} E\left[\{\check{X} - x - G(\xi)\}^2\right] \le E\left[\{\check{X} - x^* - G(\xi)\}^2\right]\ \forall\,\xi$, also auch:

$E\left[\{\check{X} - x^* - G(\xi^*)\}^2\right] = \inf_{\xi} E\left[\{\check{X} - x^* - G(\xi)\}^2\right]$.

Damit gilt: $G(\xi^*) = \Pi(\check{X} - x^*) = \Pi(\check{X}) - x^*\cdot\Pi(1) = \Pi(\check{X}) - x^*\cdot G(\beta)$

$G(\xi^*) = \Pi(\check{X} - x^*) = \Pi(\check{X}) - x^*\cdot G(\beta)$.

"(3) $\Rightarrow$ (1)" folgt aus der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Optimierungsaufgabe.

b) Es ist $\inf_{\xi} E\left[\{\check{X} - x - G(\xi)\}^2\right] = E\left[\{\check{X} - x - \Pi(\check{X} - x)\}^2\right]$ mit

$\check{X} - x - \Pi(\check{X} - x) = x^* + G(\xi^*) + N - x - \Pi(\check{X}) - x\cdot\Pi(1)$

$= x^* - x^*\cdot G(\beta) + N - x - x\cdot G(\beta) = (x^* - x)\cdot(1 - G(\beta)) + N$.

Aus $N \in V(\mathbb{R}\times\Xi)^\top$, 9.21 und 9.24 folgt jetzt die Behauptung. []

Wendet man das Ergebnis auf (9.25) an, so sieht man, daß sich der Approximationspreis als Erwartungswert des diskontierten Zahlungsanspruchs $\check{X}$ unter dem signierten Martingalmaß beschreiben läßt mit der varianz–optimalen Dichte $\tilde{L}$. Im Binomialmodell ist das Minimum in (9.25) stets null; dann enthält $\mathfrak{L}$ auch nur ein Element dP^*/dP und wir haben in Übereinstimmung mit §2: $x^* = E^*\left[\check{X}\right]$.

9.31 Definition. Sei $\mu^k := E\left[\Delta\check{S}^k\right]$, $\mu := (\mu^1,...,\mu^d)$, $\Delta M^k := \Delta\check{S}^k - \mu^k$, $1\le k\le d$, $\Delta M := (\Delta M^1,...,\Delta M^d)$. $G^*(\Xi) := \{\sum_{k=1}^d \xi^k\,\Delta M^k,\ \xi^k \in \mathbb{R}\}$.

Unter der *Kunita-Watanabe-Zerlegung* von $\check{X} \in \mathbb{R}^\Omega$ versteht man die Darstellung:

(9.32) $\check{X} = E[Z] + \xi^{o\top} \cdot \Delta M + N$ mit $\xi^o \in \mathbb{R}^d$, $N \in \mathbb{R}^\Omega$, $E[N] = 0$, $E[N \cdot \Delta M^k] = 0$, $1 \le k \le d$.

Bei einer Darstellung $\check{X} = x^o + \xi^{o\top} \cdot \Delta M + N$ mit N wie in (9.32), gilt notwendigerweise $x^o = E[\check{X}]$ wegen $E[\Delta M^k] = 0 = E[N] = 0$. Wegen $\Delta M^k := \Delta \check{S}^k - \mu^k \cdot 1$ kann man Raum $V(\mathbb{R}\times\Xi)$ die Zva $\Delta \check{S}^k$ oft durch ΔM^k ersetzen. So gilt:

(9.27)* $V(\mathbb{R}\times\Xi) = \{z \cdot 1 + \zeta^\top \cdot \Delta M;\ (z,\zeta) \in \mathbb{R}\times\Xi\}$,

$N \in V(\mathbb{R}\times\Xi)^\perp \Leftrightarrow E[N] = 0 = E[N \cdot \Delta M^k]$, $1 \le k \le d$.

9.33 Lemma. Eine Föllmer–Schweizer–Zerlegung $\check{X} = x^* + \xi^{*\top} \cdot \Delta \check{S} + N$ mit $x^* \in \mathbb{R}$, $\xi^* \in \mathbb{R}^d$, $N \in \in V(\mathbb{R}\times\Xi)^\perp$, liefert eine Kunita–Watanabe–Zerlegung wie in (9.32) (und umgekehrt) mit $\xi^o = \xi^*$ und demselben N.

Beweis: Man hat: $\check{X} = x^o + \xi^{o\top} \cdot \Delta M + N$ mit $x^o = x^* + \xi^{*\top}\mu$, $\xi^o = \xi^* \in \mathbb{R}^d$. Wegen (9.27)* erfüllt N die Anforderungen and N in der Kunita–Watanabe–Zerlegung. []

Aus 9.30b kann man Bestimmungsgleichungen für ξ^* in der Form (9.16) herleiten. Eine andere Form soll hergeleitet werden.

9.34 Proposition. (a) In der Kunita–Watanabe–Zerlegung $\check{X} = E[\check{X}] + \xi^{o\top} \cdot \Delta M + N$ mit N wie in (9.32) ist $\xi^{o\top} \cdot \Delta M$ die orthogonale Projektion von $\check{X} - E[\check{X}]$ auf $G^*(\Xi)$.

(b) Es gilt $E[\check{X}] = x^* + \xi^{*\top}\mu$ und man erhält die Größen $\xi^o = \xi^*$ aus den beiden Zerlegungen über die Bestimmungsgleichungen:

(9.35) $\mathrm{Cov}(\Delta \check{S}^j, \check{X}) = \sum_{k=1}^d \xi^{*k} \mathrm{Cov}(\check{S}^j, \check{S}^k)$, $1 \le j \le d$.

(c) Sei $\Gamma^* := \mathfrak{Cov}(\Delta \check{S}) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $\psi^*(Z) := (\mathrm{Cov}(\Delta \check{S}^j, \check{X}),\ 1 \le j \le d) \in \mathbb{R}^d$. $\Delta M^1, \ldots, \Delta M^d$ sind genau dann *linear unabhängig*, wenn Γ^{*-1} *existiert, und es gilt* dann $\xi^o = \xi^* = \Gamma^{*-1}\psi^*(\check{X})$.

Beweis. a) Gemäß 9.30 sowie 9.33 und Beweis gilt: $x^o := E[\check{X}] = x^* + \xi^{*\top}\mu$ und

$E[\{\check{X} - x^o - \xi^{o\top} \cdot \Delta M\}^2] = E[\{\check{X} - x^* - \xi^{*\top} \cdot \Delta \check{S}\}^2] \le E[\{\check{X} - x^* - \xi^\top \cdot \Delta \check{S}\}^2]$

$= E[\{\check{X} - x^o - \xi^\top \cdot \Delta M\}^2]$ für $\xi \in \mathbb{R}^d$. Somit folgt die Aussage aus dem Projektionssatz. []

b) Es ist $\langle \Delta M^j, \check{X} - E[\check{X}] \rangle = \mathrm{Cov}(\Delta \check{S}^j, \check{X})$ und $\langle \Delta M^j, \Delta M^k \rangle = \mathrm{Cov}(\check{S}^j, \check{S}^k)$. Nun folgt Aussage (b) wie (9.16).

c) Wegen $\mathfrak{Cov}(\Delta \check{S}) = \left(\langle \Delta M^j, \Delta M^k \rangle \right)_{1 \le j,k \le d}$ folgt Teil (c) wie 9.18. []

Im Falle d= 1 ergeben sich naturgemäß wesentliche Vereinfachungen.

9.36 Korollar. Es sei d = 1. Dann gilt für $\xi^* = \xi^o$ wie in 9.28 und (9.32):

(a) Für $\Pi(\check{X}) = G(\zeta)$ gilt: $\zeta = E[\Delta\check{S}\cdot\check{X}]/E[\{\Delta\check{S}\}^2]$ (:= 0 für $E[\{\Delta\check{S}\}^2] = 0$);

(b) $\beta = E[\Delta\check{S}]/E[\{\Delta\check{S}\}^2]$ ist der Anpassungskoeffizient (1–dim. Anpassungsvektor);

(c) $\nu = E[\{\Delta\check{S}\}^2]/Var[\Delta\check{S}]$ mit ν wie in 9.24;

(d) $\tilde{L} = 1 - (E[\Delta\check{S}]/Var[\Delta\check{S}])\cdot(\Delta\check{S} - E[\Delta\check{S}])$.

(e) Bei einer Darstellung $\Delta\check{S} = S_0\cdot(\check{b} + \check{\sigma}\cdot\Delta W)$ mit einer standardisierten Zva ΔW wie in 3.2 gilt: $\tilde{L} > 0$ falls

(9.37) $(\check{b}/\check{\sigma})\cdot\Delta W < 1$.

(f) Liegt ein Trinomialmodell vor in dem Sinne, daß $\check{S}_1$ nur die Werte $d\cdot S_0$, S_0, $u\cdot S_0$ annimmmt mit d<1<u, dann gilt $\tilde{L} > 0$.

(g) Als Lösung (x*,ξ*) von (9.25) ergibt sich:

(9.38) $x^* = E[\tilde{L}\cdot\check{X}] = E[\check{X}] - \xi^*\cdot E[\Delta\check{S}]$, $\xi^* = Cov(\Delta\check{S},\check{X})/Var[\Delta\check{S}]$.

Beweis. a) Die Bestimmungsgleichung (9.16) lautet für d=1: $E[\Delta\check{S}\cdot\check{X}] = \zeta\cdot E[\{\Delta\check{S}\}^2]$. Teil (b) ergibt sich mit Z≡1. Die Teile (c) und (d) sind einfach.

e) Gemäß 9.24 und Teil (b) haben wir:

$$\tilde{L} > 0 \Leftrightarrow G(\beta) < 1 \Leftrightarrow \Delta\check{S}\cdot E[\Delta\check{S}] < E[\{\Delta\check{S}^2\}] \Leftrightarrow (\check{b} + \check{\sigma}\cdot\Delta W)\cdot\check{b} < \check{b}^2 + \check{\sigma}^2$$

$$\Leftrightarrow \check{\sigma}\cdot\Delta W\cdot\check{b} < \check{\sigma}^2.$$

f) Wir setzen $D := (d-1)\cdot S_0$, $U := (u-1)\cdot S_0$, also $D < 0 < U$, $q := P[\Delta\check{S} = D]$, $p := P[\Delta\check{S} = U]$. Dann folgt: $E[\Delta\check{S}] = q\cdot D + p\cdot U$, $E[\{\Delta\check{S}\}^2] = q\cdot D^2 + p\cdot U^2$ und

$E[\Delta\check{S}]\cdot\Delta\check{S} \in \{q\cdot D^2 + p\cdot D\cdot U,\ 0,\ q\cdot D\cdot U + p\cdot U^2\}$, also stets $E[\Delta\check{S}]\cdot\Delta\check{S} < E[\{\Delta\check{S}\}^2]$.

g) In Hinblick auf (9.25)* können wir 9.30 anwenden. Dabei können wir ξ* = ζ* aus 9.35 gewinnen. []

Aus 9.36e lernen wir, daß $\tilde{L} > 0$ gilt, wenn ΔW genügend klein ist. Das macht plausibel, daß im zeitstetigen Modell mit stetigen Pfaden, die varianz–optimale Martingaldichte stets positiv ist.

Wählt man den Approximationspreis x* zu einem Kontrakt mit einem Zahlungsanspruch X über (9.25), dann approximiert $V_T^{\xi^*}(x^*)$ den Zahlungsanpruch X in der L^2–Norm. Man kann nun im Fall d=1 fragen, wann ist ξ*≥0 und η* ≤ 0 mit

(9.39) $\eta^* := x^* - \xi^*\cdot S_0$,

wann macht man also bei der approximativen Absicherung von X Schulden, um in das Wertpapier zu investieren. In 2.2 wurde diese Frage in einem Spezialfall angesprochen.

9.40 Proposition. Sei d=1 und $\check{X} = f(\check{S}_1)$, wobei f isoton ist; dann gelten:

(a) $\mathrm{Cov}\left[f(\check{S}_1),\check{S}_1\right] \geq 0$;

(b) $\xi^* \geq 0$ und, falls auch $s \mapsto f(s)/s$ isoton ist, $\eta^* := x^* - \xi^* \cdot S_0 \leq 0$, für die Lösung (x^*,ξ^*) von (9.25).

Beweis: a) Sei $\check{S}_1 =: S$, $m := E[S]$, $\tau^2 := \mathrm{Var}[S]$ dann hat man:

$\mathrm{Cov}\left[f(S),S\right] = E\left[f(S)\cdot(S-m)\right] = \int_{\{S\geq m\}} f(S)\cdot(S-m)\,dP + \int_{\{S<m\}} f(S)\cdot(S-m)\,dP$

$\geq \int_{\{S\geq m\}} f(m)\cdot(S-m)\,dP + \int_{\{S<m\}} f(m)\cdot(S-m)\,dP = f(m)\cdot E[S-m] = 0.$

b) Es ist gemäß (9.38) $\xi^* = \mathrm{Cov}(\Delta\check{S},\check{X})/\mathrm{Var}[\Delta\check{S}]$. Nun gilt:

$\mathrm{Cov}(\Delta\check{S},\check{X}) = \mathrm{Cov}(S,\check{X})$ und ebenso $\mathrm{Var}[\Delta\check{S}] = \mathrm{Var}[S]$, also: $\xi^* = \mathrm{Cov}(S,\hat{X})/\mathrm{Var}[S]$.

Damit folgt $\xi^* \geq 0$ nach Teil (a). Ferner hat man mit (9.38) $x^* = E[\check{X}] - \xi^* \cdot E[\Delta\check{S}]$ und

$\eta^* = x^* - \xi^* \cdot S_0 = E[\check{X}] - \xi^* \cdot E[\Delta\check{S}] - \xi^* \cdot S_0 = E[\check{X}] - \xi^* \cdot E[S]$.

Nun erhält man

$\tau^2 \cdot \eta^* = \tau^2 \cdot (E[\check{X}] - \xi^* \cdot m) = \tau^2 \cdot E[\check{X}] - \mathrm{Cov}(S,\check{X}) \cdot m = \tau^2 \cdot E[\check{X}] - E[\check{X}\cdot(S-m)] \cdot m$

$= E[\check{X}] \cdot \mathrm{Var}[S] - E[\check{X}\cdot(S-m)] \cdot m = E[\check{X}] \cdot E[S^2] - E[\check{X}\cdot S] \cdot m$, also:

(9.41) $\eta^* = (E[\check{X}] \cdot E[\check{S}_1^2] - E[\check{X}\cdot\check{S}_1] \cdot E[\check{S}_1]) \,/\, \mathrm{Var}[\check{S}_1]$.

Definiert man nun ein W–Maß P' über seinen Erwartungswert gemäß $E'[Y] := E[Y\cdot S]/m$, so erhalten wir mit $g(s) := f(s)/s$:

$E[\check{X}] \cdot E[S^2] - E[\check{X}\cdot S] \cdot m \leq 0 \Leftrightarrow E'[\check{X}/S] \cdot E'[S] \leq E'[\check{X}] \Leftrightarrow E'[g(S)] \cdot E'[S] \leq E'[g(S)\cdot S]$

$\Leftrightarrow \mathrm{Cov}'(g(S),S) \geq 0.$

Die letzte Beziehung gilt aber nach Teil (a). []

Im Falle einer Kaufoption haben wir

(9.42) $\check{X} = f(\check{S}_1) = (\check{S}_1 - \check{K})^+$, mit $f(s) = (s - \check{K})^+$ und $f(s)/s = (1 - \frac{\check{K}}{s})^+$,

also sind die Voraussetzungen an f in 9.40 erfüllt.

Wir wenden uns nun der eingangs formulierten Optimierungsaufgabe (9.6) und damit (9.2) zu. Für einen Anpassungsvektor β ist dann $c\,\beta$ bei richtiger Wahl der Konstante c ein Kandidat für die Lösung.

9.43 Lemma. Ist β ein Anpassungsvektor, so gilt für $c \in \mathbb{R}$: $\mathrm{Var}[G(c\,\beta)] \leq \mathrm{Var}[G(\xi)]$ für alle Pläne ξ mit $E[G(\xi)] = E[G(c\,\beta)]$ $(= c\,E[G(\beta)])$.

Beweis. Sei $E[G(c\,\beta)]$ =: m; dann erhält man mit 9.20

$$\mathrm{Var}[G(\xi)] = \mathrm{Var}[c - G(\xi)] = E[\{c - G(\xi)\}^2] - \{c - m\}^2$$
$$\geq E[\{c - G(c\,\beta)\}^2] - \{c - m\}^2 = \mathrm{Var}[G(c\,\beta)]. \ []$$

9.44 Satz. Als Lösung der Optimierungsaufgabe (9.6) ergibt sich

$$\xi^\rho := \frac{\rho - r}{1 + r} \cdot \frac{x}{E[G(\beta)]} \cdot \beta .$$

Beweis: Setze $c := \frac{\rho - r}{1 + r} \cdot \frac{x}{E[G(\beta)]}$; dann gilt:

$$E[G(c\,\beta)] = c\,E[G(\beta)] = \frac{\rho - r}{1 + r} \cdot x.$$

Die Nebenbedingung aus (9.6) ist also gleichbedeutend mit $E[G(\xi)] = \frac{\rho - r}{1 + r}\,x = E[G(c\,\beta)]$ und wird von ξ^ρ erfüllt. Nun kann Lemma 9.43 unmittelbar angewendet werden. []

Die Aufgabe (9.6) kann auch mit einen Langrangeschen Multiplikator gelöst werden (vgl. Pliska 1997, S. 48).

9.45 Korollar. Als Lösung der Optimierungsaufgabe (9.2) ergibt sich mit ν wie in 9.24:

$$\xi^\rho := \frac{\rho - r}{1 + r} \cdot \frac{\nu}{\nu - 1} \cdot x \cdot \beta \quad \text{und} \quad V_T^{\xi^\rho}(x) = \frac{x}{\nu - 1} \cdot \{\nu(\rho+1) - (1+r) - (\rho - r) \cdot \tilde{L}\}.$$

Beweis. Es gilt nach 9.24: $\frac{1}{E[G(\beta)]} = \frac{\nu}{\nu - 1}$ sowie $\tilde{L} = \nu - \nu\,G(\beta)$. Daraus ergibt sich die Darstellung von ξ^ρ und:

$$V_T^{\xi^\rho}(x) = (1+r) \cdot \{x + G(\xi^\rho)\}$$
$$= (1+r) \cdot x \cdot \left\{1 + \frac{\rho - r}{1 + r} \frac{\nu}{\nu - 1} G(\beta)\right\} = x \cdot \left\{1 + r + (\rho - r) \frac{\nu}{\nu - 1} G(\beta)\right\}$$
$$= x \cdot \left\{1 + r + (\rho - r) \frac{1}{\nu - 1} [\nu - \tilde{L}]\right\} = x \cdot \left\{1 + r + (\rho - r) \frac{\nu}{\nu - 1} - (\rho - r) \frac{1}{\nu - 1} \tilde{L}\right\}$$
$$= \frac{x}{\nu - 1} \left\{\nu - 1 + r\nu - r + \rho\nu - r\nu - (\rho - r)\,\tilde{L}\right\}. \ []$$

Existiert ein Investmentfond (*mutual fund*), der für ein c>0 gerade $c \cdot \beta^k$ Anteile an dem k–ten Wertpapier hält , $\forall$ 1≤k≤d, so erhält man ξ^ρ, indem man $\frac{1}{c} \cdot \frac{\rho - r}{1 + r} \cdot \frac{\nu}{\nu - 1} \cdot x$ Anteile an dem Investmentfond hält. Also kann man für alle ρ einen optimalen Investmentplan allein durch Investititon in den Investmentfond und das Sparbuch erzeugen. Dies nennt man das *'mutual fund'-Prinzip.*

Das absolute Minimum in (9.6) ohne Berücksichtigung der Nebenbedingung ist offenbar Null und wird durch $\xi \equiv 0$ erreicht. Eine sinnvolle Fragestellung ergibt sich aber, wenn man noch einen Zahlungsanspruch X hinzunimmt, und die Aufgabe betrachtet:

(9.46) minimiere $\mathrm{Var}[\breve{X} - G(\xi)]$ oder minimiere $\mathrm{Var}[X - V_T^{\xi}(x)]$ über $\xi \in \Xi = \mathbb{R}^d$.

Dann ergibt sich eine Verbindung zu (9.25)*, wenn man noch für $(x,\xi) \in \mathbb{R}\times\Xi$ die folgende Nebenbedingung betrachtet

(9.47) $\quad E\left[x + G(\xi)\right] = E\left[\check{X}\right]$, d.h. $E\left[V_T^{\xi}(x)\right] = E\left[X\right]$.

9.48 Proposition. (x*,ξ*) löst genau dann die Optimierungsaufgabe (9.25)*, wenn ξ* die Aufgabe (9.46) löst und (x*,ξ*) die Nebenbedingung (9.47) erfüllt.

Beweis. a) Von Satz 9.30 wissen wir, daß für die Lösung (x*,ξ*) von (9.25)* über eine Föllmer–Schweizer–Zerlegung erhalten mit:

$E\left[\check{X} - x^* - G(\xi^*)\right] = E\left[N\right] = 0$, also (9.47). Andererseits folgt aus (9.47):

$E\left[\{\check{X} - x - G(\xi)\}^2\right] = Var\left[\check{X} - x - G(\xi)\right] = Var\left[\check{X} - G(\xi)\right]$.

b) Löse nun ξ* die Aufgabe (9.46) und erfülle (x*,ξ*) die Nebenbedingung (9.47).

Dann gilt für $(x,\xi) \in \mathbb{R}\times\Xi$: $E\left[\{\check{X} - x - G(\xi)\}^2\right] \geq Var\left[\check{X} - x - G(\xi)\right] = Var\left[\check{X} - G(\xi)\right]$

$\geq Var\left[\check{X} - G(\xi^*)\right] = E\left[\{\check{X} - x^* - G(\xi^*)\}^2\right]$, wie in a) gezeigt wurde.

c) Sei umgekehrt (x*,ξ*) Lösung von (9.25)*, dann erfüllt (x*,ξ*) wieder (9.47) und man hat nach a) : $Var\left[\check{X} - G(\xi^*)\right] = E\left[\{\check{X} - x^* - G(\xi^*)\}^2\right] \leq E\left[\{\check{X} - x - G(\xi)\}^2\right] = Var\left[\check{X} - G(\xi)\right]$

bei Wahl von $x = E\left[\check{X} - G(\xi)\right]$ für alle $\xi \in \Xi$. $[]$

Die Optimierungsaufgabe (9.25)* in (x,ξ) wird in 9.48 also entkoppelt in eine Optimierungsaufgabe für ξ und eine Nebenbedingung für x.

9.49 Bemerkung. Ist $\xi^\rho = (\xi^1_\rho,...,\xi^d_\rho)$ die Lösung der Optimierungsaufgabe (9.2) zu ρ>0 und definiert man $\pi^k_\rho := \xi^k_\rho \cdot S^k_0/x$, so ist der Portfoliovektor π^ρ Lösung der Optimierungsaufgabe:

(9.50) $\quad$ minimiere $Var\left[R^\pi\right]$ über alle $\pi \in \mathbb{R}^d$

$\quad$ unter der Nebenbedingung $E\left[R^\pi\right] = \rho$ mit R^π wie in (9.5).

Dann ist die Risiko–Rendite–Kombination $(Var\left[R^{\pi^\rho}\right],\rho)$ offenbar *effizient* im folgenden Sinne:

Gilt für einen beliebigen Portfoliovektor π mit $E\left[R^\pi\right] = \rho$ die Beziehung: $Var\left[R^\pi\right] \leq Var\left[R^{\pi^\rho}\right]$,

so folgt bereits die Gleichheit anstelle von "≤". Trägt man die Punkte $(Var\left[R^{\pi_\rho}\right],\rho)$ für ρ>r auf, so entsteht die *Linie effizienter Portfolios*. $[]$

9.51 Bemerkung. Man kann leicht eine Beziehung zur Nutzenmaximierung herstellen. Ein Investor kann seine Präferenzen über eine *Nutzenfunktion* $U : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ formulieren. Für ihn stellt sich die Optimierungsaufgabe:

(9.52) maximiere $E\left[U(V_T^{\xi}(x))\right]$ über alle Pläne ξ.

Ist U konkav, so wird durch U eine *Risikoaversion* ausgedrückt. Nach der Jensenschen Ungleichung gilt dann nämlich: $E\left[U(V_T^{\xi}(x))\right] \le U(E\left[V_T^{\xi}(x)\right])$. Der Investor zieht also einen sicheren Wert $E\left[V_T^{\xi}(x)\right]$ einem unsicheren Wert $V_T^{\xi}(x)$ vor.

Wählt man nun $U(v) := -v^2 + 2b\cdot v$, so erhält man eine konkave Nutzenfunktion. Diese ist allerdings nicht monoton steigend. Dennoch wird sie für manche Anwendungen akzeptiert.

Wegen $U(V_T^{\xi}(x)) = -\{V_T^{\xi}(x) - b\}^2 + b^2 = -(1+r)^2\cdot\{x + G(\xi) - \frac{b}{1+r}\}^2 + b^2$ ist offenbar (9.52) äquivalent zu (9.15) mit $Z \equiv \frac{b}{1+r} - x$ und die Lösung ist nach 9.20: $\xi = (\frac{b}{1+r} - x)\,\beta$, wenn β ein wieder ein Anpassungsvektor ist. []

Gemäß 9.24 hat die varianz–optimale signierte Martingaldichte die Gestalt:

(9.53) $\tilde{L} = \nu\cdot\left[1 + G(-\beta)\right] = \frac{\nu}{1+r}\,V_T^{-\beta}(1)$ mit $\nu \ge 1$.

Diese Beziehung hat weitere Konsequenzen.

9.54 Korollar. Bezeichnet $\tilde{R} := (V_T^{-\beta}(1) - 1)/1$ die Portfoliorendite von $(1,-\beta)$, so gilt für $(x,\xi) \in \mathbb{R}\times\Xi$ und $R := (V_T^{\xi}(x) - x)/x$:

$$E\left[R\right] - r = (E\left[\tilde{R}\right] - r)\cdot \mathrm{Cov}(R,\tilde{R})/\mathrm{Var}\left[\tilde{R}\right].$$

Beweis. Es sei $\tilde{V} := V_T^{-\beta}(1)$ und $V := V_T^{\xi}(x)$. Dann gilt wegen 9.22, 9.23a:

$\mathrm{Cov}(V,\tilde{L}) = E\left[V\cdot\tilde{L}\right] - E\left[V\right]\cdot E\left[\tilde{L}\right] = E\left[(1+r)\cdot(x + G(\xi))\cdot\tilde{L}\right] - E\left[V\right] = (1+r)\cdot x - E\left[V\right]$

Somit erhält man: $E\left[V\right] - x = r\cdot x - \mathrm{Cov}(V,\tilde{L})$ und damit

$E\left[R\right] - r = \frac{1}{x}\cdot(E\left[V\right] - x) - r = -\frac{1}{x}\cdot\mathrm{Cov}(V,\tilde{L}) = -\frac{1}{x}\cdot\mathrm{Cov}(V - x,\tilde{L})$

$= -\mathrm{Cov}(R,\tilde{L}) = -\mathrm{Cov}(R,\nu\cdot G(-\beta)) = -\mathrm{Cov}(R,\frac{\nu}{1+r}\,\tilde{V})$

$= -\frac{\nu}{1+r}\cdot\mathrm{Cov}(R,(\tilde{V} - 1)). = -\frac{\nu}{1+r}\cdot\mathrm{Cov}(R,\tilde{R}),$

insbesondere mit $(x,\xi) = (1,-\beta)$:

$E\left[\tilde{R}\right] - r = -\frac{\nu}{1+r}\cdot\mathrm{Var}\left[\tilde{R}\right]$ und damit $E\left[R\right] - r = (E\left[\tilde{R}\right] - r)\cdot\mathrm{Cov}(R,\tilde{R})/\mathrm{Var}\left[\tilde{R}\right]$. []

9.55 Definition. In der **CAPM**–Theorie (**C**apitel **A**sset **P**ricing **M**odel) wird der Ausdruck $E\left[R\right] - r$ mit $R := (V_T^{\xi}(x) - x)/x$ wird **Risikoprämie** und der Quotient $\mathrm{Cov}(R,\tilde{R})/\mathrm{Var}\left[\tilde{R}\right]$ das **Beta** von (x,ξ) bzgl. $(1,-\beta)$ genannt. Wegen der Eigenschaft in 9.54 heißt $(1,-\beta)$ oder ein Vielfaches davon auch **Marktportfolio**.

§10 Lokale Risikominimierung bei unvollständigen Märkten.

Für ein Mehrperiodenmodell soll zunächst für $\check{X}$ eine Darstellung

(10.1) $\check{X}$ = Anfangskapital + diskontierter Gewinn unter einem Plan + Rest

gefunden werden, wobei der Rest bei der Absicherung ein Restrisiko beinhaltet. Für den Fall T=1 haben wir diese Aufgabe schon mit der Föllmer–Schweizer–Zerlegung 9.28 gelöst. Wir werden nun für den Mehrperiodenfall diese einstufige Zerlegung sukzessiv anwenden.

10.2 Definition. $\mu_t^k := E\left[\Delta\check{S}_{t+1}^k \,|\, H_t\right]$, $\mu_t = (\mu_t^1,...,\mu_t^d)$,
$\Delta M_t^k := \Delta\check{S}_t^k - \mu_{t-1}^k$, $M_t = (M_t^1,...,M_t^d)$, $M_0 = 0$.

Dabei ist $\{M_t^k\}$ nach Konstruktion ein Martingal. Ist Z eine Zva, so interessieren wir uns nun für Lösungen der folgenden Bestimmungsgleichungen in $\zeta_{t-1} = (\zeta_{t-1}^1,...,\zeta_{t-1}^d)$, die für den Fall t=1 mit (9.16) übereinstimmen:

(10.3) $E\left[\Delta\check{S}_t^j \cdot Z \,|\, H_{t-1}\right] = \sum_{k=1}^d \zeta_{t-1}^k \, E\left[\Delta\check{S}_t^j \cdot \Delta\check{S}_t^k \,|\, H_{t-1}\right]$, $\{\zeta_t\}$ adaptiert.

10.4 Definition. Im Falle Z≡1, schreiben wir $\zeta_t =: \lambda_t$; der adaptierte Prozeß $\{\lambda_t\}$ soll ein **lokaler Anpassungsprozeß** heißen.

10.5 Bemerkung. Ist ζ_{t-1} eine Lösung von (10.3), so schreiben wir $\zeta_{t-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_t := \Pi_t(Z)$. Setzt man weiter $\mathfrak{G}_t := \{\, \vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_t;\ \vartheta \in \mathbb{R}^d \,\}$, so ist $\Pi_t(Z) = \zeta_{t-1}^\top(\omega_{t-1}) \cdot \Delta\check{S}_t$ gerade die orthogonale Projektion von Z auf $\mathfrak{G}_t$ unter dem Skalarprodukt $<Z,Z'> := E\left[Z \cdot Z' \,|\, H_{t-1}=\omega_{t-1}\right]$.
Damit folgt wie in §9 die Existenz einer Lösung ζ_{t-1} von (10.3) und die Eindeutigkeit von $\zeta_{t-1}^\top(\omega_{t-1}) \cdot \Delta\check{S}_t$ auf $\{\omega;\, H_{t-1}(\omega) = \omega_{t-1}\}$. Nach 9.21 mit 4.2(3) gilt dann für Z ≡ 1 :

$$0 < E\left[1 - \lambda_{t-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_t \,|\, H_{t-1}\right] = 1 - \lambda_{t-1}^\top \cdot \mu_{t-1} = E\left[\{1 - \lambda_{t-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_t\}^2 \,|\, H_{t-1}\right] \le 1 \quad .[\,]$$

Es soll zunächst etwas stochastische Analysis im vorliegenden zeitdiskreten Rahmen erläutert und die *Girsanov-Transformation* aus Beispiel 4.18 im mehrdimensionalen Fall dargestellt werden. Wir betrachten die *Semimartingalzerlegung* von $\check{S}_t$. Es gilt:

(10.6) $\check{S}_t^k = S_0^k + M_t^k + A_{t-1}^k$ mit $A_{t-1}^k := \sum_{m=0}^{t-1} \mu_m^k$,

Dabei ist M_t^k der Martingalanteil und A_{t-1}^k der vorhersehbare Anteil. Wir suchen nun eine Martingaldichte Z_T, also die Dichte Z_T eines Martingalmaßes Q bzgl. P von der Gestalt

$$Z_T = \prod_{t=1}^T L_t,$$

dabei ist wie in §4 $\{L_t\}$ ein adaptierter Prozeß mit $E\left[L_t \,|\, H_{t-1}\right] = 1$, $E\left[\Delta\check{S}_t^j \cdot L_t \,|\, H_{t-1}\right] = 0$, $1 \le j \le d$.

Wir wollen nun eine spezielle Martingaldichte $\hat{Z}_T$ gewinnen und machen nun den Ansatz $\hat{L}_t = a_{t-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_t + \nu_{t-1}$ mit adaptierten Prozessen $\{a_t\}$ und $\{\nu_t\}$. Dies führt zu den Gleichungen:

(10.7) $E[a_{t-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_t + \nu_{t-1} | H_{t-1}] = 1,\ E[\Delta\check{S}_t^j \cdot (a_{t-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_t + \nu_{t-1}) | H_{t-1}] = 0$,

also: $a_{t-1}^\top \cdot \mu_{t-1} + \nu_{t-1} = 1, \quad \sum_{k=1}^d a_{t-1}^k E[\Delta\check{S}_t^j \cdot \Delta\check{S}_t^k | H_{t-1}] = E[-\nu_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t^j | H_{t-1}]$.

Ist $\{\lambda_t\}$ ein lokaler Anpassungsprozeß , so können wir also wählen:

$a_{t-1} = -\nu_{t-1} \cdot \lambda_{t-1}$ (vgl. 9.20). Nun ergibt sich ν_{t-1} aus $(-\lambda_{t-1}^\top \cdot \mu_{t-1} + 1) \cdot \nu_{t-1} = 1$ zu $\nu_{t-1} = 1/(1 - \lambda_{t-1}^\top \cdot \mu_{t-1})$; die Division ist nach 15.5 erlaubt. Somit erhalten wir

$\hat{L}_t = a_{t-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_t + \nu_{t-1} = (-\lambda_{t-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_t + 1) \cdot \nu_{t-1} = 1 - \nu_{t-1}\, \lambda_{t-1}^\top \cdot (\Delta\check{S}_t - \mu_{t-1})$, also:

(10.8) $\hat{L}_t := 1 - \nu_{t-1}\, \lambda_{t-1}^\top \cdot \Delta M_t = \nu_{t-1} \cdot (1 - \lambda_{t-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_t)$ mit $\nu_{t-1} := 1/(1 - \lambda_{t-1}^\top \cdot \mu_{t-1})$.

Dieses Ergebnis steht in Einklang mit 9.23. Denn die Gleichungen (10.7) besagen gerade, daß L_t eine signierte Martingaldichte ist im Sinne von 9.22, jetzt mit $P[\,\cdot\,|H_t{=}\omega_{t-1}]$ und $\Delta\check{S}_t$ anstelle von P und $\Delta\check{S}_1$. Von Lemma 9.23 wissen wir, daß es nur eine signierte Martingaldichte gibt der Form $L_t = a_{t-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_t + \nu_{t-1}$; denn $a_{t-1}^\top$ und ν_{t-1} können unter $P[\,\cdot\,|H_t{=}\omega_{t-1}]$ als konstant angesehen werden. Diese eine (varianz–optimale) hat nach 9.24 die obige Gestalt. Wir wären zum gleichen Ergebnis gekommen über den Ansatz $\hat{L}_t = 1 - \alpha_{t-1}^\top \cdot \Delta M_t$.

Wir definieren dazu nun den

(10.9a) **Girsanov–Dichteprozeß** $\hat{Z}_0 = 1,\ \hat{Z}_t = \prod_{m=1}^t \hat{L}_m$, $d\hat{P} := \hat{Z}_T\, dP$.

Dann gilt $\Delta\hat{Z}_t = -\nu_{t-1} \cdot \lambda_{t-1}^\top \cdot \Delta M_t \cdot \hat{Z}_{t-1}$, d.h.

(10.9b) $\hat{Z}_t := 1 - \sum_{m=1}^t (\nu_{m-1} \cdot Z_{m-1}\, \lambda_{m-1})^\top \cdot \Delta M_m$.

10.10 Lemma. Für den durch (10.8) definierten adaptierten Prozesse $\{\hat{L}_t\}$ gilt:

$E[\hat{L}_t | H_{t-1}] = 1,\ \ E[\Delta\check{S}_t^j \cdot \hat{L}_t | H_{t-1}] = 0,\ 1 \le j \le d,$ also

$\hat{P} \in \mathbb{P}^*$ mit $d\hat{P} := \hat{Z}_T\, dP$, falls $\hat{Z}_T > 0$.

Da $\Delta\hat{Z}_t$ "proportional" zu $\hat{Z}_{t-1}$ ist, heißt $\{\hat{Z}_t\}$ **exponentientelles Martingal** $\mathcal{E}(-\nu\ \lambda.M)$ [**von Doléans–Dade**]. Allein aus der Darstellung (10.9b) von $\hat{Z}_t - 1$ als stochastisches Integral $-\nu\, \hat{Z}\ \lambda.M$ mit dem Martingal $\{M_t\}$ als Integrator und dem vorhersagbaren Prozeß $Y_t = -\nu_{t-1}\, \hat{Z}_{t-1}\, \lambda_{t-1}$ als Integrand, ergibt sich, daß $\hat{Z}_t$ wieder ein Martingal ist (vgl. auch 3.11).

Der Maßwechsel von P zu dem Maß $\hat{P}$ mit $d\hat{P} = Z_T\, dP$ wird auch als **verallgemeinerte Girsanov–Transformation**. Dabei kann i.a. $\hat{Z}_T$ auch negative Werte annehmen, $\hat{P}$ ist also i.a.

lediglich ein signiertes Maß. Dann interessiert die Voraussetzung: $\hat{L}_t > 0$ für t=1,...,T. Diese wurde bereits in 9.36 für d=1 diskutiert; diese Überlegungen übertragen sich auf den vorliegenden Fall. Ist $\{\check{S}_t\}$ bereits ein P–Martingal, gilt also $\check{S}_t = M_t$, so ist in Hinblick auf 9.21 $\lambda_t = 0$ wälbar und somit auch $\hat{P} = P$.

Wir definieren mit absteigender Induktion

(10.11) $X_T = \check{X}$; ist X_t definiert, dann sei $\hat{\xi}_{t-1}$ Lösung von

$$E[\Delta M_t^j \cdot X_t \,|\, H_{t-1}] = \sum_{k=1}^d \hat{\xi}_{t-1}^k \, E[\Delta M_t^j \cdot \Delta M_t^k \,|\, H_{t-1}], \text{ d.h.}$$

$$\mathrm{Cov}(\Delta \check{S}_t^j, X_t \,|\, H_{t-1}) = \sum_{k=1}^d \hat{\xi}_{t-1}^k \; \mathrm{Cov}(\Delta \check{S}_t^j, \Delta \check{S}_t^k \,|\, H_{t-1}),$$

$$X_{t-1} := E[X_t \,|\, H_{t-1}] - \hat{\xi}_{t-1}^\top \cdot \mu_{t-1} \quad \text{für } 1 \le t \le T.$$

$$\Delta N_t := X_t - E[X_t \,|\, H_{t-1}] - \hat{\xi}_{t-1}^\top \cdot \Delta M_t, \; N_0 := 0.$$

Es sei daran erinnert, daß $E[... \,|\, H_0] = E[...]$ gilt.

10.12 Proposition. Für die durch (10.11) definierten Prozesse $\{\hat{\xi}_t\}$, $\{X_t\}$ und $\{N_t\}$ gilt:

(a) $\{\hat{\xi}_t\}$ existiert als ein adaptierter Prozeß;

(b) $\{N_t\}$ ist ein Martingal, also gilt $E[\Delta N_t \,|\, H_{t-1}] = 0$;

(c) $E[\Delta M_t^k \cdot \Delta N_t \,|\, H_{t-1}] = 0$, $1 \le t \le T$;

(d) $X_{t-1} = E[\hat{L}_t \cdot X_t \,|\, H_{t-1}]$ und $\{X_t\}$ ist ein adaptierter Prozeß mit

(10.13) $\Delta X_t = \hat{\xi}_{t-1}^\top \cdot \Delta \check{S}_t + \Delta N_t$;

(e) $\hat{\xi}_{t-1}$ ist Lösung von $E[\Delta \check{S}_t^j \cdot \Delta X_t \,|\, H_{t-1}] = \sum_{k=1}^d \hat{\xi}_{t-1}^k \, E[\Delta \check{S}_t^j \cdot \Delta \check{S}_t^k \,|\, H_{t-1}]$.

Beweis. a) Die erste Aussage folgt wie in 10.5: Schreibt man $\mathfrak{G}_t^* := \{ \vartheta^\top \cdot \Delta M_t ; \vartheta \in \mathbb{R}^d \}$, so ist $\Pi_t^*(X_t) = \hat{\xi}_{t-1}^\top(\omega_{t-1}) \cdot \Delta M_t$ gerade die Projektion von X_t auf $\mathfrak{G}_t^*$ unter dem Skalarprodukt $\langle Z, Z' \rangle := E[Z \cdot Z' \,|\, H_{t-1}=\omega_{t-1}]$. Damit folgt wie in §9 die Existenz einer Lösung $\hat{\xi}_{t-1}$ in (10.11) und sogar die Eindeutigkeit von $\hat{\xi}_{t-1}^\top(\omega_{t-1}) \cdot \Delta M_t$ auf $\{\omega; H_{t-1}(\omega) = \omega_{t-1}\}$.

b) Die zweite Aussage folgt aus der Konstruktion und der Martingaleigenschaft von $\{M_t\}$.

c) Wir haben: $E[\Delta M_t^j \cdot \Delta N_t \,|\, H_{t-1}] = E[\Delta \check{S}_t^j \cdot \Delta N_t \,|\, H_{t-1}]$

$= E[\Delta M_t^j \cdot (X_t - E[X_t \,|\, H_{t-1}] - \hat{\xi}_{t-1}^\top \cdot \Delta M_t) \,|\, H_{t-1}]$

$= E[\Delta M_t^j \cdot (X_t - \hat{\xi}_{t-1}^\top \cdot \Delta M_t) \,|\, H_{t-1}] = 0$ nach Konstruktion von $\hat{\xi}_{t-1}$.

d) Es gilt (die lokale Kunita–Watanabe–Zerlegung): $X_t = E[X_t \,|\, H_{t-1}] + \hat{\xi}_{t-1}^\top \cdot \Delta M_t + \Delta N_t$ und somit

$E[\hat{L}_t \cdot X_t | H_{t-1}]$

$= E[X_t | H_{t-1}] \cdot E[\hat{L}_t | H_{t-1}] + E[\hat{L}_t \hat{\xi}^\top_{t-1} \cdot (\Delta\check{S}_t - \mu_{t-1}) | H_{t-1}] + E[\hat{L}_t \cdot \Delta N_t | H_{t-1}]$

$= E[X_t | H_{t-1}] - \hat{\xi}^\top_{t-1} \cdot \mu_{t-1} + E[(1 - \nu_{t-1}\, \lambda^\top_{t-1} \cdot \Delta M_t) \cdot \Delta N_t | H_{t-1}]$

$= E[X_t | H_{t-1}] - \hat{\xi}^\top_{t-1} \cdot \mu_{t-1} + E[\Delta N_t | H_{t-1}] - \nu_{t-1}\, E[\lambda^\top_{t-1} \cdot \Delta M_t \cdot \Delta N_t | H_{t-1}]$

$= E[X_t | H_{t-1}] - \hat{\xi}^\top_{t-1} \cdot \mu_{t-1} = X_{t-1}$. Dabei wurde (10.8) und (10.10) benutzt.

Ferner gilt: $\Delta X_t = X_t - E[X_t | H_{t-1}] + E[X_t | H_{t-1}] - X_{t-1} = \hat{\xi}^\top_{t-1} \cdot \Delta M_t + \Delta N_t + \hat{\xi}^\top_{t-1} \cdot \mu_{t-1}$.

e) Wir haben $E[\Delta\check{S}^j_t \cdot X_t | H_{t-1}] - \mu^j_{t-1} \cdot E[X_t | H_{t-1}] = E[\Delta M^j_t \cdot X_t | H_{t-1}]$

$= \sum^d_{k=1} \hat{\xi}^k_{t-1}\, E[\Delta M^j_t \cdot \Delta\check{S}^k_t | H_{t-1}]$

$= \sum^d_{k=1} \hat{\xi}^k_{t-1}\, E[\Delta\check{S}^j_t \cdot \Delta\check{S}^k_t | H_{t-1}] - \mu^j_{t-1} \cdot \sum^d_{k=1} \hat{\xi}^k_{t-1}\, \mu^k_{t-1}$.

Daraus folgt mit $X_{t-1} := E[X_t | H_{t-1}] - \hat{\xi}^\top_{t-1} \cdot \mu_{t-1}$

$E[\Delta\check{S}^j_t \cdot X_t | H_{t-1}] - \mu^j_{t-1} \cdot X_{t-1} = E[\Delta\check{S}^j_t \cdot \Delta X_t | H_{t-1}] = \sum^d_{k=1} \hat{\xi}^k_{t-1}\, E[\Delta\check{S}^j_t \cdot \Delta\check{S}^k_t | H_{t-1}]$. []

10.14 Bemerkung. Die Definition von $\hat{\xi}$ in (10.11) entspricht der Zugang über die Kunita–Watanabe–Zerlegung in §9 (vgl. 9.34), während die Beziehung in 10.12e analog zum Zugang über die (einstufige) Föllmer–Schweizer–Zerlegung in §9 ist (vgl. 9.30 (3)), wenn man X_{t-1} über die Identität $X_{t-1} = E[\hat{L}_t \cdot X_t | H_{t-1}]$ in 10.12 definiert. Beide Zugänge sind äquivalent. Allgemein hat man: Ist Z eine beliebige Zva, dann gilt: Ist ξ Lösung von (10.14a) so auch von (10.14 b) und umgekehrt. Dabei sei:

(10.14a) $E[\Delta M^j_t \cdot Z | H_{t-1}] = \sum^d_{k=1} \hat{\xi}^k_{t-1}\, E[\Delta M^j_t \cdot \Delta M^k_t | H_{t-1}]$, $1 \le j \le d$,

$Z_- := E[Z | H_{t-1}] - \hat{\xi}^\top_{t-1} \cdot \mu_{t-1}$.

(10.14b) $E[\Delta\check{S}^j_t \cdot \Delta Z | H_{t-1}] = \sum^d_{k=1} \hat{\xi}^k_{t-1}\, E[\Delta\check{S}^j_t \cdot \Delta\check{S}^k_t | H_{t-1}]$, $1 \le j \le d$, mit

$\Delta Z := Z - Z_- =: Z - E[\hat{L}_t \cdot Z | H_{t-1}]$.

Aus (10.14a) folgt (10.14b) wie oben. Gilt nun (10.14b), so kann man (10.14a) wie in §9 beweisen. Ein etwas anderer Beweis verläuft so: Setze $\Delta N'_t := \Delta Z - \hat{\xi}^\top \cdot \Delta\check{S}_t$.

(1) $E[\Delta\check{S}^j_t \cdot \Delta N'_t | H_{t-1}] = 0$, $1 \le j \le d$.

Dies ist eine Umformulierung von (10.14b).

(2) $E[\hat{L}_t \cdot \Delta N'_t | H_{t-1}] = 0$.

Dies folgt aus $E[\hat{L}_t \cdot \Delta N'_t | H_{t-1}] = E[\hat{L}_t \cdot (\Delta Z - \hat{\xi}^\top \cdot \Delta\check{S}_t) | H_{t-1}] = -E[\hat{L}_t \cdot \hat{\xi}^\top \cdot \Delta\check{S}_t | H_{t-1}] = 0$.

(3) $E[\Delta N'_t | H_{t-1}] = 0$.

Dies ergibt sich aus: $0 = E[\hat{L}_t \cdot \Delta N'_t \,|\, H_{t-1}] = \nu_{t-1} \cdot E[(1 - \lambda^{\top}_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t) \cdot \Delta N'_t \,|\, H_{t-1}]$

$= \nu_{t-1} \cdot E[\Delta N'_t \,|\, H_{t-1}] - \nu_{t-1}\, E[\, \lambda^{\top}_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t \cdot \Delta N'_t \,|\, H_{t-1}]$
$= \nu_{t-1} \cdot E[\Delta N'_t \,|\, H_{t-1}] \;-\; 0$ wegen (1).

(4) $\quad E[Z \,|\, H_{t-1}] - Z_{-} - \hat{\xi}^{\top}_{t-1} \cdot \mu_{t-1} = 0.$

Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus (3). Nun sieht man leicht, daß (10.14b) äquivalent ist zu:

$E[\Delta M^j_t \cdot Z \,|\, H_{t-1}] + \mu^j_{t-1} \cdot (E[Z \,|\, H_{t-1}] - Z_{-} - \hat{\xi}^{\top} \cdot \mu_{t-1}) = \sum_{k=1}^{d} \hat{\xi}^k_{t-1}\, E[\Delta M^j_t \cdot \Delta M^k_t \,|\, H_{t-1}]$.
Mit (4) folgt jetzt (10.14a). []

Aus (10.13) folgt unmittelbar:

10.15 Föllmer–Schweizer–Zerlegung. $\check{X} = X_0 + G_T(\hat{\xi}) + N_T, \quad X_t = X_0 + G_t(\hat{\xi}) + N_t;$

dabei ist das Martingal $\{N_t\}$ orthogonal zu den Martingalen $\{M^k_t\}$ im Sinne von

$$E[\Delta M^k_t \cdot \Delta N_t \,|\, H_{t-1}] = 0\,, \quad 1 \le k \le d,\ 1 \le t \le T,\ .$$

Die Rolle des Restes in (10.1) wird also von N_T übernommen.

10.16 Korollar. Ist X erreichbar, existiert also $(x,\xi) \in \mathbb{R} \times \Xi$ mit $\check{X} = x + G_T(\xi)$, so gilt für $\{X_t\}$ wie in (10.11): $X_t = x + G_t(\xi)$, insbesondere $X_0 = x$, und es ist $\hat{\xi} = \xi$ wählbar.

Beweis. Offenbar gilt $X_t = x + G_t(\xi)$ für t=T nach Voraussetzung. Gelte nun diese Beziehung für ein beliebiges t. Dann hat man:

$E[\Delta M^j_t \cdot X_t \,|\, H_{t-1}] = E[\Delta M^j_t \cdot (x + G_{t-1}(\xi) + \xi^{\top}_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t) \,|\, H_{t-1}] = E[\Delta M^j_t\, \xi^{\top}_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t \,|\, H_{t-1}]$
$= \sum_{k=1}^{d} \xi^k_{t-1}\, E[\Delta M^j_t \cdot \Delta\check{S}^k_t \,|\, H_{t-1}] = \sum_{k=1}^{d} \xi^k_{t-1}\, E[\Delta M^j_t \cdot \Delta M^k_t \,|\, H_{t-1}]$,
also ist $\hat{\xi}_{t-1} = \xi_{t-1}$ wählbar (vgl. (10.14a)). Es folgt weiter nach Definition von X_{t-1} in (10.11):
$X_{t-1} = E[x + G_t(\xi) \,|\, H_{t-1}] - \xi^{\top}_{t-1} \cdot \mu_{t-1} = x + G_{t-1}(\xi) + \xi^{\top}_{t-1} \cdot \mu_{t-1} - \xi^{\top}_{t-1} \cdot \mu_{t-1}$
$= x + G_{t-1}(\xi)$. Damit ist die Behauptung mit Rückwärtsinduktion gezeigt. []

Nun soll ein Zusammenhang zwischen der Girsanov–Transformation und der Föllmer–Schweizer –Zerlegung hergestellt werden. Auch für den Fall, daß nicht notwendig $\hat{Z}_T > 0$ gilt, setzen wir :

(10.17) $\quad \hat{P}$ sei das Maß mit

$$\hat{P}[A] := \sum_{\omega \in A} P(\omega)\, \hat{Z}_T(\omega) = \sum_{\omega \in A} \prod_{t=1}^{T} P(\omega)\, \hat{L}_t\,, \ A \subset \Omega,$$
$$\hat{E}[Y] := \sum_{\omega \in \Omega} \hat{P}(\omega)\, Y(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)\, Y(\omega)\, \hat{Z}_T(\omega).$$

Nach 10.10 wissen wir, daß im Falle $\hat{Z}_T > 0$ sogar $\hat{P} \in \mathbb{P}^*$ gilt.

10.18 Satz. (a) Für $\{X_t\}$ wie in (10.11) gilt: $X_0 = \hat{E}[\check{X}]$**,** und allgemein:

$X_t = \hat{E}[\check{X}|H_t] := E[\check{X}\cdot \boldsymbol{\Pi}_{m=t+1}^{T} \hat{L}_m | H_t]$.

(b) $\hat{E}[\Delta\check{S}_t^k | H_{t-1}] := E[\Delta\check{S}_t^k \cdot \boldsymbol{\Pi}_{m=t}^{T} \hat{L}_m | H_{t-1}] = E[\Delta\check{S}_t^k \cdot \hat{L}_t | H_{t-1}] = 0$, $1 \le k \le d$.

Aufgrund der Bayes–Formel 4.17 wissen wir, daß die obige Definition von $\hat{E}[Y|H_t]$ im Falle $Z_T > 0$, also $\hat{P} \in \mathbb{P}^*$, mit der üblichen Definition übereinstimmt. Wegen 10.18b nennt man $\hat{P}$ auch *signiertes Martingalmaß* und Z_T *signierte Martingaldichte*.

Beweis: a) Wir wissen nach (10.12)(d): $X_{t-1} = E[\hat{L}_t \cdot X_t | H_{t-1}]$. Damit gilt die Behauptung für t=T–1. Ist sie für beliebiges t richtig, so folgt:

$X_{t-1} = E[\hat{L}_t \cdot X_t | H_{t-1}] = E[\hat{L}_t \cdot E[\boldsymbol{\Pi}_{m=t+1}^{T} \hat{L}_m \cdot \check{X} | H_t] | H_{t-1}] = E[\hat{L}_t \cdot \boldsymbol{\Pi}_{m=t+1}^{T} \hat{L}_m \cdot \check{X} | H_{t-1}]$.

b) Ebenso erhält man mit 10.10

$E[\boldsymbol{\Pi}_{m=t}^{T} \hat{L}_m \cdot \Delta\check{S}_t^k | H_{t-1}] = E[\hat{L}_t \cdot \Delta\check{S}_t^k E[\boldsymbol{\Pi}_{m=t+1}^{T} \hat{L}_m | H_t] | H_{t-1}] \; E[\hat{L}_t \cdot \Delta\check{S}_t^k | H_{t-1}] = 0$. $[]$

Für den allgemeinen Fall T≥1 ist zunächst nicht klar, wie die Überlegungen aus §9, insbesondere zum Approximationspreis zu verallgemeinern sind. Wir betrachten dazu beliebige Portfolio–und Konsumpläne (ξ,c) mit einem (eventuell auch negativ–wertigen) Konsumprozeß $\{c_1,...,c_T\}$ und einer Anfangsinvestition x. Wegen 1.17, also:

$$\check{V}_0^{\xi,c}(x) = V_0^{\xi,c}(x) = x, \;\; \check{V}_t^{\xi,c}(x) = \check{V}_{t-1}^{\xi,c}(x) + \xi_{t-1}^{\top}\cdot\Delta\check{S}_t - \check{c}_t \;\text{ mit }\; \check{c}_t := c_t/B_t\,,$$

können wir die Vorgabe von x und (ξ,c) auch durch die Festlegung von $x = \check{V}_0$, ξ, und $\check{V}_t = \check{V}_t^{\xi,c}(x)$ ersetzen. Wir sagen dann: " (x,ξ,c) wird durch ($\check{V}$,ξ) beschrieben " und schreiben:

$(x,\xi,c) \hat{=} (\check{V},\xi)$,

wobei $\check{V} = \{\check{V}_t, 0\le t\le T\}$ ein vorgegebener adaptierter Prozeß ist, der die Anfangsinvestition und den Konsum festlegt gemäß

(10.19) $\qquad x = \check{V}_0 \;\; \check{c}_t = \check{V}_{t-1} + \xi_{t-1}^{\top}\cdot\Delta\check{S}_t - \check{V}_t$.

Der Zahlungsanspruch X muß in T erfüllt werden; somit haben wir $\check{V}_T = \check{V}_T^* := \check{X}$.

Wir versetzen uns nun zunächst in die Situation t = T–1.

Es ist nur noch eine Investition gemäß ξ_{T-1} vorzunehmen, und das Sparbuch kann (durch den Konsum c_{T-1}) so aufgefüllt werden, daß unser Portfolio einen beliebigen diskontierten Wert $\check{V}_{T-1}$ hat. Damit ergibt sich als diskontierter Konsum in T gerade:

$\check{c}_T = \check{V}_{T-1} + \xi_{T-1}^{\top}\cdot\Delta\check{S}_T - \check{V}_T = \check{V}_{T-1} + \xi_{T-1}^{\top}\cdot\Delta\check{S}_T - \check{X}$.

Ist $\check{c}_T < 0$, so stellt $|\check{c}_T|$ Kosten dar. Eine genaue Dublizierung von X mit $c_T = 0$ ist i.a. nicht möglich. Als eine möglichst gute Absicherung kann nun die Wahl von $\check{V}_{T-1}^*$, ξ_{T-1}^* angesehen

werden, bei der c_T klein ist im Sinne von

$$E\left[\{\check{V}^*_{T-1} + \xi^{*\top}_{T-1}\cdot\Delta\check{S}_T - \check{X}\}^2 \,|\, H_{T-1}=\omega_{T-1}\right]$$
$$= \min_{v\in\mathbb{R},\vartheta\in\mathbb{R}^d} E\left[\{v + \vartheta^\top\cdot\Delta\check{S}_T - \check{X}\}^2 \,|\, H_{T-1}=\omega_{T-1}\right].$$

Damit sind wir bei gegebenem ω_{T-1} in der gleichen Situation wie in (9.25)* bei der Bestimmung des Approximationspreises.

Aus $\check{X} = X_0 + G_T(\hat{\xi}) + N_T$ und $X_t = X_0 + G_t(\hat{\xi}) + N_t$ erhalten wir

$$\check{X} = X_0 + G_{T-1}(\hat{\xi}) + N_{T-1} + \hat{\xi}^\top_{T-1}\cdot\Delta\check{S}_T + \Delta N_T = X_{T-1} + \hat{\xi}^\top_{T-1}\cdot\Delta\check{S}_T + \Delta N_T\,.$$

Somit ergibt sich unter der Benutzung der Martingaleigenschaft von $\{M_t\}$ und $\{N_t\}$ sowie der Orthogonalität von $\{M_t\}$ und $\{N_t\}$ gemäß 10.12c:

$$E\left[\{v + \vartheta^\top\cdot\Delta\check{S}_T - \check{X}\}^2 \,|\, H_{T-1}=\omega_{T-1}\right]$$
$$= E\left[\{v - X_{T-1} + (\vartheta - \hat{\xi}_{T-1})^\top\cdot\Delta\check{S}_T - \Delta N_T\}^2 \,|\, H_{T-1}=\omega_{T-1}\right]$$
$$= E\left[\{v - X_{T-1} + (\vartheta - \hat{\xi}_{T-1})^\top\cdot\mu_{T-1} + (\vartheta - \hat{\xi}_{T-1})^\top\cdot\Delta M_T - \Delta N_T\}^2 \,|\, H_{T-1}=\omega_{T-1}\right]$$
$$= E\left[\{v - X_{T-1} + (\vartheta - \hat{\xi}_{T-1})^\top\cdot\mu_{T-1} + (\vartheta - \hat{\xi}_{T-1})^\top\cdot\Delta M_T\}^2 \,|\, H_{T-1}=\omega_{T-1}\right] +$$
$$E\left[\{\Delta N_T\}^2 \,|\, H_{T-1}=\omega_{T-1}\right]$$
$$= \{v - X_{T-1} + (\vartheta - \hat{\xi}_{T-1})^\top\cdot\mu_{T-1}\}^2 + E\left[\{(\vartheta - \hat{\xi}_{T-1})^\top\cdot\Delta M_T\}^2 \,|\, H_{T-1}=\omega_{T-1}\right] +$$
$$E\left[\{\Delta N_T\}^2 \,|\, H_{T-1}=\omega_{T-1}\right] \quad \geq \quad E\left[\{\Delta N_T\}^2 \,|\, H_{T-1}=\omega_{T-1}\right]$$

wobei Gleichheit für $v = X_{T-1}(\omega_{T-1}) =: \check{V}^*_{T-1}(\omega_{T-1})$, $\vartheta = \hat{\xi}_{T-1}(\omega_{T-1}) =: \xi^*_{T-1}(\omega_{T-1})$ gilt.

Zur Zeit T–2 sind $\check{V}_{T-2}$, ξ_{T-2}, $\check{V}_{T-1}$, ξ_{T-1} zu wählen. Der diskontierte Konsum in T ist wieder $\check{c}_T = \check{V}_{T-1} + \xi^\top_{T-1}\cdot\Delta\check{S}_T - \check{X}$, dazu kommt der Konsum in T–1:

$$\check{c}_{T-1} = \check{V}_{T-2} + \xi^\top_{T-2}\cdot\Delta\check{S}_{T-1} - \check{V}_{T-1}.$$

Als Optimierungsaufgabe bietet sich also zunächst die folgende an:

$$E\left[\{\check{c}_{T-1} + \check{c}_T\}^2 \,|\, H_{T-2}=\omega_{T-2}\right]$$
$$= E\left[\{\check{V}_{T-2} + \xi^\top_{T-2}\cdot\Delta\check{S}_{T-1} + \xi^\top_{T-1}\cdot\Delta\check{S}_T - \check{X}\}^2 \,|\, H_{T-2}=\omega_{T-2}\right] = \min\,!$$

Man kann aber davon ausgehen, daß man sich z.Zt. T–1 wie oben entscheidet, also $\xi_{T-1} = \xi^*_{T-1}$ wählt; denn dann braucht keine Rücksicht mehr auf die Approximation in t=T–2 genommen zu werden. Also sollte man die folgende Minimierungsaufgabe lösen für t=T–2:

(10.20) $$\min_{v,\vartheta} E\left[\{v + \vartheta^\top\cdot\Delta\check{S}_{t+1} + \xi^\top_{t+1}\cdot\Delta\check{S}_{t+2} + \ldots + \xi^\top_{T-1}\cdot\Delta\check{S}_T - \check{X}\}^2 \,|\, H_t=\omega_t\right]$$
$$=: \min_{v,\vartheta} E\left[C(t,v,\vartheta)^2 \,|\, H_t=\omega_t\right].$$

Nun haben wir nach 10.15 $\check{X} - X_t = G_T(\hat{\xi}) - G_t(\hat{\xi}) + (N_T - N_t)$, also:

$$C(t,v,\vartheta) = v - X_t - \check{X} + (\vartheta - \hat{\xi}_t)^\top \cdot \Delta\check{S}_{t+1} + X_t + G_T(\hat{\xi}) - G_t(\hat{\xi})$$
$$= v - X_t + (\vartheta - \hat{\xi}_t)^\top \cdot \Delta\check{S}_{t+1} - (N_T - N_t)$$
$$= v - X_t + (\vartheta - \hat{\xi}_t)^\top \cdot \mu_t + (\vartheta - \hat{\xi}_t)^\top \cdot \Delta M_{t+1} - (N_T - N_t).$$

Aus der Martingaleigenschaft von $\{N_t\}$ und der Orthogonalität von $\{N_t\}$ und $\{M_t\}$ gilt:
$E[N_T - N_t \,|\, H_t=\omega_t] = 0$ sowie

$E[\Delta M_{t+1} \cdot (N_T - N_t) \,|\, H_t=\omega_t] = E[\Delta M_{t+1} \cdot (N_T - N_{t+1}) \,|\, H_t=\omega_t] + E[\Delta M_{t+1} \cdot \Delta N_{t+1} \,|\, H_t=\omega_t]$
$= E[\Delta M_{t+1} \cdot E[(N_T - N_{t+1}) \,|\, H_{t+1}] \,|\, H_t=\omega_t] + 0 = 0 + 0 = 0$, also:

(10.21) $E[N_T - N_t \,|\, H_t] = 0, \quad E[\Delta M_{t+1} \cdot (N_T - N_t) \,|\, H_t] = 0.$

Somit erhalten wir

$E[C(t,v,\vartheta)^2 \,|\, H_t=\omega_t]$
$= E[\{v - X_t + (\vartheta - \hat{\xi}_t)^\top \cdot \mu_t + (\vartheta - \hat{\xi}_t)^\top \cdot \Delta M_{t+1}\}^2 \,|\, H_t=\omega_t] + E[\{N_T - N_t\}^2 \,|\, H_t=\omega_t]$.
Ferner ergibt sich aus der Martingaleigenschaft von $\{M_t\}$:

$E[C(t,v,\vartheta)^2 \,|\, H_t=\omega_t] = E[\{v - X_t + (\vartheta - \hat{\xi}_t)^\top \cdot \mu_t\}^2 \,|\, H_t=\omega_t] + E[\{(\vartheta - \hat{\xi}_t)^\top \cdot \Delta M_{t+1}\}^2 \,|\, H_t=\omega_t]$
$+ E[\{N_T - N_t\}^2 \,|\, H_t=\omega_t] \;\geq\; E[\{N_T - N_t\}^2 \,|\, H_t=\omega_t]$;

dabei wird die untere Schranke $E[\{N_T - N_t\}^2 \,|\, H_t=\omega_t]$ angenommen für

$v = X_t(\omega_t) =: \check{V}_t^*(\omega_t)$, $\vartheta = \hat{\xi}_t(\omega_t) =: \xi_t^*(\omega_t)$.

Der so durch $(\check{V}_t^*, \xi_t^*) = (X_t, \hat{\xi}_t)$ beschriebene Plan (ξ^*, c^*) mit einer Anfangsinvestition x^* ist nicht mehr selbstfinanzierend; man wird in jedem Zeitpunkt t folgenden diskontierten Betrag konsumieren bzw. zuschießen:

(10.22a) $\check{c}_t = X_{t-1} + \hat{\xi}_{t-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_t - X_t = -\Delta N_t.$

Der diskontierte Gesamtkonsum

(10.22b) $\sum_{t=1}^{T} \check{c}_t = X_0 + G_T(\hat{\xi}) - \check{X} = -N_T$

ist dabei aufgelöst worden in einen diskontierten Konsumstrom $\{\check{c}_t\}$ (bzw. diskontierten Kostenstrom $\{-\Delta N_t\}$). So können auf Grund dieses Konsum/Kosten–Stroms die Verluste nicht still auflaufen. Bei der Absicherung ist man in einer sogenannten "marked to market" – Position. Der Plan ist aber *im Mittel selbstfinanzierend* in dem Sinne, daß gilt

(10.23) $E[\check{c}_t \,|\, H_{t-1}] = -E[\Delta N_t \,|\, H_{t-1}] = 0$,
dies ist die Martingaleigenschaft von $\{\Delta N_t\}$.

10.24 Bemerkung. Man kommt zu der gleichen Lösung, wenn z.Zt. t anstelle von (10.20) die Aufgabe löst:

$$\min_{v,\vartheta} E\left[\{v + \vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_{t+1} - \check{V}_{t+1}\}^2 \,|\, H_t=\omega_t\right] =: \min_{v,\vartheta} E\left[c^2_{t+1}(v,\vartheta) \,|\, H_t=\omega_t\right].$$

Man betrachtet also nur den Konsum c_{t+1} z.Zt. t+1. Wir wollen jetzt wieder davon ausgehen, daß man sich in den folgenden Perioden gemäß ξ^*_m, $\check{V}^*_m$, m>t, entscheidet, also insbesondere $\check{V}_{t+1} = \check{V}^*_{t+1} = X_{t+1}$ gilt. Dann erhält man wie oben aus (10.13)

$$c_{t+1}(v,\vartheta) = v - X_t + (\vartheta - \hat{\xi}_t)^\top \cdot \mu_t + (\vartheta - \hat{\xi}_t)^\top \cdot \Delta M_{t+1} - \Delta N_{t+1},$$

also lediglich ΔN_{t+1} anstelle von $N_T - N_t$. Dies führt aber offenbar zur gleichen Lösung

$$v^* = X_t(\omega_t) =: \check{V}^*_t(\omega_t),\ \vartheta^* = \hat{\xi}_t(\omega_t) =: \xi^*_t(\omega_t).$$

Rekursiv ergibt sich also bei diesem Verfahren: $\xi^*_t(\omega_t) = \hat{\xi}_t(\omega_t)$, $\check{V}^*_t(\omega_t) = X_t(\omega_t)$ $\forall\ 0 \le t < T$. $[]$

10.25 Definition. Wir setzen: $G_{t,T}(\xi) := \xi_t^\top \cdot \Delta\check{S}_{t+1} + ... + \xi_{T-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_T = G_T(\xi) - G_t(\xi)$

für $\xi \in \Xi$. Für $(x,\xi,c) \hat{=} (\check{V},\xi)$ heißt $\{R_t(x,\xi,c)\ ,\ 0 \le t < T\}$ mit

$$R_t(x,\xi,c) := E\left[\{\check{c}_{t+1} + ... + \check{c}_T\}^2 \,|\, H_t\right] = E\left[\{\check{V}_t + G_{t,T}(\xi) - \check{V}_T\}^2 \,|\, H_t\right] =: R_t(\check{V},\xi)$$

der **diskontierte Risikoprozess**. Dann heißt $(x^*,\xi^*,c^*) \hat{=} (\check{V}^*,\xi^*)$ für die Absicherung des Zahlungsanspruchs X **lokal Risiko minimierend**, wenn für $0 \le t \le T$ gilt:

(10.25a) $$E\left[\{\check{V}^*_t + G_{t,T}(\xi^*) - \check{X}\}^2 \,|\, H_t\right] \le E\left[\{\check{V}_t + G_{t,T}(\xi) - \check{X}\}^2 \,|\, H_t\right]$$

für alle $(x,\xi,c) \hat{=} (\check{V},\xi)$ mit $G_{t+1,T}(\xi) = G_{t+1,T}(\xi^*)$.

Aus (10.25a) folgt dann stets $V^*_T = X$. Die Definition von 'lokal Risiko minimierend' entspricht der Idee des *Bellmanschen Optimalitätsprinzip*, die allerdings auf eine Situation angewandt wurde, die nicht der klassischen dynamischen Optimierung entspricht.

10.26 Satz. Es ist $(x^*,\xi^*,c^*) \hat{=} (\check{V}^*,\xi^*) := (X_t,\hat{\xi}_t)$ lokal Risiko minimierend für die Absicherung des Zahlungsanspruchs X.

Es soll noch eine Charakterisierung im Rahmen von selbstfinanzierenden Plänen gegeben werden.

10.27 Definition. Ein selbstfinanzierender Plan $\xi^* \in \Xi$ heißt für die Absicherung des Zahlungsanspruchs X **lokal Varianz minimierend**, wenn für $0 \le t < T$ gilt:

$$\mathrm{Var}\left[\check{V}^{\xi^*}_T(x^*) - \check{X} \,|\, H_t\right] = \mathrm{Var}\left[G_{t,T}(\xi^*) - \check{X} \,|\, H_t\right] \le E\left[G_{t,T}(\xi) - \check{X} \,|\, H_t\right] = \mathrm{Var}\left[\check{V}^{\xi}_T(x) - \check{X} \,|\, H_t\right]$$

für alle Pläne $\xi \in \Xi$ mit $G_{t+1,T}(\xi) = G_{t+1,T}(\xi^*)$.

Bei der Zerlegung $\check{V}^{\xi}_T(x) = \check{V}^{\xi}_t(x) + G_{t,T}(\xi)$ hängt $\check{V}^{\xi}_t(x)$ nur von H_t abhängt und kann bei der Bildung der bedingten Varianz als konstant angesehen werden kann. Dies erklärt die Unabhängigkeit der bedingten Varianz $\mathrm{Var}\left[\check{V}^{\xi}_T(x) - \check{X} \,|\, H_t\right]$ von $\check{V}^{\xi}_t(x)$.

Analog zu 9.48 erhalten wir:

10.28 Satz. $\hat{\xi}$ ist lokal Varianz minimierend.

Beweis: Aus (10.13) gewinnen wir auch die Beziehung $\check{X} = X_t + G_{t,T}(\hat{\xi}) + N_T - N_t$.

Damit haben wir insbesondere: $X_t = E\left[\check{X} - G_{t,T}(\hat{\xi}) - (N_T - N_t) \,|\, H_t\right]$. Die Martingaleigenschaft von $\{N_t\}$ impliziert nun:

(10.29) $$X_t = E\left[\check{X} - G_{t,T}(\hat{\xi}) \,|\, H_t\right] .$$

Somit ergibt sich mit 10.25:

$$\mathrm{Var}\left[G_{t,T}(\hat{\xi}) - \check{X} \,|\, H_t{=}\omega_t\right] = E\left[\{X_t + G_{t,T}(\hat{\xi}) - \check{X}\}^2 \,|\, H_t{=}\omega_t\right]$$
$$\le E\left[\{v + \vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_{t+1} + G_{t+1,T}(\hat{\xi}) - \check{X}\}^2 \,|\, H_t{=}\omega_t\right]$$
$$= \mathrm{Var}\left[\vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_{t+1} + G_{t+1,T}(\hat{\xi}) - \check{X} \,|\, H_t{=}\omega_t\right] .$$

für alle $\vartheta \in \mathbb{R}^d$ und $v := -E\left[\vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_{t+1} + G_{t+1,T}(\hat{\xi}) - \check{X} \,|\, H_t{=}\omega_t\right]$. []

Wie in 9.48 läßt sich auch eine Umkehrung beweisen.

10.30 Satz. Ist ξ^* lokal Varianz minimierend und setzt man

$\check{V}_t^* = E\left[\check{X} - G_{t,T}(\xi^*) \,|\, H_t\right]$, so ist $(\check{V}_t^*, \xi^*)$ lokal Risiko minimierend.

Beweis: Wir haben für $v \in \mathbb{R}$, $\vartheta \in \mathbb{R}^d$:

$$E\left[\{\check{V}_t^* + G_{t,T}(\xi^*) - \check{X}\}^2 \,|\, H_t{=}\omega_t\right] = \mathrm{Var}\left[G_{t,T}(\xi^*) - \check{X} \,|\, H_t{=}\omega_t\right]$$
$$\le \mathrm{Var}\left[\vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_{t+1} + G_{t+1,T}(\xi^*) - \check{X} \,|\, H_t{=}\omega_t\right]$$
$$= \mathrm{Var}\left[v + \vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_{t+1} + G_{t+1,T}(\xi^*) - \check{X} \,|\, H_t{=}\omega_t\right]$$
$$\le E\left[\{v + \vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_{t+1} + G_{t+1,T}(\xi^*) - \check{X}\}^2 \,|\, H_t{=}\omega_t\right] . []$$

Geht man von einem lokal Varianz minimierenden Plan $\hat{\xi}$ aus, so bietet sich als Preis für einen Kontrakt mit Zahlungsanspruch X der Wert $E\left[\check{X} - G_T(\hat{\xi})\right]$ an. Dieser stimmt gemäß (10.29) und (10.10) überein mit

$$X_0 = E\left[\check{X} - G_T(\hat{\xi})\right] = E\left[\boldsymbol{\Pi}_{t=1}^T \hat{L}_t \cdot \check{X}\right] = \hat{E}\left[\check{X}\right].$$

Es soll nun eine weitere Charakterisierung von $\hat{P}$ gegeben werden.

10.31 Definition. (a) Q heißt **signiertes Martingalmaß mit Dichteprozeß** $Z_t = \prod_{m=1}^{t} L_m$, wenn gilt: $Q[A] = \sum_{\omega \in A} P(\omega)\, Z_T(\omega)$, wobei $\{L_t\}$ ist ein adaptierter Prozeß ist mit

(10.31a) $E[L_t \mid H_{t-1}] = 1, \quad E[L_t \cdot \Delta\check{S}_t^k \mid H_{t-1}] = 0,\ 1 \le k \le d,\ 1 \le t \le T.$

Dann sei $E_Q[Y \mid H_{t-1}] := E[Y \cdot \prod_{m=t}^{T} L_m \mid H_{t-1}]$, also $E_Q[\Delta\check{S}_t^k \mid H_{t-1}] = E[L_t \cdot \Delta\check{S}_t^k \mid H_{t-1}]$.

(b) P* heißt **minimales signiertes Martingalmaß**, wenn P* signiertes Martingalmaß ist mit Dichteprozeß $Z_t^* = \prod_{m=1}^{t} L_m^*$ und wenn gilt: Ist $\{N_t\}$ ein Martingal unter P und orthogonal zu $\{M_t\}$, d.h.

(10.32) $E[\Delta M_t^k \cdot \Delta N_t \mid H_{t-1}] = 0$, $1 \le k \le d$, $1 \le t \le T$,

so ist $\{N_t\}$ auch ein Martingal unter P* im Sinne von

(10.33) $E^*[\Delta N_t \mid H_{t-1}] := E[\Delta N_t \cdot L_t^* \mid H_{t-1}] = 0.$

Jedes äquivalente Martingalmaß ist gemäß 4.14 ein signiertes Martingalmaß mit einem positiven Dichteprozeß. Das Maß $\hat{P}$ ist gemäß (10.7), (10.17), 10.18 ein signieres Martingalmaß mit Dichteprozeß $\hat{Z}_t = \prod_{m=1}^{t} \hat{L}_m$. Ein minimales Martingalmaß erhält also die Martingaleigenschaft von zu $\{M_t\}$ orthogonalen Martingalen.

10.34 Satz. $\hat{P}$ ist das einzige minimale signierte Martingalmaß.

Beweis. a) "$\hat{P}$ ist minimales Martingalmaß".

Wir haben gemäß (10.9): $\hat{L}_t = 1 - \nu_{t-1}\, \lambda_{t-1}^{\top} \cdot \Delta M_t$.
Sei $\{N_t\}$ wie in 10.31b. Da $\{N_t\}$ ein Martingal ist, gilt: $E[\Delta N_t \mid H_{t-1}] = 0$. Dann folgt:

$$E[\hat{L}_t \cdot \Delta N_t \mid H_{t-1}] = E[\Delta N_t \mid H_{t-1}] - \nu_{t-1} \cdot E[\lambda_{t-1}^{\top} \cdot \Delta M_t\, \Delta N_t \mid H_{t-1}]$$
$$= -\nu_{t-1} \cdot \sum_{k=1}^{d} \lambda_{t-1}^k \cdot E[\Delta M_t^k \cdot \Delta N_t \mid H_{t-1}] = 0.$$

b) "Eindeutigkeit".

Sei P* signiertes Martingalmaß ist mit Dichteprozeß $Z_t^* = \prod_{m=1}^{t} L_m^*$. Wir definieren den Prozeß $\{N_t\}$ über $N_0 = 0$, $\Delta N_t := L_t^* - \hat{L}_t$. Dann haben wir $E[\Delta N_t \mid H_{t-1}] = E[L_t^* - \hat{L}_t \mid H_{t-1}] = 1 - 1$, also ist $\{N_t\}$ ein Martingal. Ferner gilt: $E[\Delta M_t^k \cdot \Delta N_t \mid H_{t-1}] = E[\Delta\check{S}_t^k \cdot \Delta N_t \mid H_{t-1}] -$
$\mu_{t-1}^k \cdot E[\Delta N_t \mid H_{t-1}] = E[\Delta\check{S}_t^k \cdot (L_t^* - \hat{L}_t) \mid H_{t-1}] = E[\Delta\check{S}_t^k \cdot L_t^* \mid H_{t-1}] - E[\Delta\check{S}_t^k \cdot \hat{L}_t \mid H_{t-1}] = 0,$
also sind $\{M_t^k\}$ und $\{N_t\}$ orthogonal. Daraus folgt mit a):

(*) $E[\Delta N_t \cdot \hat{L}_t \mid H_{t-1}] = 0.$

Wir setzen nun voraus, daß P* minimal ist; dann muß nämlich $\{N_t\}$ auch unter P* ein Martingal

sein, d.h. $E[\Delta N_t \cdot L_t^* | H_{t-1}] = 0$. Mit (*) ergibt sich schließlich: $E[\Delta N_t \cdot \Delta N_t | H_{t-1}] = 0$. Damit auch $E[\{\Delta N_t\}^2] = 0$, was $\Delta N_t \equiv 0$, also $L_t^* \equiv \hat{L}_t$ impliziert. []

10.35 Bemerkung. Der Beweisteil b) von 10.34 ergibt auch folgenden **Darstellungssatz**:

$Z_t = \Pi_{m=1}^t L_m$ beschreibt genau dann den Dichteprozeß eines signierten Martingalmaßes Q, wenn gilt:

(10.36) $L_t = \hat{L}_t + \Delta N_t$ mit einem zu $\{M_t\}$ orthogonalen Martingal $\{N_t\}$. []

Eine Eigenschaft von zeitstetigen Modellen mit stetigen Pfaden überträgt sich nicht.

10.37 Bemerkung. Das minimale Martingalmaß $\hat{P}$ erhält nicht notwendig die Orthogonalität, d.h. ist $\{N_t\}$ ein Martingal unter P, das orthogonal zu $\{M_t\}$ ist, so ist $\{N_t\}$ nicht notwendig orthogonal zu $\{M_t\}$ unter $\hat{P}$. Wir haben nämlich etwa im Fall d=1 lediglich:

$E[\hat{L}_t \cdot \Delta N_t \cdot \Delta M_t | H_{t-1}] = E[(1 - \nu_{t-1} \lambda_{t-1} \cdot \Delta M_t) \cdot \Delta N_t \cdot \Delta M_t | H_{t-1}]$

$= -\nu_{t-1} \lambda_{t-1} \cdot E[\Delta N_t \cdot \{\Delta M_t\}^2 | H_{t-1}]$. []

Nach 4.14 läßt sich der Dichteprozeß $\{Z_t\}$ eines Martingalmaßes $Q \in \mathbb{P}^*$ schreiben als $Z_t = \Pi_{m=1}^t L_m$, wobei $\{L_t\}$ ein adptierter Prozeß ist mit L_0:=1 und für $1 \le t \le T$ gilt:

$L_t > 0$, $E[L_t | H_{t-1}] = \mathbf{1}$, $E[L_t \cdot \Delta \check{S}_t^k | H_{t-1}] = 0$.

Der Dichteprozeß $\{\hat{Z}_t\}$ von $\hat{P}$ hat nach 10.8 die Darstellung:

$\hat{Z}_t = \Pi_{m=1}^t \hat{L}_m$ mit $\hat{L}_t = 1 - \nu_{t-1} \lambda_{t-1}^\top \cdot \Delta M_t$.

Der Dichteprozeß von P ist natürlich $Z_t' \equiv 1$, also auch $L_t' \equiv 1$.

Es gilt nun, daß $\hat{L}_t$ unter allen Konkurrenten L_t in einem gewissen Sinne am nächsten an der entsprechenden Größe des Originalmaßes $L_t' \equiv 1$ liegt und damit $\{\hat{Z}_t\}$ "lokal" am nächsten an der entsprechenden Größe des Originalmaßes $Z_t' \equiv 1$ liegt Wir haben nämlich:

(10.38) $E(L_t - 1)^2 | H_{t-1}] \ge E[(\hat{L}_t - 1)^2 | H_{t-1}] \quad \forall L_t$ mit (10.31a).

Dies ergibt sich wie unter 9.23 oder läßt sich darauf zurückführen, indem man die bedingte W. $P[\cdot | H_{t-1} = \omega_{t-1}]$ als Ausgangsmaß nimmt.

Als abschließendes Problem soll im Fall d=1 eine weitere Eigenschaft für den durch $(\check{V}_t^*,\xi_t^*) = (X_t,\hat{\xi}_t)$ beschriebenen lokal Risiko minimierenden Plan beschrieben werden. Es sollen nämlich die Vorzeichen von $\hat{\xi}_t$ und $\hat{\eta}_t$ mit

(10.39) $\qquad \check{V}_t^* =: \hat{\eta}_t + \hat{\xi}_t \cdot \check{S}_t$

untersucht werden. Dann beschreibt also $\hat{\eta}_t$ den Entwicklung des Kontostandes auf dem Sparbuch. Dazu machen wir die folgenden Voraussetzungen:

10.40 Voraussetzung. (a) Es sei d=1 und: $\check{S}_t = \check{S}_{t-1} \cdot (1+\check{R}_t)$ (wie in 1.13) mit $1+\check{R}_t > 0$. Dabei sei $\check{R}_t$ unabhängig von H_{t-1}.

(b) Es sei $\hat{L}_t > 0 \quad \forall\, 1 \le t \le T$.

Die Voraussetzung 10.40b besagt also, daß $\hat{P}$ ein äquivalentes Martingalmaß ist und nicht nur ein signiertes Martingalmaß. Ein typische Situation für 10.40a liefert die geometrische Irrfahrt.

10.41 Voraussetzung. $\check{X} = f(\check{S}_T)$, wobei $f : (0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ isoton und $s \mapsto f(s)/s$ isoton sind.

Bei einer europäischen Kaufoption gilt gemäß (9.42) $f(s) = (s-\check{K})^+$ und 10.41 ist erfüllt.

10.42 Satz. Unter den Voraussetzungen 10.40 und 10.41 gilt: $\hat{\xi}_t \ge 0$, $\hat{\eta}_t \le 0$, $0 \le t < T$.

Die Aussage von 10.42 besagt gerade: Man hält zur Absicherung nicht nur eine positive Anzahl von Anteilen an dem risikobehafteten Wertpapier, sondern man nimmt sogar Geld auf für die Investition in das Wertpapier. Die erste Eigenschaft ist leicht einzusehen. Die Voraussetzung 10.41 besagt insbesondere, daß umsomehr abzusichern ist, je höher der Endpreis des Wertpapieres ist. Das kann nur gelingen, wenn man eine positive Anzahl von Anteilen hält, da dann auch der Gewinn umso höher ist, je höher der Endpreis ist.

10.43 Beispiel. Es liege das **Binomialmodell** aus §2 vor. Wir versehen mit Ω mit dem Martingalmaß $P = P^*$. Mit 9.36f kann man nämlich folgern, daß $\hat{L}_t > 0$, d.h. 10.40b, und damit $P^* \in \mathbb{P}^*$ gilt. Dann muß in Hinblick auf 4.32 $P^* = \hat{P}$ gelten. Diese Eindeutigkeit des Martingalmaßes wurde bereits in 2.6 festgestellt. Wir wissen in Hinblick auf 4.31b auch, daß sogar Eindeutigkeit in der Menge der signierten Martingalmaße besteht.

Sei $\check{X} = X/B_T = \left[\check{S}_T - \check{K}\right]^+$, $(\check{V}_t^*,\xi_t^*) = (X_t,\hat{\xi}_t)$ wie oben definiert, $\check{V}_t^* = X_t =: \hat{\eta}_t + \hat{\xi}_t \cdot \check{S}_t$. Nach 2.4 existiert (x',ξ') mit

$$\left[\check{S}_T - \check{K}\right]^+ = x' + \sum_{m=1}^{T} \xi'_{m-1} \cdot \Delta\check{S}_m.$$

Dies ist nach 10.16 eine Föllmer–Schweizer–Zerlegung mit $N_t \equiv 0$, die hier auch eine Kunita–Watanabe– Zerlegung ist, da das Martingalmaß $\hat{P}$ zugrundegelegt wurde, also $\{\check{S}_t\}$ bereits ein Martingal ist. Also wissen wir: $x' = X_0 = \hat{E}[\check{X}] = E^*[\check{X}]$, $\xi' = \hat{\xi}$, also:

$$[\check{S}_T - \check{K}]^+ = X_0 + \sum_{m=1}^{T} \hat{\xi}_{m-1} \cdot \Delta\check{S}_m = \check{X}.$$

Die Beziehung $x' = E^*[\check{X}]$ ist bereits von §2 oder (3.28) bekannt. Die Beweise von 2.1 und 2.4 zeigen sogar die Eindeutigkeit dieser Darstellung. Die Zahlungsforderung aus der europäischen Kaufoption kann also durch $(X_0,\hat{\xi})$ abgesichert und sogar dupliziert werden. Gemäß ist 2.6 (mit $I_t = 1+\check{R}_t$) ist unter $\hat{P}$ auch 10.40 erfüllt. Somit besagt 10.42 für den duplizierenden Plan: $\hat{\xi}_t \geq 0$ und $\hat{\eta}_t \leq 0 \; \forall$ t. Ferner ist nach 10.15 und 10.18

$$\check{V}_t = X_t = \hat{E}[(\check{S}_T - \check{K})^+ | H_t] = \hat{v}_0 + \sum_{m=1}^{t} \hat{\xi}_{m-1} \cdot \Delta\check{S}_m \; . \; []$$

Beweis von 10.42. Es ist mit (10.11) wie im Beweis für T=1 in 9.40, (9.41):

$\hat{\xi}_{T-1} = \mathrm{Cov}[f(\check{S}_T),\check{S}_T | H_{T-1}]/\sigma^2_{T-1}$ und

$\hat{\eta}_{T-1} = \{E[\check{X} | H_{T-1}] \cdot E[\check{S}_T^2 | H_{T-1}] - E[\check{X} \cdot \check{S}_T | H_{T-1}] \cdot E[\check{S}_T | H_{T-1}]\}/\sigma^2_{T-1}$.

Indem man den Erwartungswert durch den bedingten ersetzt, folgt wie für T=1: $\hat{\xi}_{T-1} \geq 0$, $\hat{\eta}_{T-1} \leq 0$. Mit 10.12d hat man ferner:

$X_{T-1} = E[\check{X} \cdot \hat{L}_T | H_{T-1}]$ mit $\sigma^2_{T-1} \cdot \hat{L}_T = E[\{\Delta\check{S}_T\}^2 | H_{T-1}] - \Delta\check{S}_T \cdot E[\Delta\check{S}_T | H_{T-1}]$.

Die letzte Beziehung ergibt sich wie in 4.18 und 9.36d. Nun hat man $\Delta\check{S}_t = \check{S}_{t-1} \cdot \check{R}_t$ und es folgt leicht : $\sigma^2_{T-1} = \check{S}^2_{T-1} \cdot \mathrm{Var}[\check{R}_T]$ und

$\sigma^2_{T-1} \cdot \hat{L}_T = \check{S}^2_{T-1} \cdot E[\check{R}_T^2] - \check{S}_{T-1} \cdot \check{R}_T \cdot \check{S}_{T-1} \cdot E[\check{R}_T] = \check{S}^2_{T-1} \cdot \{E[\check{R}_T^2] - \check{R}_T \cdot E[\check{R}_T]\}$.

Daraus ergibt sich: $\hat{L}_T = \{E[\check{R}_T^2] - \check{R}_T \cdot E[\check{R}_T]\}/\mathrm{Var}[\check{R}_T]$.

und

$X_{T-1} = E[f(\check{S}_{T-1} \cdot (1+\check{R}_T)) \cdot \{E[\check{R}_T^2] - \check{R}_T \cdot E[\check{R}_T]\} | H_{T-1}]/\mathrm{Var}[\check{R}_T] =: f'(\check{S}_{T-1})$ mit

$$f'(s) := E[h(s \cdot (1+\check{R}_T)) \cdot \{E[\check{R}_T^2] - \check{R}_T \cdot E[\check{R}_T]\}]/\mathrm{Var}[\check{R}_T] \; .$$

Wegen $\hat{L}_T > 0$ haben wir dabei: $E[\check{R}_T^2] - \check{R}_T \cdot E[\check{R}_T] > 0$. Wegen dieser Eigenschaft und $1+\check{R}_T > 0$ ist offenbar f' isoton. Ebenso ist

$$\frac{1}{x} \cdot f'(s) = E[(s \cdot (1+\check{R}_T))^{-1} \cdot f(s \cdot (1+\check{R}_T))) \cdot (1+\check{R}_T) \cdot \{E[\check{R}_T^2] - \check{R}_T \cdot E[\check{R}_T]\}]/\mathrm{Var}[\check{R}_T]$$

isoton. Mit vollständiger Induktion folgt nun die Behauptung, denn η_{t-1} und ξ_{t-1} hängen in der gleichen Weise von X_t ab wie η_{T-1} und ξ_{T-1} von $X_T = \check{X}$. []

§ 11 Globale Risikominimierung bei unvollständigen Märkten.

Es sei in § 11 generell vorausgesetzt, daß der Markt arbitragefrei ist. Wir beginnen mit dem folgenden Optimierungsproblem:

(11.1) minimiere $E\left[\{\breve{X} - x - G(\xi)\}^2\right] = E\left[\{\frac{1}{B_T}(X - V_T^{\xi}(x))\}^2\right]$ über alle Pläne $\xi \in \Xi$.

Die Lösung läßt sich wie in §9 durch die orthogonale Projektion auf einen linearen Teilraum beschreiben. Wie in §3 wird die Menge aller Zva $\mathbb{R}^{\Omega}$ mit dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^{|\Omega|}$ identifizert. Wir werden wie §9 das Skalarprodukt eines L^2–Raumes einführen gemäß:

(11.2) $<Y,Z> := E\left[Y \cdot Z\right] = \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)\, Y(\omega) \cdot Z(\omega), \quad Y,Z \in \mathbb{R}^{\Omega}$.

Wie in §4 sei

(11.3) $G(\Xi) := \{ G_T(\xi), \xi \in \Xi\}$.

Vom Beweis von 3.16 her wissen wir, daß $G(\Xi)$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^{|\Omega|}$ ist, damit endlich–dimensional und abgeschlossen. Über das Skalarprodukt (11.2) ist auch das orthogonale Komplement $G(\Xi)^{\perp}$ zu $G(\Xi)$ definiert.

(11.4) Π und $\Pi^{\perp}$ seien die orthogonalen Projektionen auf $G(\Xi)$ bzw. $G(\Xi)^{\perp}$, also

$Z = \Pi(Z) + \Pi^{\perp}(Z)$ für $Z \in \mathbb{R}^{\Omega}$.

Dann folgt wieder:

11.5 Projektionssatz. Sei $Z \in \mathbb{R}^{\Omega}$. *Als Lösung von*

(11.6) minimiere $E\left[\{Z - G_T(\xi)\}^2\right]$ über alle Pläne $\xi \in \Xi$

ergibt sich jeder Plan ζ *mit* $G_T(\zeta) = \Pi(Z)$.

Als Lösung von (11.1) ergibt sich demnach jeder Plan ξ^* mit $G_T(\xi^*) = \Pi(\breve{X} - x)$. Dabei wird wie üblich jede Konstante x, etwa 1, auch als Element von $\mathbb{R}^{\Omega}$ aufgefaßt wird.

11.7 Lemma. (a) $0 \le E\left[\Pi(1)\right] = E\left[\Pi(1)^2\right] < 1$, $0 < E\left[\Pi^{\perp}(1)\right] = E\left[\Pi^{\perp}(1)^2\right] \le 1$;

(b) es sind äquivalent: (1) $E\left[\Pi(1)\right] = 0$, (2) $\Pi(1) \equiv 0$, (3) $\{\breve{S}_t\}$ ist ein Martingal unter P.

Beweis: a) Es ist $E\left[\Pi(1)\right] = <1,\Pi(1)> = <\Pi(1)+\Pi^{\perp}(1),\Pi(1)> = <\Pi(1),\Pi(1)> = E\left[\Pi(1)^2\right]$; die Beziehung $E\left[\Pi^{\perp}(1)\right] = E\left[\Pi^{\perp}(1)^2\right]$ folgt ebenso. Ferner ist $1 = <1,1> = <\Pi(1),\Pi(1)> + <\Pi^{\perp}(1),\Pi^{\perp}(1)>$. Die Beziehung $1 \in G(\Xi)$, also $1 = G_T(\xi)$ für ein $\xi \in \Xi$ würde gemäß 1.18 eine Arbitragemöglichkeit bieten; also gilt $\Pi^{\perp}(1) \neq 0$.

b) Nach 3.11 sind äquivalent:

(i) $\{\check{S}_t\}$ ein Martingal unter P;
(ii) $<1, G_T(\xi)> = 0$, $\xi \in \Xi$;

(iii) $1 \in G(\Xi)^{\top}$, d.h. $\Pi(1) = 0$.

Wegen $E[\Pi(1)] = E[\Pi(1)^2]$ ist (iii) äquivalent zu (iv) $E[\Pi(1)] = 0$. $[\,]$

Wir benutzen wieder die Erweiterung des Begriffs 'Martingalmaß' auf signierte Maße.

11.8 Definition. *Es* sei $\overline{\mathbb{P}}^*$ die Menge der signierten Martingalmaße Q mit Dichteprozeß $Z_t = \Pi_{m=1}^{t} L_m$ gemäß 10.31, also mit P–Dichte $dQ/dP = Z_T$. Dann *heißt* $\tilde{P} \in \overline{\mathbb{P}}^*$ mit $d\tilde{P}/dP = \tilde{Z}_T$ ***varianz- optimal***, *falls gilt*:

$$\mathrm{Var}[\tilde{Z}_T] \le \mathrm{Var}[Z_T] = E[\{Z_T - 1\}^2] = E[Z_T^2] - 1 \quad \forall\, Q \in \overline{\mathbb{P}}^* \text{ mit } dQ/dP = Z_T.$$

Es gilt offenbar: $\mathbb{P}^* \subset \hat{\mathbb{P}}^* \subset \overline{\mathbb{P}}^*$. Da der Markt arbitragefrei ist, haben wir nach dem 1. Fundamentalsatz $\mathbb{P}^* \neq \emptyset$ und somit $\overline{\mathbb{P}}^* \neq \emptyset$. Bei der Minimierung von $E[\{Z_T - 1\}^2]$ kann man 1 als auch als Dichte von P bzgl. sich selbst auffassen. Dann sucht man also ein signiertes Martingalmaß mit einer Dichte Z_T, das P möglichst nahe kommt.

11.9 Lemma. (a) Sei Z_T Zva und $Q[A] := E[\mathbf{1}_A \cdot Z_T]$, $A \subset \Omega$, also $dQ/dP = Z_T$.
Dann sind äquivalent:

(1) $Q \in \overline{\mathbb{P}}^*$, d.h. Q ist ein signiertes Martingalmaß im Sinne von 10.31 mit $dQ/dP = Z_T$.

(2) $E[Z_T] = 1$, $E[Z_T \cdot G(\xi)] = 0 \;\; \forall\, \xi \in \Xi$.

(b) $E[\Pi^{\perp}(1)]^{-1}\, \Pi^{\perp}(1)$ ist P–Dichte eines signierten Martingalmaßes.

Beweis. a) "(1) ⇒ (2)" Es ist $E[Z_T] = E[\Pi_{t=1}^{T} L_t] = 1$ gemäß 4.11a wegen (10.31a). Weiterhin ist
$Z_t := E[Z_T | H_t] = \Pi_{m=1}^{t} L_m$ und somit
$E[Z_T \cdot G_T(\xi)] = \Sigma_{t=1}^{T} E[Z_T \cdot \xi_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_t] = \Sigma_{t=1}^{T} E[Z_t \cdot \xi_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_t]$
$= \Sigma_{t=1}^{T} E[Z_{t-1} \Sigma_{k=1}^{d} \xi_{t-1}^{k} E[L_t \cdot \Delta\check{S}_t^k | H_{t-1}]\,] = 0.$
Dabei wurden die Eigenschaften von L_t aus (10.31a) und (4.12) benutzt.

"(2) ⇒ (1)" Da der Markt arbitragefrei ist, existiert ein $P^* \in \mathbb{P}^*$ mit $dP^*/dP = \Pi_{t=1}^{T} L_t^*$ gemäß 4.14. Sei $Z_t := E[Z_T | H_t]$, also $Z_0 = 1$. Wir definieren

$$L_t := \begin{cases} Z_t / Z_{t-1} & \text{für } Z_{t-1} > 0 \\ L_t^* & Z_{t-1} = 0 \end{cases};$$

dann gilt also: $Z_t = Z_{t-1} \cdot L_t$ und $E[L_t | H_{t-1}] = 1$. Durch Wahl von ξ können wir wie im Beweis

von 3.11 erreichen, daß $G_T(\xi) = \mathbf{1}_A \cdot \Delta\check{S}^k_t$ für $A := \{H_{t-1}=\omega_{t-1}\}$ gilt. Also folgt $\forall\ 1\le t\le T,\ 1\le k\le d$:

$0 = E[Z_T \cdot G_T(\xi)] = E[Z_t \cdot \mathbf{1}_A \cdot \Delta\check{S}^j_t] = P[H_{t-1}=\omega_{t-1}] \cdot Z_{t-1}(\omega_{t-1}) \cdot E[L_t \cdot \Delta\check{S}^j_t \,|\, H_{t-1}=\omega_{t-1}]$

und damit $E[L_t \cdot \Delta\check{S}^j_t \,|\, H_{t-1}=\omega_{t-1}] = 0$ für $Z_{t-1}(\omega_{t-1}) \neq 0$; für $Z_{t-1}(\omega_{t-1}) = 0$ gilt es nach Konstruktion. Somit ist $Z_t = \Pi_{m=1}^{t} L_m$ Dichteprozeß eines signierten Martingalmaßes.

b) Sei $\tilde{Z}_T := E[\Pi^{\perp}(1)]^{-1}\ \Pi^{\perp}(1)$, dann gilt: $\infty > \nu := E[\Pi^{\perp}(1)]^{-1} = E[\Pi^{\perp}(1)^2]^{-1} \ge 1$ nach 11.7. Nach Konstruktion ist $E[\tilde{Z}_T] = 1$; ferner gilt: $E[\tilde{Z}_T \cdot G] = \nu \cdot \langle \Pi^{\perp}(1), G\rangle = 0\ \ \forall\, G \in G(\Xi)$. Nach Teil a gilt somit: $\tilde{P} \in \overline{\mathbb{P}}^*$ mit $\tilde{P}[A] := E[\mathbf{1}_A \cdot Z_T]$, $A \subset \Omega$. $[]$

11.10 Satz. Sei $\tilde{P} \in \overline{\mathbb{P}}^*$ mit $d\tilde{P}/dP = \tilde{Z}_T$. Dann sind äquivalent:

(1) $\tilde{P} \in \overline{\mathbb{P}}^*$ ist varianz–optimal;

(2) für $Q \in \overline{\mathbb{P}}^*$ mit $dQ/dP = Z_T$ gilt: $Z_T = \tilde{Z}_T + N^Q$ mit $E[N^Q \cdot \tilde{Z}_T] = 0$;

(3) $\tilde{Z}_T = E[\Pi^{\perp}(1)]^{-1}\ \Pi^{\perp}(1)$;

(4) $\tilde{Z}_T = x + G_T(\xi)$ für ein $(x,\xi) \in \mathbb{R}\times\Xi$;

(5) $\tilde{Z}_T = x + G_T(\xi)$ für ein $(x,\xi) \in [1,\infty)\times\Xi$.

Beweis: "(1) $\Leftarrow$ (2)" Für $Q \in \overline{\mathbb{P}}^*$ mit $dQ/dP = Z_T = \tilde{Z}_T + N^Q$ ist: $E[Z_T^2] = E[\tilde{Z}_T^2] + E[(N^Q)^2]$. Daraus folgt $E[Z_T^2] \ge E[\tilde{Z}_T^2]$.

"(4) $\Rightarrow$ (2)" Es ist $E[Z_T \cdot \tilde{Z}_T] = x + E[Z_T \cdot G(\xi)] = x$ wegen 11.9, insbesondere $E[\tilde{Z}_T \cdot \tilde{Z}_T] = x$. Es folgt: $E[(Z_T - \tilde{Z}_T) \cdot \tilde{Z}_T] = 0$.

"(5) $\Rightarrow$ (4)" ist offensichtlich.

"(3) $\Rightarrow$ (5)" Es gilt $\tilde{Z}_T = \nu - \nu \cdot \Pi(1)$ mit $\nu \ge 1$ und $\Pi(1) \in G(\Xi)$, also auch: $\nu \cdot \Pi(1) \in G(\Xi)$.

"(1) $\Rightarrow$ (3)" Es geht um die Eindeutigkeit von $\tilde{P}$. Sei $\tilde{Z}_T$ wie in (3); in Hinblick auf das Vorangegangene gilt dann auch (2) und (1). Sei nun Q ebenfalls varianz–optimal mit $dQ/dP =: Z_T$. Dann folgt nach dem Beweis von "(1) $\Leftarrow$ (2)": $E[Z_T^2] = E[\tilde{Z}_T^2] + E[(Z_T - \tilde{Z}_T)^2]$, also $E[(Z_T - \tilde{Z}_T)^2] = 0$ und somit $Q = \tilde{P}$. $[]$

11.11 Korollar. Ist $\tilde{P} \in \overline{\mathbb{P}}^*$ varianz–optimal, so gilt:

(a) $\Pi(1) = 1 - \tilde{Z}_T / E[\tilde{Z}_T^2]$;

(b) $\tilde{Z}_T = \nu \cdot [1 - \Pi(1)]$ mit $\nu = \{1 - E[\Pi(1)]\}^{-1} = E[\tilde{Z}_T^2]$.

Beweis: Gemäß 11.10(3) und 11.7(a) gilt:

$E[\tilde{Z}_T^2] = E[\Pi^\perp(1)^2]/E[\Pi^\perp(1)]^2 = E[\Pi^\perp(1)]/E[\Pi^\perp(1)]^2 = 1/E[\Pi^\perp(1)] = 1/(1 - E[\Pi(1)]) =: \nu.$

Damit besagt 11.10(3): $\tilde{Z}_T = E[\tilde{Z}_T^2]\ \Pi^\perp(1) = \nu \cdot \{1 - \Pi(1)\}$. □

Das varianz–optimale signierte Martingalmaß $\tilde{P}$ erlaubt auch wieder die Lösung der folgenden interessanten Optimierungsaufgabe:

(11.12) minimiere $E[\{\breve{X} - x - G_T(\xi)\}^2] = E[\{\frac{1}{B_T}(X - V_T^\xi(x))\}^2]$ über alle $(x,\xi) \in \mathbb{R}\times\Xi$.

In dem Fall, wo der Zahlungsanspruch X nicht erreichbar ist, versucht man also X möglichst gut durch den Wert eines Planes zu approximieren. Ist (x^*,ξ^*) eine Lösung, so kann man x^* in dieser Situation als Kandidaten für einen fairen Preis betrachten. Der Preis ist wieder in dem Sinne fair, daß $\{X - V_T^\xi(x)\}^+/B_T = \{x + G_T(\xi) - \breve{X}_T\}^+$ und $\{X - V_T^\xi(x)\}^-/B_T = \{x + G_T(\xi) - \breve{X}_T\}^-$ bei der Approximation (9.25) gleiches Gewicht haben. Man nennt x^* auch *Approximationspreis* (Schweizer, 1995).

Bei festem x haben wir diese Aufgabe (11.12) mit 11.5 gelöst.

Eine Lösung von (11.12) und eine gewisse Eindeutigkeit liefert:

11.13 Satz. Sei $\tilde{P} \in \overline{\mathbb{P}}^*$ varianz–optimal mit $d\tilde{P}/dP = \tilde{Z}_T$. Dann sind äquivalent:

(1) (x^*,ξ^*) ist eine Lösung von

minimiere $E[\{\breve{X} - x - G_T(\xi)\}^2]$ über alle $(x,\xi) \in \mathbb{R}\times\Xi$:

(2) $x^* = E[\tilde{Z}_T \cdot \breve{X}]$, $G_T(\xi^*) = \Pi(\breve{X} - x^*) = \Pi(\breve{X}) - x^* \cdot \Pi(1)$.

Beweis. "(1) ⇒ (2)" Offenbar ist $x^* + G_T(\xi^*)$ die Projektion von $\breve{X}$ auf den linearen Raum $V(\mathbb{R}\times\Xi) := \{x + G_T(\xi);\ (x,\xi) \in \mathbb{R}\times\Xi\}$.

Damit steht $N := \breve{X} - x^* - G_T(\xi^*)$ senkrecht auf $V(\mathbb{R}\times\Xi)$; dabei ist $\breve{X} = x^* + G_T(\xi^*) + N$ aber in der Regel keine Föllmer–Schweizer–Zerlegung wie im Fall T=1. Andererseits gilt nach 11.10: $\tilde{Z}_T \in V(\mathbb{R}\times\Xi)$ und $\tilde{Z}_T$ steht senkrecht auf $G(\Xi)$; dies ergibt:

$0 = E[N \cdot \tilde{Z}_T] = E[\breve{X} \cdot \tilde{Z}_T] - x^* - 0$; also $x^* = E[\breve{X} \cdot \tilde{Z}_T]$.

Ferner ist

$E[\{\breve{X} - x^* - G_T(\xi^*)\}^2] = \inf_{x,\xi} E[\{\breve{X} - x - G_T(\xi)\}^2] \le E[\{\breve{X} - x^* - G_T(\xi)\}^2]\ \ \forall\, \xi$, also auch:

$E[\{\breve{X} - x^* - G_T(\xi^*)\}^2] = \inf_{\xi} E[\{\breve{X} - x^* - G_T(\xi)\}^2]$.

Damit gilt: $G_T(\xi^*) = \Pi(\breve{X} - x^*) = \Pi(\breve{X}) - x^* \cdot \Pi(1)$.

"(2) ⇒ (1)" folgt aus der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Optimierungsaufgabe. □

Wendet man das Ergebnis auf (11.12) an, so sieht man, daß sich der Approximationspreis als Erwartungswert des diskontierten Zahlungsanspruchs $\check{X}$ unter dem signierten Martingalmaß beschreiben läßt mit der varianz–optimalen Dichte $\tilde{Z}_T$. Im Binomialmodell ist das Minimum in (11.12) stets null; dann enthält $\overline{\mathbb{P}}^*$ nach 4.31b auch nur ein Element dP*/dP, und wir haben in Übereinstimmung mit §2: $x^* = E^*[\check{X}]$.

Nun wenden wir uns wieder der Aufgabe (11.1) zu. Diese kann im Mehrperiodenfall mit *dynamischer Optimierung* gelöst werden. Betrachten wir

(11.14) $$\begin{aligned} J(x) &:= \min_\xi E[\{x + G_T(\xi) - \check{X}\}^2] \\ &= \min_\xi E[E[\{x + G_{T-1}(\xi) + \xi_{T-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_T - \check{X}\}^2 \,|\, H_{T-1}]] \\ &\geq \min_\xi E[\min_\vartheta E[\{x + G_{T-1}(\xi) + \vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_T - \check{X}\}^2 \,|\, H_{T-1}]]. \end{aligned}$$

Ist nun $\vartheta^* = \vartheta^*_{T-1}(v,\omega_{T-1})$ eine Minimumstelle von

$$\vartheta \mapsto E[\{v + \xi_{T-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_T - \check{X}\}^2 \,|\, H_{T-1} = \omega_{T-1}]$$

so gilt:

$$\begin{aligned} J(x) &= \min_\xi E[E[\{x + G_{T-1}(\xi) + \vartheta^{*\top}_{T-1}(x + G_{T-1}(\xi),\omega_{T-1}) \cdot \Delta\check{S}_T - \check{X}\}^2 \,|\, H_{T-1}]] \\ &= \min_\xi E[\min_\vartheta E[\{x + G_{T-1}(\xi) + \vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_T - \check{X}\}^2 \,|\, H_{T-1}]]. \end{aligned}$$

Denn einerseits haben wir wegen (11.14): $J(x) \leq \min_\xi \ldots$. Andererseits ist $(\xi_0,\ldots\xi_{T-1}, \vartheta^{*\top}_{T-1}(x + G_{T-1}(\xi),H_{T-1})) \in \Xi$ und $G_T(\xi') = x + G_{T-1}(\xi) + \vartheta^{*\top}_{T-1}(x + G_{T-1}(\xi),H_{T-1}) \cdot \Delta\check{S}_T$, also auch $E[E[\{x + G_T(\xi') - \check{X}\}^2 \,|\, H_{T-1}]] \leq J(x)$.

Damit haben wir das Optimierungsproblem auf Problem mit Horizont T–1 reduziert. Für die Rückwärtsinduktion nach t ist es zweckmäßig dieses Problem etwas allgemeiner anzugehen. Dabei soll insbesondere $\min_\vartheta E[\{x + G_{T-1}(\xi) + \vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_T - \check{X}\}^2 \,|\, H_{T-1}]$ berechnet werden.

Gegeben seien Zva $\gamma_t > 0$ und $\bar{X}_t$, die wir uns als Funktionen von H_t vorstellen können, und das Problem:

(11.15) $$J(x) := \min_\xi E[\gamma_t \cdot \{x + G_t(\xi) - \bar{X}_t\}^2].$$

Dann haben wir wie oben

(11.16) $$J(x) = \min_\xi E[J_{t-1}(x + G_{t-1}(\xi),H_{t-1})]$$

mit

(11.17) $$\begin{aligned} J_{t-1}(v,\omega_{t-1}) &:= \min_{\vartheta\in\mathbb{R}^d} E[\gamma_t \cdot \{v + \vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_t - \bar{X}_t\}^2 \,|\, H_{t-1} = \omega_{t-1}] \\ &:= E[\gamma_t \cdot \{v + \vartheta^{*\top} \cdot \Delta\check{S}_t - \bar{X}_t\}^2 \,|\, H_{t-1} = \omega_{t-1}] \end{aligned}$$

Dieses ist ein einstufiges Optimierungsproblem, wie es in §9 betrachtet wurde. Wir müssen allerdings noch das Gewicht γ_t berücksichtigen. Dazu definieren wir definieren für festes ω_{t-1} ein

W–Maß $\overline{P}_{t-1} = \overline{P}_{t-1}[\,\cdot\,|\,\omega_{t-1}]$ über

(11.18) $\overline{E}_{t-1}[Y] = \overline{E}_{t-1}[Y\,|\,\omega_{t-1}] := E[\gamma_t \cdot Y\,|\,H_{t-1} = \omega_{t-1}]/E[\gamma_t\,|\,H_{t-1} = \omega_{t-1}]$.

Dann ist die Aufgabe (11.17) gleichbedeutend mit

(11.17)* $J_{t-1}(v,\omega_{t-1})/E[\gamma_t\,|\,H_{t-1} = \omega_{t-1}] = \min_{\vartheta\in\mathbb{R}^d} \overline{E}_{t-1}[\{v + \vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_t - \bar{X}_t\}^2]$
$= \overline{E}_{t-1}[\{v + \vartheta^{*\top} \cdot \Delta\check{S}_t - \bar{X}_t\}^2]$.

11.19 Bemerkung. (a) Ist γ_t deterministisch, so gilt: $\overline{E}_{t-1}[Y] = E[Y\,|\,H_{t-1}]$

(b) Sei $\mathfrak{G}_t := \{\, \vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_t;\ \vartheta \in \mathbb{R}^d \,\}$. Dann ist

(11.20) $\min_{\vartheta\in\mathbb{R}^d} \overline{E}_{t-1}[\{\vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_t - \bar{X}_t\}^2] =: \overline{E}_{t-1}[\{\overline{\zeta}_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t - \bar{X}_t\}^2]$,

wo

(11.21) $\overline{\zeta}^\top_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t := \overline{\Pi}_t(\bar{X}_t)$

gerade die orthogonale Projektion $\overline{\Pi}_t(\bar{X}_t)$ von $\bar{X}_t$ auf $\mathfrak{G}_t$ unter dem Skalarprodukt $\langle X,X'\rangle := \overline{E}_{t-1}[X \cdot X']$ ist. Damit folgt aus dem Projektionssatz wie in §9 die Existenz von $\overline{\zeta}_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t$ und die Eindeutigkeit auf $\{\omega;\ H_{t-1}(\omega) = \omega_{t-1}\}$. Natürlich ist $\overline{\zeta}_{t-1}$ eine Funktion $\overline{\zeta}_{t-1}(\omega_{t-1})$ von dem festgewählten ω_{t-1}.

(c) Für die Lösung ϑ^* von (11.17) im Falle $\bar{X}_t - v \equiv 1$ schreiben wir: $\vartheta^* =: \beta_{t-1}$, also

(11.22) $\min_\vartheta \overline{E}_{t-1}[\{\vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_t - 1\}^2] =: \overline{E}_{t-1}[\{\beta^\top_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t - 1\}^2]$, d.h.
$\min_\vartheta E[\gamma_t \cdot \{\vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_t - 1\}^2\,|\,H_{t-1}=\omega_{t-1}] =: E[\gamma_t \cdot \{\beta^\top_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t - 1\}^2\,|\,H_{t-1}=\omega_{t-1}]$.

In Hinblick auf 9.21 unter Berücksichtigung von 4.2(3) gilt dann:

(11.23) $0 \le \overline{\varepsilon}_{t-1} := \overline{E}_{t-1}[\beta^\top_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t] =: 1 - 1/\overline{v}_{t-1} < 1$
$\overline{E}_{t-1}[\{1 - \beta^\top_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t\}^2] = \overline{E}_{t-1}[1 - \beta^\top_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t] = 1 - \overline{\varepsilon}_{t-1}$. []

Die Lösung $\overline{\zeta}^\top_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t$ von (11.20) erhalten wir demnach über

(11.24) $\overline{E}_{t-1}[\Delta\check{S}^j_t \cdot \bar{X}_t] = \overline{E}_{t-1}[\Delta\check{S}^j_t \cdot\ \overline{\zeta}^\top_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t]$, $1 \le j \le d$.

Insbesondere gilt:

(11.25) $\overline{E}_{t-1}[\Delta\check{S}_t] = \overline{E}_{t-1}[\Delta\check{S}_t \cdot\ \beta^\top_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t]$, $1 \le j \le d$. []

11.26 Definition. $\overline{L}_t := \dfrac{1}{1 - \overline{\varepsilon}_{t-1}}\,(1 - \beta^\top_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t)$; $\overline{X}_{t-1} := \overline{E}_{t-1}[\overline{L}_t \cdot \bar{X}_t]$

$\overline{\xi}_{t-1} := \overline{\zeta}_{t-1} - \overline{X}_{t-1}\,\beta_{t-1}$, $\bar{X}_t =: \overline{X}_{t-1} + \overline{\xi}^\top_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t + \Delta\overline{N}_t$.

Die letzte Gleichung in 11.26 ist gerade die Föllmer–Schweizer–Zerlegung von $\overline{X}_t$ unter $\overline{P}_t$ bei festem ω_{t-1}.

11.27 Lemma. (a) $\overline{E}_{t-1}[\overline{L}_t] = 1$, $\overline{E}_{t-1}[\overline{L}_t \cdot \Delta\check{S}_t^j] = 0 \ \forall\, j$;

(b) $\overline{E}_{t-1}[\Delta\check{S}_t^j \cdot \Delta\overline{N}_t] = 0 \ \forall\, j$;

(c) $\overline{E}_{t-1}[\overline{L}_t \cdot \Delta\overline{N}_t] = 0$;

(d) $\overline{E}_{t-1}[\Delta\overline{N}_t] = 0$.

(e) Ist $\overline{X}_t \equiv c$ deterministisch, so folgt: $\overline{X}_{t-1} \equiv c$.

Beweis. Die Beweise sind analog zu §9, 10.14 und können auch darauf zurückgeführt werden. Hier sollen die Beweis aber noch einmal gegeben werden.

a) Dies folgt aus 9.24 oder direkt aus der Definition von $\overline{L}_t$ und (11.25).

b) Dies folgt aus 9.30 oder direkt:

Wegen $\overline{\xi}_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_t = (\overline{\zeta}_{t-1} - \overline{X}_{t-1}\,\beta_{t-1})^{\top} \cdot \Delta\check{S}_t = \overline{\Pi}_t(\bar{X}_t) - \overline{X}_{t-1} \cdot \overline{\Pi}_t(1) = \overline{\Pi}_t(\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1})$ haben wir $\Delta\overline{N}_t = (\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1}) - \overline{\Pi}_t(\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1})$, damit ist $\Delta\overline{N}_t$ orthogonal zu $\mathfrak{G}_t$.

c) Dies folgt aus 9.28, 9.30 oder direkt: Nach Definition von $\bar{X}_{t-1}$ gilt:

$\overline{E}_{t-1}[\overline{L}_t \cdot (\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1})] = 0$ und wegen (a) gilt auch: $\overline{E}_{t-1}[\overline{L}_t \cdot (\overline{\xi}_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_t)] = 0$. Aus der Definition von $\Delta\overline{N}_t$ folgt die Behauptung.

d) Dies folgt wieder aus 9.28, 9.30 oder direkt.

Gemäß (c) haben wir für $\overline{\nu}_{t-1} = \dfrac{1}{1 - \overline{\varepsilon}_{t-1}}$:

$0 = \overline{E}_{t-1}[\overline{L}_t \cdot \Delta\overline{N}_t] = \overline{\nu}_{t-1} \cdot \overline{E}_{t-1}[(1 - \beta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_t) \cdot \Delta\overline{N}_t]$

$= \overline{\nu}_{t-1} \cdot \overline{E}_{t-1}[\Delta\overline{N}_t] - \overline{\nu}_{t-1} \cdot \overline{E}_{t-1}[(\beta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_t) \cdot \Delta\overline{N}_t] = \overline{\nu}_{t-1} \cdot \overline{E}_{t-1}[\Delta\overline{N}_t]$ wegen (b).

e) Die letzte Behauptung folgt direkt aus (a). $[\,]$

Nun haben wir in (11.17) wegen $\overline{\Pi}_t(\bar{X}_t - v) = \overline{\Pi}_t(\bar{X}_t) - v\,\overline{\Pi}_t(1)$:

(11.28a) $\vartheta^* = \overline{\zeta}_{t-1} - v \cdot \beta_{t-1} =: \vartheta^*_{t-1}(v)$.

Somit ergibt sich wie in 9.30b:

(11.28b) $J_{t-1}(v,\omega_{t-1})/E[\gamma_t \,|\, H_{t-1} = \omega_{t-1}] = (v - \overline{X}_{t-1})^2 \cdot (1 - \overline{\varepsilon}_{t-1}) + \overline{E}_{t-1}[\{\Delta N_t^{\gamma}\}^2]$.

Dies soll noch einmal in der vorliegenden Situation gezeigt werden:

Es ist $v + \vartheta^{*\top} \cdot \Delta\check{S}_t - \bar{X}_t = v + (\overline{\zeta}_{t-1} - v \cdot \beta_{t-1})^{\top} \cdot \Delta\check{S}_t - \bar{X}_t$

$= v + \overline{\xi}_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_t + (\overline{X}_{t-1} - v) \cdot \beta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_t - \bar{X}_t$

$= v - \overline{X}_{t-1} + (\overline{X}_{t-1} - v) \cdot \beta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_t - \Delta\overline{N}_t$

$= (v - \overline{X}_{t-1})(1 - \beta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_t) - \Delta\overline{N}_t$, also:

(11.28c) $v + \vartheta^*_{t-1}(v)^\top \cdot \Delta\check{S}_t - \bar{X}_t = (v - \overline{X}_{t-1})(1 - \beta^\top_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t) - \Delta\overline{N}_t.$

Mit Lemma 11.27 erhalten wir damit:

$$J_{t-1}(v,\omega_{t-1})/E[\gamma_t \,|\, H_{t-1} = \omega_{t-1}]$$
$$= \overline{E}_{t-1}[\{v + \vartheta^{*\top} \cdot \Delta\check{S}_t - \bar{X}_t\}^2]$$
$$= (v - \overline{X}_{t-1})^2 \cdot \overline{E}_{t-1}[\{1 - \beta^\top_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t\}^2] + \overline{E}_{t-1}[\{\Delta\overline{N}_t\}^2].$$

Wegen (11.23) ergibt sich somit die Behauptung.

Setzen wir schließlich:

(11.29) $\gamma_{t-1} := E[\gamma_t \,|\, H_{t-1} = \omega_{t-1}] \cdot (1 - \overline{\varepsilon}_{t-1}),$

so erhalten wir:

(11.30) $J_{t-1}(v,H_{t-1}) = \gamma_{t-1} \cdot (v - \overline{X}_{t-1})^2 + E[\gamma_t \cdot \{\Delta\overline{N}_t\}^2 \,|\, H_{t-1}]$
$= E[\gamma_t \cdot \{v + (\overline{\zeta}_{t-1} - v \cdot \beta_{t-1})^\top \cdot \Delta\check{S}_t - \bar{X}_t\}^2 \,|\, H_{t-1}].$

Unser Ausgangspunkt war:

$J(x) := \min_\xi E[\gamma_t \cdot \{x + G_t(\xi) - \bar{X}_t\}^2]$ mit $J = \min_\xi E[J_{t-1}(x + G_{t-1}(\xi),H_{t-1})].$

Nun wissen wir:

$$J(x) = \min_\xi E[\gamma_{t-1} \cdot \{x + G_{t-1}(\xi) - \overline{X}_{t-1}\}^2] + E[E[\gamma_t \cdot \{\Delta\overline{N}_t\}^2 \,|\, H_{t-1}]]$$
$$= \min_\xi E[\gamma_{t-1} \cdot \{x + G_{t-1}(\xi) - \overline{X}_{t-1}\}^2] + E[\gamma_t \cdot \{\Delta\overline{N}_t\}^2].$$

Dabei ist der zweite Summand $E[\gamma_t \cdot \{\Delta\overline{N}_t\}^2]$ unabhängig von ξ. Die Optimierungsaufgabe ist also jetzt auf eine solche mit Horizont t–1 reduziert worden, die sogar die gleiche Gestalt wie die ursprüngliche hat. Wir müssen lediglich γ_t durch γ_{t-1} und Z durch Z_{t-1} ersetzen. Somit können wir obiges Verfahren und mit Induktion die Optimierungsaufgabe lösen. Diese haben wir also auf eine Folge von Optimierungsaufgabe zurückgeführt, wobei jedesmal nur einstufige Modelle wie in §9 zu betrachten sind und die Minimierung jedesmal über $\vartheta \in \mathbb{R}^d$ vorgenommen wird und nicht über die kompliziertere Menge $\xi \in \Xi$.

11.31 Definition. $\varepsilon_t := \lambda^\top_t \cdot \mu_t = E[\lambda^\top_t \cdot \Delta\check{S}_{t+1} \,|\, H_t] = 1 - \frac{1}{\nu_t}$. Nun sei rekursiv definiert:

$\gamma_T := 1$, $\beta_{t-1}(\omega_{t-1})$ sei Minimumstelle von

(11.32) $\vartheta \mapsto E[\gamma_t \cdot \{1 - \vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_t\}^2 \,|\, H_{t-1} = \omega_{t-1}];$

dann heißt $\{\beta_t, 0 \le t < T\}$ **globaler Anpassungsprozeß**. Ferner sei

$\gamma_{t-1} := E[\gamma_t \cdot \{1 - \beta^\top_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t\}^i \,|\, H_{t-1}]$, i = 1,2,

$1 - \overline{\varepsilon}_{t-1} := \gamma_{t-1}/E[\gamma_t \,|\, H_{t-1}]$.

Dabei wurde (11.23) benutzt. Für T=1 gilt offenbar $\beta_1 = \lambda_1$ (vgl. 9.19, 9.20).

11.33 Bemerkung. (a) Sei ω_{t-1} fest. Ist $\overline{\Pi}_{t-1}(1)$ die auf $\{\omega;\, H_{t-1}(\omega) = \omega_{t-1}\}$ eindeutig definierte Projektion aus 11.19a, so muß β_{t-1} der Beziehung $\overline{\Pi}_{t-1}(1) = \beta_{t-1}^{\top}(\omega_{t-1}) \cdot \Delta\check{S}_t$ auf $\{\omega;\, H_{t-1}(\omega) = \omega_{t-1}\}$ genügen. Es kann wieder mehrere Versionen geben.
(b) Gemäß 10.5 gilt : $0 \le \varepsilon_t < 1,\ 0 \le t < T$.

11.34 Lemma. (a) Ist γ_t deterministisch, so gilt:

$\beta_{t-1} = \lambda_{t-1},\ \overline{\varepsilon}_{t-1} = \varepsilon_{t-1},\ \gamma_{t-1} := (1 - \varepsilon_{t-1}) \cdot \gamma_t$.

(b) $\beta_{T-1} = \lambda_{T-1},\ \overline{\varepsilon}_{T-1} = \varepsilon_{T-1},\ \gamma_{T-1} := (1 - \varepsilon_{T-1}),\ \overline{E}_{T-1}[\,\cdot\,] = E[\,\cdot\,|\,H_{T-1}]$.

(c) Ist ε_t deterministisch $\forall\ 0 \le t < T$, so ist γ_t deterministisch $\forall\ 0 \le t \le T$.

Beweis: a) Ist γ_t deterministisch, so ist β_{t-1} Minimumstelle von

$\vartheta \mapsto \gamma_t \cdot E[\{1 - \vartheta^{\top} \cdot \Delta\check{S}_t\}^2 \,|\, H_{t-1} = \omega_{t-1}]$ und somit nach 10.5 gleich λ_{t-1}.

Es folgt: $\gamma_{t-1} = \gamma_t \cdot E[1 - \lambda_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_t \,|\, H_{t-1}] = \gamma_t \cdot (1 - \varepsilon_{t-1})$. Schließlich hat man:

$1 - \overline{\varepsilon}_{t-1} := \gamma_{t-1}/\gamma_t = 1 - \varepsilon_{t-1}$. Teil (b) folgt aus (a) wegen $\gamma_T = 1$.
Teil (c) folgt aus $\gamma_{t-1} := (1 - \varepsilon_{t-1}) \cdot \gamma_t$ mit Induktion. []

11.35 Definition. Für eine Zva Y und $A \subset \Omega$ sei:

$\overline{E}[Y] := \frac{1}{\gamma_0} E[(1 - \overline{\varepsilon}_0) \cdot \ldots \cdot (1 - \overline{\varepsilon}_{T-1}) \cdot Y],\quad \overline{P}[A] = \overline{E}[\mathbf{1}_A]$.

11.36 Proposition. $\overline{P}$ ist ein W–Maß, sodaß für jeden adaptierten Prozeß $\{Y_t\}$ gilt:

$\overline{E}[Y_m \,|\, H_t] = \frac{1}{\gamma_t} E[(1 - \overline{\varepsilon}_t) \cdot \ldots \cdot (1 - \overline{\varepsilon}_{m-1}) \cdot \gamma_m \cdot Y_m \,|\, H_t],\ m \ge t,$

$\overline{E}[Y_{t+1} \,|\, H_t] = E[\gamma_{t+1} \cdot Y_{t+1} \,|\, H_t] \,/\, E[\gamma_{t+1} \,|\, H_t] = \overline{E}_t[Y_{t+1}]$.

Ist ε_t deterministisch $\forall$ t, so gilt: $\overline{P} = P$.

Für den Beweis benötigen wir:

11.37 Lemma. $\gamma_t = E[(1 - \overline{\varepsilon}_t) \cdot \ldots \cdot (1 - \overline{\varepsilon}_{m-1}) \cdot \gamma_m \,|\, H_t]$

$= E[(1 - \beta_t^{\top} \cdot \Delta\check{S}_{t+1})^i \cdot \ldots \cdot (1 - \beta_{m-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_m)^i \cdot \gamma_m \,|\, H_t]$, $m \ge t,\ i = 1, 2.$

Beweis von 11.27**.** Es ist nach Definition 11.31 $\gamma_t = (1 - \overline{\varepsilon}_t) \cdot E[\gamma_{t+1} \,|\, H_t] = E[(1 - \overline{\varepsilon}_t) \cdot \gamma_{t+1} \,|\, H_t]$.

Der Beweis von $\gamma_t = E[(1 - \overline{\varepsilon}_t) \cdot \ldots \cdot (1 - \overline{\varepsilon}_{m-1}) \cdot \gamma_m \,|\, H_t]$ mit Induktion ist nun leicht.

Ebenfalls nach 11.31 haben wir für i = 1, 2: $\gamma_t = E[(1 - \beta_t^{\top} \cdot \Delta\check{S}_{t+1})^i \cdot \gamma_{t+1} \,|\, H_t]$

$= E[(1 - \beta_t^{\top} \cdot \Delta\check{S}_{t+1})^i \cdot E[(1 - \beta_{t+1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_{t+2})^i \cdot \gamma_{t+2} \,|\, H_{t+1}] \,|\, H_t]$

$= E[(1 - \beta_t^{\top} \cdot \Delta\check{S}_{t+1})^i \cdot (1 - \beta_{t+1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_{t+2})^i \cdot \gamma_{t+2} \,|\, H_t]$.

Der Beweis der zweiten Identität folgt nun ebenfalls leicht mit Induktion.

Ist ε_t deterministisch $\forall$ t, so gilt mit 11.34: $\gamma_0 = \mathbf{\Pi}_{t=0}^{T-1}(1-\varepsilon_t) = \mathbf{\Pi}_{t=0}^{T-1}(1-\bar{\varepsilon}_t)$. []

Beweis von 11.36. Für t=0 und m=T sieht man daß γ_0 die richtige Normierungskonstante bei $\bar{P}$ ist. Mit der Bayesformel 4.10c erhält man:

$$\begin{aligned}
\bar{E}[Y_m|H_t] &= E[(1-\bar{\varepsilon}_0)\cdot\ldots\cdot(1-\bar{\varepsilon}_{T-1})\cdot Y_m|H_t] \,/\, E[(1-\bar{\varepsilon}_0)\cdot\ldots\cdot(1-\bar{\varepsilon}_{T-1})|H_t] \\
&= E[(1-\bar{\varepsilon}_t)\cdot\ldots\cdot(1-\bar{\varepsilon}_{T-1})\cdot Y_m|H_t] \,/\, E[(1-\bar{\varepsilon}_t)\cdot\ldots\cdot(1-\bar{\varepsilon}_{T-1})|H_t] \\
&= \frac{1}{\gamma_t}\cdot E[(1-\bar{\varepsilon}_t)\cdot\ldots\cdot(1-\bar{\varepsilon}_{T-1})\cdot Y_m|H_t] \\
&= \frac{1}{\gamma_t}\cdot E[(1-\bar{\varepsilon}_t)\cdot\ldots\cdot(1-\bar{\varepsilon}_{m-1})\cdot Y_m\cdot E[(1-\bar{\varepsilon}_m)\cdot\ldots\cdot(1-\bar{\varepsilon}_{T-1})\cdot\gamma_T|H_m]\;|H_t].
\end{aligned}$$

Mit 11.37 folgt nun die zweite Behauptung und die dritte gilt wegen:

$\frac{1}{\gamma_t}(1-\bar{\varepsilon}_t) = 1 \,/\, E[\gamma_{t+1}|H_t]$. []

Das varianz–optimale Martingalmaß ist gemäß 11.11 durch $\Pi(1) =: G_T(\xi^*)$ bestimmt, also durch die Lösung von

(11.38) $$J(0) = \min_\xi E[\{1-G_T(\xi)\}^2] =: E[\{1-G_T(\xi^*)\}^2].$$

Dies ist ein Spezialfall von (11.14) und (11.15) mit x = 0 und $\check{X} \equiv 1$. Nach obigen Überlegungen wissen wir

$$J(0) = \min_\xi E[J_{T-1}(G_{T-1}(\xi),H_{T-1})] .$$

Dabei ist (11.17) und (11.22) zufolge

$$\begin{aligned}
J_{T-1}(v,H_{t-1}) &:= \min_{\vartheta\in\mathbb{R}^d} E[\{v+\vartheta^\top\cdot\Delta\check{S}_T-1\}^2|H_{T-1}] \\
&= E[\{(1-v)\,\beta_{T-1}^\top\cdot\Delta\check{S}_T-(1-v)\}^2|H_{T-1}] \\
&= (1-v)^2\cdot E[\gamma_T\cdot\{1-\beta_{T-1}^\top\cdot\Delta\check{S}_T\}^2|H_{T-1}] = (1-v)^2\cdot\gamma_{T-1}.
\end{aligned}$$

Also haben wir

$$J(0) = \min_\xi E[(1-G_{T-1}(\xi))^2\cdot\gamma_{T-1}] .$$

Dies ist wieder ein Spezialfall von (11.15). Wir wissen nach (11.16), (11.22), (11.31):

$$J(0) = \min_\xi E[J_{T-2}(G_{T-2}(\xi),H_{T-2})]$$

mit

$$\begin{aligned}
J_{T-2}(v,H_{T-2}) &= \min_{\vartheta\in\mathbb{R}^d} E[\gamma_{T-1}\cdot\{v+\vartheta^\top\cdot\Delta\check{S}_{T-1}-1\}^2|H_{T-2}] \\
&= E[\gamma_{T-1}\cdot\{(1-v)\,\beta_{T-2}^\top\cdot\Delta\check{S}_{T-1}-(1-v)\}^2|H_{T-2}] \\
&= (1-v)^2\cdot E[\gamma_{T-1}\cdot\{1-\beta_{T-2}^\top\cdot\Delta\check{S}_{T-1}\}^2|H_{T-2}] = (1-v)^2\cdot\gamma_{T-2}.
\end{aligned}$$

Dies ist auch eine Spezialfall von 11.30. Also haben wir :

$$J(0) = \min_{\xi} E\left[(G_{T-2}(\xi) - 1)^2 \cdot \gamma_{T-2}\right] .$$

Mit Induktion und 11.37 erhält man:

$J(0) = E\left[(G_0(\xi) - 1)^2 \cdot \gamma_0\right]$ mit $\gamma_0 = E\left[(1 - \beta_0^{\top} \cdot \Delta\check{S}_1) \cdot \ldots \cdot (1 - \beta_{T-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_T)\right]$, also:

(11.39) $J(0) = \min_{\xi} E\left[\{1 - G_T(\xi)\}^2\right] = E\left[\{1 - G_T(\xi^*)\}^2\right]$

$= \gamma_0 = E\left[\{(1 - \beta_0^{\top} \cdot \Delta\check{S}_1) \cdot \ldots \cdot (1 - \beta_{T-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_T)\}^i\right]$, i = 1 ,2.

Dabei erhält man

(11.40) $(1 - \beta_0^{\top} \cdot \Delta\check{S}_1) \cdot \ldots \cdot (1 - \beta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_t) =: 1 - G_t(\xi^*)$,

wenn man rekursiv setzt:

(11.41) $\xi_0^* := \beta_0$, $\xi_t^* := (1 - G_t(\xi^*)) \cdot \beta_t$.

Nun ist $\Pi^{\top}(1) = 1 - \Pi(1) = 1 - G_T(\xi^*)$ mit $E\left[\Pi^{\top}(1)\right] = \gamma_0 = 1/\nu$. Mit 11.10 ergibt sich nun

11.42 Satz. Es ist $\tilde{Z}_T = \frac{1}{\gamma_0} \cdot \prod_{m=1}^{T} (1 - \beta_{m-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_m)$ P–Dichte des varianz–optimalen signierten Martingalmaßes. Der Dichteprozeß ist gegeben durch

$$\tilde{Z}_t := (\gamma_t/\gamma_0) \cdot \prod_{m=1}^{t} (1 - \beta_{m-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_m).$$

Dabei ist $\tilde{Z}_t$ offenbar nicht notwendig die Dichte des varianzoptimalen Martingalmaßes für den Horizont t. Für T=1 besteht Übereinstimmug mit 9.24.

Beweis. Es muß nur noch $\tilde{Z}_t = E\left[\tilde{Z}_T \mid H_t\right]$ berechnet werden. Nun ist

$$E\left[\tilde{Z}_T \mid H_t\right] = \frac{1}{\gamma_0} \cdot (1 - \beta_0^{\top} \cdot \Delta\check{S}_1) \cdot \ldots \cdot (1 - \beta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_t) \cdot E\left[(1 - \beta_t^{\top} \cdot \Delta\check{S}_{t+1}) \cdot \ldots \cdot (1 - \beta_{T-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_T) \mid H_t\right]$$

$$= (\gamma_t/\gamma_0) \cdot (1 - \beta_0^{\top} \cdot \Delta\check{S}_1) \cdot \ldots \cdot (1 - \beta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_t) . \ \square$$

Gemäß (10.8), (10.9) und 11.31 haben wir für den Girsanov–Dichteprozeß $\{\hat{Z}_t\}$:

(11.43) $\hat{Z}_t = \prod_{m=1}^{t} \frac{1}{1 - \varepsilon_{m-1}} (1 - \lambda_{m-1}^{\top} \cdot \Delta\check{S}_m)$.

11.44 Korollar. Ist ε_t deterministisch $\forall\ 0 \le t < T$, so gilt: $\hat{Z}_t = \tilde{Z}_t\ \forall$ t, und das minimale Martingalmaß und das varianzoptimale Martingalmaß stimmen überein.

Beweis. Ist ε_t deterministisch $\forall$ t, so wissen wir nach 11.34, daß auch γ_t deterministisch ist und $\beta_t = \lambda_t$, $\bar{\varepsilon}_t = \varepsilon_t$ und $\gamma_{t-1} = (1 - \varepsilon_{t-1}) \cdot \gamma_t$ gilt $\forall$ t. Damit folgt auch:
$\gamma_0 = (1 - \varepsilon_0) \cdot \ldots \cdot (1 - \varepsilon_{t-1}) \cdot \gamma_t$. $\square$

11.45 Proposition. Sind $\check{R}_{t+1}$ und H_t stochastisch unabhängig, so ist ε_t deterministisch. Die Voraussetzung gilt insbesondere $\forall$ t, wenn $(r_1,R_1),....,(r_T,R_T)$ unabhängig sind und $H_t := (r_1,R_1,....,r_t,R_t)$ oder $H_t := (B_1,S_1,....,B_t,S_t)$ gewählt wird.

Beweis. Es ist nach 10.5:

$1 - \varepsilon_t = E[1 - \lambda_t^\top \cdot \Delta\check{S}_{t+1} \,|\, H_t] = E[\{1 - \lambda_t^\top \cdot \Delta\check{S}_{t+1}\}^2 \,|\, H_t] = \min_\vartheta E[\{1 - \vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_{t+1}\}^2 \,|\, H_t]$

$= \min_\vartheta E[\{1 - \sum_{k=1}^d (\vartheta^k/\check{S}_t^k) \cdot \Delta\check{S}_{t+1}^k\}^2 \,|\, H_t] = \min_\vartheta E[\{1 - \sum_{k=1}^d \vartheta^k \cdot \check{R}_{t+1}^k\}^2 \,|\, H_t]$

$= \min_\vartheta E[\{1 - \sum_{k=1}^d \vartheta^k \cdot \check{R}_{t+1}^k\}^2]$.

Dabei wurde benutzt, daß bei festem ω_t mit ϑ^k auch $\vartheta^k/\check{S}_t^k(\omega_t)$ die reelle Zahlengerade $\mathbb{R}$ durchläuft. Die Aussage über die Unabhängigkeit von $\check{R}_{t+1}$ und $H_t = (r_1,R_1,....,r_t,R_t)$ folgt aus

$$1 + \check{R}_{t+1}^k = \check{S}_{t+1}/\check{S}_t = \frac{1}{1+r_{t+1}} \cdot S_{t+1}/S_t = \frac{1}{1+r_{t+1}} \cdot (1 + R_{t+1}^k).$$

Ferner ist $(B_1,S_1,....,B_t,S_t)$ eine Funktion von $(r_1,R_1,....,r_t,R_t)$ und umgekehrt. []

11.46 Bemerkung. Es ist $\{\beta_t\}$ der lokale Anpassungsprozeß $\{\bar{\lambda}_t\}$ unter $\bar{P}$. Denn wir haben nach 11.36: β_t ist Minimumstelle von $\vartheta \mapsto \bar{E}[\{\vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_t - 1\}^2 \,|\, H_{t-1}]$, während λ_t gemäß 10.5 eine Minimumstelle ist von $\vartheta \mapsto E[\{\vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_t - 1\}^2 \,|\, H_{t-1}]$. Ferner ist nach 11.31 und 11.36:

$1 - \varepsilon_t = E[1 - \lambda_t^\top \cdot \Delta S_{t+1} \,|\, H_t]$ und $1 - \bar{\varepsilon}_t = E[\gamma_t(1 - \beta_t^\top \cdot \Delta S_{t+1}) \,|\, H_t]/E[\gamma_t(1 - \beta_t^\top \cdot \Delta S_{t+1}) \,|\, H_t] =$

$\bar{E}[(1 - \beta_t^\top \cdot \Delta S_{t+1}) \,|\, H_t]$; also entspricht $\bar{\varepsilon}_t$ unter $\bar{P}$ dem Wert ε_t unter P. []

Wir kommen jetzt zur globalen Risikominimierung bei einem beliebigen Zahlungsanspruch X. Mit Blick auf 11.26 setzen wir

11.47 Definition. Sei $\bar{X}_T := \check{X}$. Die folgenden Größen seien nun wie in 11.26 definiert: $\bar{L}_t$, $\bar{X}_t$ (rekursiv), $\bar{\xi}_t$ und $\Delta\bar{N}_t$.

Dann schreibt sich (11.14) in der Form (11.15) als

(11.48a)
$$J(x) = \min_\xi E[\gamma_T \cdot \{x + G_T(\xi) - \bar{X}_T\}^2]$$
$$= \min_\xi E[\min_\vartheta E[\gamma_T \cdot \{x + G_{T-1}(\xi) + \vartheta^\top \cdot \Delta\check{S}_T - \check{X}\}^2 \,|\, H_{T-1}]].$$
$$= \min_\xi E[E[\gamma_T \cdot \{x + G_{T-1}(\xi) + \vartheta_{T-1}^{*\top}(x + G_{T-1}(\xi)) \cdot \Delta\check{S}_T - \check{X}\}^2 \,|\, H_{T-1}]] .$$

Dabei ist in Übereinstimmung mit (11.28):

(11.48b)
$$\vartheta_t^*(v) = \bar{\zeta}_t - v\,\beta_t.$$

Wir wissen nun wegen (11.30):

$$J(x) = \min_{\xi} E\left[\gamma_{T-1} \cdot \{x + G_{T-1}(\xi) - \overline{X}_{T-1}\}^2\right] + E\left[\gamma_T \cdot \{\Delta\overline{N}_T\}^2\right].$$

Mit vollständiger Induktion erhält man:

(11.49) $$J(x) = \min_{\xi} E\left[\gamma_t \cdot \{x + G_t(\xi) - \overline{X}_t\}^2\right] + \sum_{m=t+1}^{T} E\left[\gamma_m \cdot \{\Delta\overline{N}_m\}^2\right];$$

(11.50) $$J(x) = \gamma_0 \cdot \{x - \overline{X}_0\}^2 + \sum_{m=1}^{T} E\left[\gamma_m \cdot \{\Delta\overline{N}_m\}^2\right].$$

Wir definieren nun rekursiv:

11.51 Definition. $\breve{V}_0^* := x$, $\xi_0^* := \vartheta_0^*(\breve{V}_0^*) = \overline{\zeta}_0 - \breve{V}_0^* \beta_0$,

$\breve{V}_t^* := \breve{V}_{t-1}^* + \xi_{t-1}^{*\top} \cdot \Delta\breve{S}_t$, $\xi_t^* := \vartheta_t^*(\breve{V}_t^*) = \overline{\zeta}_t - \breve{V}_t^* \beta_t$.

Somit ist

(11.52) $$\breve{V}_t^* = x + G_t(\xi^*).$$

Aus der Theorie der dynamischen Optimierung weiß man, daß (ξ_t^*) der optimale Plan für die Aufgabe (11.48a) $\hat{=}$ (11.14) ist. Dies soll direkt gezeigt werden. Gemäß (11.28c) haben wir $v + \vartheta_{t-1}^*(v)^\top \cdot \Delta\breve{S}_t - \bar{X}_t = (v - \overline{X}_{t-1})(1 - \beta_{t-1}^\top \cdot \Delta\breve{S}_t) - \Delta\overline{N}_t$. Setzt man $v = \breve{V}_{t-1}^*$, so ergibt sich:

(11.53) $$\breve{V}_t^* - \bar{X}_t = (\breve{V}_{t-1}^* - \overline{X}_{t-1}) \cdot (1 - \beta_{t-1}^\top \cdot \Delta\breve{S}_t) - \Delta\overline{N}_t.$$

Daraus läßt sich auch (11.40) gewinnen, da dort $\Delta\overline{N}_t = 0$ gilt. Im vorliegenden allgemeineren Fall erhalten wir daraus

$$E\left[\gamma_t \cdot \{\breve{V}_t^* - \bar{X}_t\}^2\right] = E\left[\{\breve{V}_{t-1}^* - \bar{X}_{t-1}\}^2 E\left[\gamma_t \cdot \{1 - \beta_{t-1}^\top \cdot \Delta\breve{S}_t\}^2 \,|\, H_{t-1}\right]\right] + E\left[\gamma_t \cdot \{\Delta\overline{N}_t\}^2\right]$$
$$- 2 \cdot E\left[(\breve{V}_{t-1}^* - \overline{X}_{t-1}) \cdot E\left[\gamma_t \cdot (1 - \beta_{t-1}^\top \cdot \Delta\breve{S}_t) \cdot \Delta\overline{N}_t \,|\, H_{t-1}\right]\right].$$

Gemäß 11.27b,d verschwindet der letzte Term. Somit ergibt sich mit 11.27:

$$E\left[\gamma_t \cdot \{\breve{V}_t^* - \bar{X}_t\}^2\right] = = E\left[\gamma_{t-1} \cdot \{\breve{V}_{t-1}^* - \bar{X}_{t-1}\}^2\right] + E\left[\gamma_t \cdot \{\Delta\overline{N}_t\}^2\right].$$

Daraus folgt mit Induktion:

(11.54) $$E\left[\gamma_t \cdot \{\breve{V}_t^* - \bar{X}_t\}^2\right] = \gamma_0 \cdot (x - \overline{X}_0) + \sum_{m=1}^{t} E\left[\gamma_m \cdot \{\Delta\overline{N}_m\}^2\right].$$

Zusammen mit (11.50) erhalten wir wegen $\breve{V}_T^* - \bar{X}_T = x + G_T(\xi^*) - \breve{X}$:

11.55 Satz. Der Plan ξ^* ist optimal (für (11.14)), genauer gilt:

$$J(x) = E\left[\{x + G_T(\xi^*) - \breve{X}\}^2\right] = \min_{\xi} E\left[\{x + G_T(\xi) - \breve{X}\}^2\right].$$

Die Aufgabe (11.12), (11.14) besagt:

$$J(x) := \min_\xi E\left[\{x + G_T(\xi) - \check{X}\}^2\right] = \min_\xi E\left[\{G_T(\xi) - (\check{X} - x)\}^2\right]$$
$$= E\left[\{\Pi(\check{X} - x) - (\check{X} - x)\}^2\right] .$$

Dabei ist $\Pi(\check{X} - x) = \Pi(\check{X}) - x \cdot \Pi(1)$ mit

$$\Pi(1) = 1 - (1 - \beta_0^\top \cdot \Delta\check{S}_1) \cdot \ldots \cdot (1 - \beta_{T-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_T)$$

nach (11.40). Deshalb genügt es, $\Pi(\check{X})$ zu berechnen, also in der Aufgabe (11.14) den Fall x=0 zu betrachten.

11.56 Bemerkung. Nach 11.46 und 11.47 sowie 10.8 und 11.26 entspricht die Zva $\overline{L}_t$ under $\overline{P}$ der Zva $\hat{L}_t$ unter P. In Hinblick auf 11.26 und 11.36 sowie 10.12d und 10.14 entspricht somit die Zva $\overline{X}_t$ under $\overline{P}$ der Zva X_t unter P. Damit bestimmt $\{\overline{\xi}_t\}$, erklärt wie in 11.26 über

$$\overline{\xi}_t := \overline{\zeta}_t - \overline{X}_t \, \beta_t$$

eine Föllmer–Schweizer–Zerlegung $\check{X} = \overline{X}_0 + G_T(\overline{\xi}) + \overline{N}_T$ unter $\overline{P}$ wie in 10.15. Wir haben

(11.57) $$\xi_t^* = \overline{\zeta}_t - \check{V}_t^* \, \beta_t = \overline{\xi}_t + (\overline{X}_t - \check{V}_t^*) \, \beta_t$$

mit $\overline{X}_t - \check{V}_t^*$ wie in (11.53). []
Aus (11.50) und 11.13 erhalten wir sofort:

11.58 Korollar. Es ist $\overline{X}_0 = E\left[\tilde{Z}_T \cdot \check{X}\right]$ und

$$J = \min_{(x,\xi)\in\mathbb{R}\times\Xi} E\left[\{x + G_T(\xi) - \check{X}\}^2\right] = \min_{x\in\mathbb{R}} J(x) = J(\overline{X}_0) = \sum_{m=1}^T E\left[\gamma_m \cdot \{\Delta\overline{N}_m\}^2\right] .$$

Das optimale ξ in 11.58 läßt sich dabei wie oben ermitteln, indem man $x = \overline{X}_0 = E\left[\tilde{Z}_T \cdot \check{X}\right]$ setzt.

11.59 Bemerkung. Wir betrachten jetzt die Aufgabe:

(11.59a) minimiere $\mathrm{Var}\left[\check{X} - G_T(\xi)\right]$ oder minimiere $\mathrm{Var}\left[X - V_T^\xi(x)\right]$ über $\xi \in \Xi$.

Ist $\check{X}$ eine Konstante, so ist das Minimum offenbar Null und wird durch $\xi \equiv 0$ angenommen.
Es ergibt sich eine Verbindung zu (11.12) und (11.58), wenn man noch für $(x,\xi) \in \mathbb{R}\times\Xi$ die folgende Nebenbedingung betrachtet

(11.59b) $E\left[x + G_T(\xi)\right] = E\left[\check{X}\right]$, d.h. $E\left[V_T^\xi(x)\right] = E\left[X\right]$.
Dann gilt:

(x*,ξ*) löst genau dann die Optimierungsaufgabe (11.12), wenn ξ* die Aufgabe (11.59a) löst und (x*,ξ*) die Nebenbedingung (11.59b) erfüllt.

Beweis. a) Sei (x*,ξ*) Lösung von (11.12) und $\bar{x} := E\left[\check{X} - G_T(\xi^*)\right]$. Wir zeigen $\bar{x} = x^*$, d.h. (x*,ξ*) erfüllt (11.59b). Dies folgt aus:

$E\left[\{\check{X} - x^* - G_T(\xi^*)\}^2\right] \le E\left[\{\check{X} - x - G_T(\xi^*)\}^2\right] = E\left[\{\check{X} - \bar{x} - G_T(\xi^*)\}^2\right] + \{\bar{x} - x\}^2$ für $x \in \mathbb{R}$.
Andererseits folgt aus (11.59b):

$E\left[\{\check{X} - x - G_T(\xi)\}^2\right] = Var\left[\check{X} - x - G_T(\xi)\right] = Var\left[\check{X} - G_T(\xi)\right]$.

b) Löse nun ξ^* die Aufgabe (11.59a) und erfülle (x^*,ξ^*) die Nebenbedingung (11.59b).

Dann gilt für $(x,\xi) \in \mathbb{R}\times\Xi$: $E\left[\{\check{X} - x - G_T(\xi)\}^2\right] \ge Var\left[\check{X} - x - G_T(\xi)\right] = Var\left[\check{X} - G_T(\xi)\right]$

$\ge Var\left[\check{X} - G_T(\xi^*)\right] = E\left[\{\check{X} - x^* - G_T(\xi^*)\}^2\right]$, wie in a) gezeigt wurde.

c) Sei umgekehrt (x^*,ξ^*) Lösung von (11.12), so erfüllt (x^*,ξ^*) wieder (11.59b) und man hat nach (a): $Var\left[\check{X} - G_T(\xi^*)\right] = E\left[\{\check{X} - x^* - G_T(\xi^*)\}^2\right] \le E\left[\{\check{X} - x - G_T(\xi)\}^2\right] = Var\left[\check{X} - G_T(\xi)\right]$

bei Wahl von $x = E\left[\check{X} - G_T(\xi)\right]$ für alle $\xi \in \Xi$. []

Die Optimierungsaufgabe (11.12) in (x,ξ) ist also entkoppelt worden in eine Optimierungsaufgabe für ξ und eine Nebenbedingung für x. []

Wir wenden uns nun der in §9 formulierten Optimierungsaufgabe (9.2) und (9.6) zu. Als Diskontierung wählen wir wieder $1/B_T$ deterministisch. Dann lautet (9.2) und (9.6) nun

(11.60a**)** minimiere $Var\left[V_T^{\xi}(x)\right]$ über $\xi \in \Xi$
unter der Nebenbedingung $E\left[V_T^{\xi}(x)\right] = x \cdot B_T \cdot (1+\delta)$.

(11.60b**)** minimiere $Var\left[G_T(\xi)\right]$ über $\xi \in \Xi$
unter der Nebenbedingung $E\left[G_T(\xi)\right] = \delta \cdot x$.

Für einen globalen Anpassungsprozeß $\{\beta_t\}$ ist dann $\{c\,\xi_t^*\}$ mit $\{\xi_t^*\}$ wie in (11.41) bei richtiger Wahl der Konstanten c ein Kandidat für die Lösung. Nach 11.27 und (11.40) gilt dabei:

$E\left[G_T(\xi^*)\right] = 1 - \gamma_0$.

11.61 Lemma. Ist $\{\xi_t^*\}$ wie in (11.41) gewählt, so gilt für $c \in \mathbb{R}$:
$Var\left[G_T(c\,\xi^*)\right] \le Var\left[G_T(\xi)\right]$
für alle Pläne ξ mit $E\left[G_T(\xi)\right] = E\left[G_T(c\,\xi^*)\right] = c \cdot \left[1 - \gamma_0\right]$.

Beweis (wie bei 9.43)**.** Mit $E\left[1 - G_T(\xi^*)\right] = \gamma_0$ erhält man

$Var\left[G_T(\xi)\right] = Var\left[c - G_T(\xi)\right] = c^2 \cdot E\left[\{1 - G_T(\frac{1}{c}\,\xi)\}^2\right] - c^2 \cdot {\gamma_0}^2$
$\ge c^2 \cdot E\left[\{1 - G_T(\xi^*)\}^2\right] - c^2 \cdot {\gamma_0}^2 = c^2 \cdot Var\left[G_T(\xi^*)\right] = Var\left[G_T(c\,\xi^*)\right]$. []

11.62 Satz. Als Lösung der Optimierungsaufgabe (11.60) ergibt sich ξ^{δ} mit

$$\xi_t^{\delta} := \delta \cdot \frac{x}{E\left[G_T(\xi^*)\right]}\,\xi_t^* = x \cdot \frac{\delta}{1 - \gamma_0}\,\xi_t^*.$$

Beweis: Setze $c := \delta \cdot \frac{x}{E[G_T(\xi^*)]}$; dann gilt: $E[G_T(c\,\xi^*)] = c\,E[G_T(\xi^*)] = \delta \cdot x$.
Die Nebenbedingung aus (11.60) ist also gleichbedeutend mit $E[G_T(\xi)] = \delta \cdot x = E[G_T(c\,\xi^*)]$ und wird von ξ^δ erfüllt. Nun kann Lemma 11.61 unmittelbar angewendet werden. []

11.63 Korollar. Als Lösung der Optimierungsaufgabe (11.59) ergibt sich mit ν wie in 9.24:

$$\xi^\delta := \delta \cdot \frac{\nu}{\nu-1} \cdot x\,\xi^* \quad \text{und} \quad V_T^{\xi^\delta}(x) = B_T \cdot \frac{x}{\nu-1}\left\{\nu \cdot (1+\delta) - 1 - \delta \cdot \tilde{Z}_T\right\}.$$

Beweis. Es gilt nach 11.11: $\frac{1}{E[G_T(\xi^*)]} = \frac{1}{1-\gamma_0} = \frac{\nu}{\nu-1}$ sowie $\tilde{Z}_T = \nu - \nu\, G(\xi^*)$. Daraus ergibt sich die Darstellung von ξ^ρ und:

$$V_T^{\xi^\rho}(x) = B_T \cdot \{x + G_T(\xi^\rho)\} = B_T \cdot x \cdot \left\{1 + \delta \frac{\nu}{\nu-1} G_T(\xi^*)\right\}$$
$$= B_T \cdot x \cdot \left\{1 + \delta \frac{1}{\nu-1}\left[\nu - \tilde{Z}_T\right]\right\} = B_T \cdot x \cdot \left\{1 + \delta \frac{\nu}{\nu-1} - \delta \frac{1}{\nu-1}\tilde{Z}_T\right\}$$
$$= B_T \cdot \frac{x}{\nu-1}\left\{(\nu-1) + \delta \cdot \nu - \delta \cdot \tilde{Z}_T\right\} = B_T \cdot \frac{x}{\nu-1}\left\{\nu \cdot (1+\delta) - 1 - \delta \cdot \tilde{Z}_T\right\}. \; []$$

Existiert ein Investmentfond (*mutual fund*), der für ein c>0 gerade $c \cdot \xi_t^k$ Anteile z.Zt. t an dem k–ten Wertpapier hält , $\forall\ 1 \le k \le d$, so erhält man ξ^ρ, indem man $\frac{1}{c} \cdot \delta \cdot \frac{\nu}{\nu-1} \cdot x$ Anteile an dem Investmentfond hält. Also kann man für alle ρ einen optimalen Investmentplan allein durch Investititon in den Investmentfond und das Sparbuch erzeugen. Dies nennt man das *'mutual fund'-Prinzip*.

11.64 Bemerkung. Man kann leicht eine Beziehung von Aufgabe (11.38), (11.39) zur Nutzenmaximierung herstellen. Ein Investor kann seine Präferenzen über eine *Nutzenfunktion* $U : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ formulieren. Für ihn stellt sich die Optimierungsaufgabe:

(11.65) maximiere $E[U(V_T^\xi(x))]$ über alle Pläne ξ.

Ist U konkav, so wird durch U eine *Risikoaversion* ausgedrückt. Nach der Jensenschen Ungleichung gilt dann nämlich: $E[U(V_T^\xi(x))] \le U(E[V_T^\xi(x)])$. Der Investor zieht also einen sicheren Wert $E[V_T^\xi(x)]$ einem unsicheren Wert $V_T^\xi(x)$ vor.
Wählt man nun $U(v) := -v^2 + 2b \cdot v$, so erhält man eine konkave Nutzenfunktion. Diese ist allerdings nicht monoton steigend. Dennoch wird sie für manche Anwendungen akzeptiert.
Wegen $U(V_T^\xi(x)) = -\{V_T^\xi(x) - b\}^2 + b^2 = -(1+r)^2 \cdot \{x + G(\xi) - \frac{b}{1+r}\}^2 + b^2$ ist offenbar (11.65) mit $\breve{b} \equiv \frac{b}{B_T}$ äquivalent zu

(11.66) minimiere $E[\{V_T^\xi(x) - b\}^2]$ oder minimiere $E[\{x + G_T(\xi) - \breve{b}\}^2]$ über $\xi \in \Xi$. []

Gemäß 11.11 hat die varianz–optimale signierte Martingaldichte die Gestalt:

(11.67) $\tilde{Z}_T = \nu \cdot [1 + G(-\xi^*)] = \frac{\nu}{B_T} V_T^{-\xi^*}(1)$ mit $\nu \geq 1$.

Diese Beziehung hat weitere Konsequenzen.

11.68 Korollar. Bezeichnet $\tilde{R}\tilde{P} := (V_T^{-\xi^*}(1) - B_T)/1$ die Risikoprämie bei Start mit der Anfangsinvestition 1 und Benutzung des Planes $-\xi^*$, so gilt für $(x,\xi) \in \mathbb{R}\times\Xi$ und die zugehörige Risikoprämie $RP := (V_T^{\xi}(x) - B_T \cdot x)/x$:

$$E[RP] = E[\tilde{R}\tilde{P}] \cdot Cov(RP,\tilde{R}\tilde{P})/Var[\tilde{R}\tilde{P}] .$$

Beweis. Es sei $\tilde{V} := V_T^{-\xi^*}(1)$ und $V := V_T^{\xi}(x)$. Dann gilt 11.9:

$Cov(V,\tilde{Z}_T) = E[V \cdot \tilde{Z}_T] - E[V] \cdot E[\tilde{Z}_T] = E[B_T \cdot (x + G(\xi)) \cdot \tilde{Z}_T] - E[V] = B_T \cdot x - E[V]$,
andererseits mit (11.67): $Cov(V,\tilde{Z}_T) = \frac{\nu}{B_T} \cdot Cov(V,\tilde{V})$, also

$$E[V] - B_T \cdot x = -\frac{\nu}{B_T} \cdot Cov(V,\tilde{V}).$$

Insbesondere hat man für den Spezialfall $(x,\xi) = (1,-\xi^*)$:

$$E[\tilde{V}] - B_T = -\frac{\nu}{B_T} \cdot Var(\tilde{V}).$$

Damit ergibt sich $E[V] - B_T \cdot x = (E[\tilde{V}] - B_T) \cdot Cov(V,\tilde{V})/Var(\tilde{V})$ oder

$$(E[V] - B_T \cdot x)/x = (E[\tilde{V}] - B_T) \cdot Cov(\tfrac{1}{x}V,\tilde{V})/Var(\tilde{V}) .$$

Dabei ist

$$Cov(\tfrac{1}{x}V,\tilde{V})/Var(\tilde{V}) = Cov(\tfrac{1}{x}(V-B_T \cdot x),(\tilde{V}-B_T))/Var(\tilde{V}-B_T) = Cov(RP,\tilde{R}\tilde{P})/Var[\tilde{R}\tilde{P}] . \ []$$

Defininiert man $R := (V_T^{\xi}(x) - x)/x$ als die Portfoliorendite bei Start mit der Anfangsinvestition x und Benutzung des Planes ξ und $\tilde{R} := (V_T^{-\xi^*}(1) - 1)/1$, so gilt:

(11.69) $Cov(RP,\tilde{R}\tilde{P})/Var[\tilde{R}\tilde{P}] = Cov(R,\tilde{R})/Var[\tilde{R}]$.

11.70 Definition. In der **CAPM**–Theorie (**C**apitel **A**sset **P**ricing **M**odel) wird der Quotient $Cov(R,\tilde{R})/Var[\tilde{R}] = Cov(RP,\tilde{R}\tilde{P})/Var[\tilde{R}\tilde{P}]$ das **Beta** von (x,ξ) bzgl. $(1,-\xi^*)$ genannt. Wegen der Eigenschaft in 11.68 heißt $(1,-\xi^*)$ oder ein Vielfaches davon auch **Marktportfolio**.

Spezialfall: γ_t deterministisch
ε_t deterministisch,
$Z \equiv c$.

Alternative: lokal optimal

$$\min_{\vartheta} E_{t-1}\left[\{c - \vartheta^{\top}\cdot\Delta\check{S}_t - \xi_t^{o\top}\cdot\Delta\check{S}_{t+1} - ... - \xi_{T-1}^{o\top}\cdot\Delta\check{S}_T\}^2\right]$$
$$= \min_{\vartheta} E_{t-1}\left[\{c - \vartheta^{\top}\cdot\Delta\check{S}_t - G_{t,T}(\xi^o)\}^2\right]$$

Lemma. Für $m \geq t$: $E_{t-1}\left[\{Z - \vartheta^{\top}\cdot\Delta\check{S}_t\}^2\right]$
$= E_{t-1}\left[\{Z - E[Z\,|\,H_m]\}^2\right] + E_{t-1}\left[\{E[Z\,|\,H_m] - \vartheta^{\top}\cdot\Delta\check{S}_t\}^2\right]$.

Beweis. $E_{t-1}\left[\{Z - E[Z\,|\,H_m]\}\cdot\{E[Z\,|\,H_m] - \vartheta^{\top}\cdot\Delta\check{S}_t\}\right] = E_{t-1}\left[\,E[...\,|\,H_m]\right] = 0.$ []

Lemma Falls $\xi_t^{o\top}\cdot\mu_t,...,\xi_{T-1}^{o\top}\cdot\mu_{T-1}$ deterministisch :

$\Pi_{t-1}(c - \xi_t^{o\top}\cdot\Delta\check{S}_{t+1} - ... - \xi_{T-1}^{o\top}\cdot\Delta\check{S}_T) = \Pi_{t-1}(c - \xi_t^{o\top}\cdot\mu_t - ... - \xi_{T-1}^{o\top}\cdot\mu_{T-1})$, d.h.
ξ_{t-1}^o Minimumstelle von $E_{t-1}\left[\{c - \vartheta^{\top}\cdot\Delta\check{S}_t - \xi_t^{o\top}\cdot\Delta\check{S}_{t+1} - ... - \xi_{T-1}^{o\top}\cdot\Delta\check{S}_T\}^2\right]$
$\Leftrightarrow \xi_{t-1}^o$ Minimumstelle von $E_{t-1}\left[\{c - \vartheta^{\top}\cdot\Delta\check{S}_t - \xi_t^{o\top}\cdot\mu_t - ... - \xi_{T-1}^{o\top}\cdot\mu_{T-1}\}^2\right]$.

Beweis: Behauptung: ξ_{t-1}^o Minimumstelle von
$E_{t-1}\left[\{c - \vartheta^{\top}\cdot\Delta\check{S}_t - \xi_t^{o\top}\cdot\Delta\check{S}_{t+1} - ... - \xi_{T-1}^{o\top}\cdot\Delta\check{S}_T\}^2\right]$
$\Leftrightarrow \xi_{t-1}^o$ Minimumstelle von
$E_{t-1}\left[\{c - \vartheta^{\top}\cdot\Delta\check{S}_t - \xi_t^{o\top}\cdot\Delta\check{S}_{t+1} - \xi_{m-1}^{o\top}\cdot\Delta\check{S}_m - \xi_m^{o\top}\cdot\mu_m ... - \xi_{T-1}^{o\top}\cdot\mu_{T-1}\}^2\right]$.
Gilt für $m = T, T-1$ nach dem Lemma.

"$m \to m-1$" ξ_{t-1}^o Minimumstelle von
$E_{t-1}\left[\{c - \vartheta^{\top}\cdot\Delta\check{S}_t - \xi_t^{o\top}\cdot\Delta\check{S}_{t+1} - \xi_{m-1}^{o\top}\cdot\Delta\check{S}_m - \xi_m^{o\top}\cdot\mu_m ... - \xi_{T-1}^{o\top}\cdot\mu_{T-1}\}^2\right]$
$\Leftrightarrow \xi_{t-1}^o$ Minimumstelle von
$E_{t-1}\left[\{E\left[c - \xi_t^{o\top}\cdot\Delta\check{S}_{t+1} - \xi_{m-1}^{o\top}\cdot\Delta\check{S}_m - \xi_m^{o\top}\cdot\mu_m ... - \xi_{T-1}^{o\top}\cdot\mu_{T-1}\,|\,H_{m-1}\right] - \vartheta^{\top}\cdot\Delta\check{S}_t\}^2\right]$. []

Proposition. (a) $\xi_{t-1}^o = c\cdot(1-\varepsilon_t)\cdot...\cdot(1-\varepsilon_{T-1})\cdot\lambda_{t-1}$,

(b) $\xi_{t-1}^{o\top}\cdot\mu_{t-1} = c\cdot(1-\varepsilon_t)\cdot...\cdot(1-\varepsilon_{T-1})\cdot\varepsilon_{t-1}$ deterministisch,

(c) $E\left[G_{t-1,T}(\xi^o)\right] = c\cdot\left[1 - (1-\varepsilon_{t-1})\cdot...\cdot(1-\varepsilon_{T-1})\right]$

Beweis."t = T": ξ^{o}_{T-1} Minimumstelle von $E_{T-1}\left[\{c - \vartheta^{\top}\cdot\Delta\check{S}_T\}^2\right] \Leftrightarrow \xi^{o}_{T-1} = c\,\lambda_{T-1}$.

$E\left[G_{T,T}(\xi^{o})\right] = \xi^{o\top}_{T-1}\cdot\mu_{T-1} = c\,\lambda^{\top}_{T-1}\cdot\mu_{T-1} = c\,\varepsilon_{T-1} = c\cdot(1-(1-\varepsilon_{T-1}))$ deterministisch,

"T–1,...,t+1 → t" Sei $\xi^{o\top}_{t}\cdot\mu_t,\ldots,\xi^{o}_{T-1}{}^{\top}\cdot\mu_{T-1}$ deterministisch. Gemäß Lemma:

ξ^{o}_{t-1} Minimumstelle von $E_{t-1}\left[\{c - \vartheta^{\top}\cdot\Delta\check{S}_t - \xi^{o\top}_{t}\cdot\Delta\check{S}_{t+1} - \ldots - \xi^{o\top}_{T-1}\cdot\Delta\check{S}_T\}^2\right]$

$\Leftrightarrow \xi^{o}_{t-1}$ Minimumstelle von $E_{t-1}\left[\{c - \vartheta^{\top}\cdot\Delta\check{S}_t - \xi^{o\top}_{t}\cdot\mu_t - \ldots - \xi^{o\top}_{T-1}\cdot\mu_{T-1}\}^2\right]$

$\Leftrightarrow \xi^{o}_{t-1} = (c - \xi^{o\top}_{t}\cdot\mu_t - \ldots - \xi^{o\top}_{T-1}\cdot\mu_{T-1})\,\lambda_{t-1}$

$= (c - E\left[G_{t,T}(\xi^{o})\right])\,\lambda_{t-1} = c\cdot(1-\varepsilon_t)\cdot\ldots\cdot(1-\varepsilon_{T-1})\,\lambda_{t-1}$.

$\xi^{o\top}_{t-1}\cdot\mu_{t-1} = c\cdot(1-\varepsilon_t)\cdot\ldots\cdot(1-\varepsilon_{T-1})\,\varepsilon_{t-1}$.

$E\left[G_{t-1,T}(\xi^{o})\right] = \xi^{o\top}_{t-1}\cdot\mu_{t-1} + E\left[G_{t-1,T}(\xi^{o})\right]$

$= c\cdot(1-\varepsilon_t)\cdot\ldots\cdot(1-\varepsilon_{T-1})\,\varepsilon_{t-1} + c\cdot\left[1-(1-\varepsilon_t)\cdot\ldots\cdot(1-\varepsilon_{T-1})\right]$

$= c\cdot\left[1-(1-\varepsilon_t)\cdot\ldots\cdot(1-\varepsilon_{T-1})\cdot(1-\varepsilon_{t-1})\right]$. []

Korollar. $E\left[G_T(\xi^{o})\right] = c\cdot\left[1-(1-\varepsilon_0)\cdot\ldots\cdot(1-\varepsilon_{T-1})\right] = E\left[G_T(\xi^{*})\right]$.

$E\left[G_t(\xi^{o})\right] = E\left[G_T(\xi^{o})\right] - E\left[G_{t,T}(\xi^{o})\right] = c\cdot\left[1-(1-\varepsilon_0)\cdot\ldots\cdot(1-\varepsilon_{T-1})\right]$

$- c\cdot\left[1-(1-\varepsilon_t)\cdot\ldots\cdot(1-\varepsilon_{T-1})\right] = c\cdot\left[(1-\varepsilon_t)\cdot\ldots\cdot(1-\varepsilon_{T-1}) - (1-\varepsilon_0)\cdot\ldots\cdot(1-\varepsilon_{T-1})\right]$

$= c\cdot(1-\varepsilon_t)\cdot\ldots\cdot(1-\varepsilon_{T-1})\left[1-(1-\varepsilon_0)\cdot\ldots\cdot(1-\varepsilon_{t-1})\right]$.