Kontrolle von stochastischen Prozessen
(Stochastische Finanzmärkte)

Manfred Schäl, Inst. f. Angewandte Mathematik, Univ. Bonn.

Wintersemester 1997/98.

§1 Einführung.

Es werden zeitdiskrete Modelle zugrundegelegt mit einem endlichen **Zeithorizont** $T \in \mathbb{N}$. Der Markt wird durch die folgende **Situation** beschrieben:

> Es besteht die Anlagemöglichkeit in 1+d Wertpapiere zu den Zeitpunkten t = 0,1,...,T:
>
> Eine (risikobehaftete) Anlage von ϑ^k Anteilen in das kursabhängige Wertpapier (**stock**) [z.B. Aktien oder Devisen] mit Index $k \in \{0,...,d\}$ mit dem Kurs $S_t^k > 0$ kostet z.Zt. t=0 $\vartheta^k \cdot S_0^k$ DM und hat z.Zt t den Wert $\vartheta^k \cdot S_t^k$. Die Anlage von $\vartheta^\top = (\vartheta^0,...,\vartheta^d)$ kostet also z.Zt. t=0 $\vartheta^\top \cdot S_0 = \sum_{k=0}^d \vartheta^k \cdot S_0^k$ DM und hat z.Zt t den Wert $\vartheta^\top \cdot S_t$ mit $S_t = (S_t^0,...,S_t^d)^\top$. $\{S_0,...,S_T\}$ heißt der **Preisprozeß**.

Das 0–te Wertpapier spielt eine Sonderrolle, nämlich die Rolle eines Numeraires. Die Preisentwicklung des k–ten Wertpapiers wird in Beziehung zu ihm gesetzt, d.h. durch die Preisentwicklung des 0–ten Wertpapiers diskontiert. Man soll sich die 0–te Anlage als (risikolose) Anlage in einem **Sparbuch** (**bond**) vorstellen mit einem Zinssatz für kurzfristige Anlagen. Es empfiehlt sich deshalb auch die Darstellung

(1.1) $$S_t^0 := B_t := \prod_{m=1}^t (1+r_m).$$

Dann ist r_t der Zinssatz für die t–te Periode [t–1,t). Dabei wird angenommen, daß der gleiche Zinssatz r_t gilt, wenn man Geld anlegt ($\vartheta_{t-1}^0 > 0$) und wenn man Geld leiht ($\vartheta_{t-1}^0 < 0$). Dies ist natürlich eine Modelleinschränkung. Die Unterscheidung zwischen risikolosen und risikobehafteten Anlagen ist nicht nötig. Man kann sich unter B_t auch den Kurs eines beliebigen Wertpapiers denken. So können auch die Zinssätze r_t negative Zufallsvariablen sein, allerdings mit $1+r_t > 0$. Wir werden aber bei der 0–ten Anlage der Einfachheit halber immer vom Sparbuch sprechen. Die Darstellung (1.1) impliziert insbesondere die folgende Normierung, die man o.E. stets annehmen kann:

(1.2) $$S_0^0 = B_0 \equiv 1.$$

Modell. Die **Marktentwicklung** soll beschrieben werden durch Meßräume $(E,\mathfrak{E})$ und $(\Omega,\mathfrak{F})$ mit $\Omega := \{\omega = (i_1,...,i_T);\ i_t \in E\} = E^T$, $\mathfrak{F} := \mathfrak{E}\otimes..\otimes\mathfrak{E}$,
$\omega_t := (i_1,...,i_t)\ \forall\ \omega = (i_1,...,i_T)$.
Zu jedem Zeitpunkt erhält man eine Information i_t , die durch Zufallsvariablen I_t (hier Projektionen) beschrieben werden mit
$I_t : \Omega \mapsto E$, $I_t(\omega) = i_t$.

Die Unsicherheiten des Marktes werden also durch $\omega\in\Omega$ dargestellt. Die Marktentwicklung bis t bestimmt die Preise S_t gemäß

(1.3) $S_0 = \text{const.},\ S_t(\omega) := S_t(\omega_t)$ mit mb Abbildungen $S_t : E^t \mapsto (0,\infty)^{1+d}$.

Für ein kanonisches Modell würde man $E = (0,\infty)^{1+d}$ und $S_t(\omega) = i_t$ wählen. Doch ist oft eine andere Wahl sinnvoll, wenn man etwa die Preisänderungen durch unabhägige Impulse I_t gemäß $S_t = f(S_{t-1},I_t)$ beschreiben will.
Investitionen können gemäß eines Portfolioplanes vorgenommen werden:

1.4 Definition. Ein **Portfolioplan** ist gegeben durch $\vartheta = \{\vartheta_0,...,\vartheta_{T-1},V_T(\vartheta)\}$ mit
$\vartheta_0 = \text{const} \in \mathbb{R}^{1+d}$, $\vartheta_t = (\vartheta_t^0,...,\vartheta_t^d)^\top$, und $\vartheta_t(\omega) = \vartheta_t(\omega_t) \in \mathbb{R}^{1+d}$;
dabei sind ϑ_t mb Funktionen auf E^t.
$V_T(\vartheta) = V_T(\vartheta)(\cdot)$ ist der **Terminalwert** und ist eine reelle mb Funktion auf Ω; wir schreiben dann $\vartheta \in \Theta$.

Man startet also mit der **Anfangsinvestition** $v_0 = \vartheta_0^\top \cdot S_0$.

Für das Sparbuch bezeichnet ϑ_t^0 also den Gegenwartswert, d.h. den auf den Zeitpunkt t=0 diskontierten DM–Betrag (der tatsächliche Wert ist $\vartheta_t^0 \cdot S_t^0$); dadurch erreicht man für die Anlage 0 eine parallele Beschreibung zu den risikobehafteten Anlagen 1,....,d .

1.5 Definition. $\{V_t(\vartheta)\ ,\ 0\le t\le T\}$ ist der **Wertprozeß** mit $V_t(\vartheta) := \vartheta_t^\top \cdot S_t$, $0 \le t < T$.
$\Delta C_t(\vartheta) := \vartheta_{t-1}^\top \cdot S_t - V_t(\vartheta)$ ist der **Konsum** in $1\le t\le T$ und $C_t(\vartheta) := \sum_{m=1}^t \Delta C_m(\vartheta)$ der Gesamtkonsum bis t mit $C_0 := 0$.

Der Konsum $\Delta C_t(\vartheta)$ darf negativ sein; dann ist $\Delta C_t(\vartheta)^-$ ein Zuschuß in t. Z.Zt. t verfügt man dann über $\vartheta_{t-1}^\top \cdot S_t$. Nun wird umgeschichtet und konsumiert: Man hält nun $\vartheta_t^0 \cdot S_t^0$ auf dem Sparbuch und ϑ_t^k Anteile vom Wertpapier k. Die Entscheidung kann von der bisher beobachtbaren Marktentwicklung ω_t abhängen.
Sind allgemein Größen $X_0,...,X_T$ definiert, so schreiben wir: $\mathbf{\Delta X_t := X_t - X_{t-1}}$, t = 1,...,T.

1.6 Lemma. $V_t(\vartheta) = v_0 + \sum_{m=1}^t \vartheta_{m-1}^\top \cdot \Delta S_m - C_t(\vartheta) = V_{t-1}(\vartheta) + \vartheta_{t-1}^\top \cdot \Delta S_t - \Delta C_t(\vartheta)$.

Beweis. $v_0 + \sum_{m=1}^{t} \vartheta_{m-1}^{\top} \cdot \Delta S_m = v_0 + \sum_{m=1}^{t} \vartheta_{m-1}^{\top} \cdot S_m - \sum_{m=1}^{t} \vartheta_{m-1}^{\top} \cdot S_{m-1}$

$= v_0 + \sum_{m=1}^{t} \Delta C_m + \sum_{m=1}^{t} V_m - \sum_{m=1}^{t} \vartheta_{m-1}^{\top} \cdot S_{m-1}$

$= v_0 + C_t + V_t \left[+ \sum_{m=1}^{t-1} V_m - \sum_{m=1}^{t} \vartheta_{m-1}^{\top} \cdot S_{m-1} \right] - v_0 = C_t + V_t \cdot [\,]$

1.7 Definition. Ein Portfolioplan ϑ heißt **selbstfinanzierend**, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist (für $0 < t \le T$):

(i) $\Delta C_t(\vartheta) = 0,$

(ii) $\vartheta_t^{\top} \cdot S_t = \vartheta_{t-1}^{\top} \cdot S_t$ $(t<T)$, $V_T(\vartheta) = \vartheta_{T-1}^{\top} \cdot S_T,$

(iii) $\Delta V_t(\vartheta) = \vartheta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta S_t ,$

(iv) $V_t(\vartheta) = v_0 + \sum_{m=1}^{t} \vartheta_{m-1}^{\top} \cdot \Delta S_m.$

Der Beweis der Äquivalenz der vier Bedingungen in 1.7 ist leicht.

1.8 Definition Es heißt $X_t = (S_t^1/B_t,...,S_t^d/B_t)$ der **diskontierte Preisprozeß** und $\breve{V}_t := V_t/B_t$ der **diskontierte Wertprozeß**.

Es wird hier also eine Diskontierung durch den Preisprozeß des Wertpapiers 0 vorgenommen; man sagt auch, daß man das Wertpapier 0 als Numeraire benutzt. Ist das 0–te Wertpapier das Sparbuch, so hat man die gewohnte Diskontierung. Es gilt wegen (1.2):

$\breve{V}_0 = v_0 , \quad X_0 = (S_0^1,...,S_0^d).$

Selbstfinanzierende Pläne sind bereits durch weniger Daten bestimmt.

1.9 Lemma. Für einen selbstfinanzierenden Plan gilt mit $\xi_t := (\vartheta_t^1,...,\vartheta_t^d)$:

$\vartheta_t^0 = \vartheta_0^0 - \sum_1^t \Delta\xi_m^{\top} \cdot X_m$

$= v_0 - \sum_0^t \Delta\xi_m^{\top} \cdot X_m \quad \text{mit } \Delta\xi_0 = \xi_0.$

Beweis. Sei $S_t' := (S_t^1,...,S_t^d) = \vartheta_t^0 \cdot X_t$; aus $\vartheta_t^0 \cdot S_t^0 + \xi_t^{\top} \cdot S_t' = \vartheta_{t-1}^0 \cdot S_t^0 + \xi_{t-1}^{\top} \cdot S_t'$ folgt: $\Delta\vartheta_t^0 = - \Delta\xi_t^{\top} \cdot X_t^k.$ Mit $v_0 = \vartheta_0^0 + \xi_0^{\top} \cdot X_0$ folgt auch die zweite Gleichung. $[\,]$

Gemäß 1.9 ist also $\{\vartheta_0^0,...,\vartheta_{T-1}^0\}$ durch v_0 und ξ bestimmt. Ab jetzt soll deswegen gelten:

1.10 Definition .$\Xi \ni \xi = (\xi_t,\ 0 \le t < T) :\Leftrightarrow \xi_t = (\xi_t^1,...,\xi_t^d)^{\top}$, $\xi_t(\omega) = \xi_t(\omega_t)$ ist mb für $1 \le t < T$.

$(v_0,\xi) \in \mathbb{R} \times \Xi$ beschreibe stets einen selbstfinanzierenden Portfolioplan ϑ mit

$\vartheta_t^k = \xi_t^k$, ϑ_t^0 wie in 1.9.

Im Fall d=1 können wir X_t und X_t^1 sowie ξ_t und ξ_t^1 identifizieren.

Es kann eine Reduktion auf den Fall $B_t \equiv 1$ [also gemäß (1.1) auf den Fall $r_t = 0$] vorgenommen werden. Dazu das

1.11 Reduktionslemma. Für einen Plan (v_0,ξ) gilt für $0 < t \le T$:

$$\breve{V}_t = v_0 + \sum_{m=1}^{t} \xi_{m-1}^{\top} \cdot \Delta X_m \quad .$$

Beweis. Es gilt $\breve{V}_t = [\vartheta_{t-1}^{\top} \cdot S_t - \Delta C_t]/B_t = \vartheta_{t-1}^{0} + \xi_{t-1}^{\top} \cdot X_t - \Delta C_t/B_t$ und
$\breve{V}_{t-1} = \vartheta_{t-1}^{\top} \cdot S_{t-1}/B_{t-1} = \vartheta_{t-1}^{0} + \xi_{t-1}^{\top} \cdot X_{t-1}$, also: $\breve{V}_t - \breve{V}_{t-1} = \xi_{t-1}^{\top} \cdot \Delta X_t$ bei $\Delta C_t = 0$. [] Durch die Diskontierung hat man wegen $B_t/B_t \equiv 1$ gerade die Reduktion auf $B_t \equiv 1$ erreicht. Wir schreiben $\{G_t\} = \{G_t(\xi)\}$ für den **Gewinnprozeß** in einem diskontierten Modell oder in einem Modell mit $S_t = (1,X_t)$:

(1.12) $$G_t := \sum_{m=1}^{t} \xi_{m-1}^{\top} \cdot \Delta X_m \quad , 0 \le t \le T.$$

Der Ausdruck $\sum_{m=1}^{t} \xi_{m-1}^{\top} \cdot \Delta X_m$ kann als ein zeitdiskretes stochastisches Integral $\int_0^t \xi \, dX$ angesehen werden. Wegen 1.11 gilt also:

(1.11)* $\breve{V}_t = v_0 + G_t(\xi)$ für einen selbstfinanzierenden Plan (v_0,ξ).

Es soll noch die Verallgemeinerung auf nicht notwendig selbstfinanzierende Pläne notiert werden, die sich aus dem Beweis von 1.11 ergibt:

1.13 Lemma $\breve{V}_t(\vartheta) + \Delta C_t/B_t = \breve{V}_{t-1}(\vartheta) + \xi_{t-1}^{\top} \cdot \Delta X_t$.

1.14 Beispiel. **Nullkuponanlagen**

Die 0–te Anlagemöglichkeit beschreibe wieder die Anlage auf dem Sparbuch mit dem kurzfristigen Zinssatz. Es ist oft günstiger, die Notation von zeitstetigen Modellen zu übernehmen und mit der **Zinsrate f(t)** zu arbeiten, die definiert ist durch:

(1.14a) $$1 + r_t = e^{f(t-1)}, \; t \ge 1,$$
$$B_t := S_t^0 = \prod_{m=1}^{t} (1+r_m) = \exp\{\sum_{m=0}^{t-1} f(m)\}.$$

Dabei ist f(t–1) also die Zinsrate in [t–1,t) und wird als zufallsabhängig angesehen; es soll f(t–1) aber in t–1 bekannt sein, also nur von der Entwicklung bis t–1 abhängen, d.h.

(1.14b) $f(t) = f(t \mid \omega_t)$, t>0, und f(0) ist deterministisch.

Wegen (1.14b) ist in (1.14a) der Index t–1 bei f(t–1) günstiger, während für andere Überlegungen, die das Sparbuch als normales (nicht ausgezeichnetes) Wertpapier ansehen,sich der Index t bei r_t empfiehlt.

Eine **Nullkuponanleihe mit Fälligkeitsdatum τ (τ–Bond)** ist ein Titel, der das Recht auf 1 DM z.Zt. τ gibt. Der Preis dafür z.Zt. 0 sei $\beta(0,\tau)$. Die **Zinsstruktur** (term structure) z.Zt. 0 ist gegeben durch die **initiale Zinskurve** $\tau \mapsto \beta(0,\tau)$. Dabei sind $\beta(0,\tau)$ gerade die Diskontierungs– faktoren. Kauft man z.Zt. t etwa x Nullkuponanleihen mit Fälligkeitstermin τ, $t<\tau\le T$, zu einem Preis $x\cdot\beta(t,\tau)$ bei einem Kurs $\beta(t,\tau)$, so erhält man z.Zt. τ gerade x DM mit

(1.14c) $\beta(t,t) = 1,\ \beta(t,t+1) = e^{-f(t)}$.

Der Einfachheit nehmen wir an, daß Anlagen mit einem Fälligkeitstermin $\tau<T$ nach k mit der kurzfristigen Zinsrate weiterverzinst werden.
Wir fassen einen τ–Bond als Wertpapier auf mit Index τ und setzen

(1.14d) $S_t^\tau := \beta(t,\tau)$, $0\le t\le\tau$, $S_t^\tau := \exp\{\sum_{m=\tau}^{t-1} f(m)\}$, $\tau\le t\le T$, d.h.

$S_t^\tau := \beta(t,\tau)\cdot\exp\{\sum_{m=\tau}^{t-1} f(m)\}$, $0\le t\le T$, mit $\beta(t,\tau) := 1$ für $t\ge\tau$.

(1.14e) $S_t := (B_t, S_t^1, ..., S_t^T)$.

Kauft man also z.Zt. t etwa x τ–Bonds, so zahlt man $x\cdot S_t^\tau$ und hat z.Zt. n>t dann $x\cdot S_n^\tau$ DM.

Bei der Modellierung des Preisprozesses S_t^τ durch einen stochastischen Prozeß muß man also einen "Brückenprozeß" konstruieren, bei dem der Anfangswert $S_0^\tau = \beta(0,\tau)$ und der Endwert $S_\tau^\tau = \beta(\tau,\tau) = 1$ vorgegeben sind. Die Endbedingug $\beta(\tau,\tau) = 1$ schafft auch eine Kopplung zwischen den Preisprozessen (S_t^τ), $1 \le \tau \le T$.

Im Mittelpunkt wird die **Bewertung von Derivaten** stehen. Dies sind Verträge, die einen **Zahlungsstrom** $\{Z_t,\ 1\le t\le T\}$ zusichern, der sich aus der Kursentwicklung $\{S_t\}$ herleiten läßt in der Weise, daß etwa $Z_t = z_t(S_0,...,S_t)$ gilt. Dabei sei ΔZ_t die Zahlung in t und Z_t die Gesamtzahlung in 1,...,t. Allgemeiner und einfacher soll der Zahlungsstrom durch mb Abbildungen beschrieben werden:

$Z_t : (\Omega,\mathfrak{F}) \mapsto \mathbb{R}$ mit $Z_t = Z_t(\omega_t)$.

Für diesen Vertrag muß z. Zt. 0 eine **Prämie** bezahlt werden, die gerade die Bewertung des Finanztitels darstellt. In der Regel setzt sich diese Prämie additiv aus Prämien für die einzelnen Zahlungen Z_t zusammen. Deshalb genügt es für einen großen Teil der Theorie, sich auf eine einzige Zahlung zu beschränken, also auf den Fall:

$Z_t = 0$ für $t<T$, $Z_T =: H$.

Bei Optionen z.B. ist dieser **Zahlungsanspruch** (contingent claim) H in jedem Fall nichtnegativ, sodaß der Vertragsunterzeichner also ohne die Prämie in jedem Fall einen Gewinn erzielen würde.

Ist etwa ein W–Maß P auf $(\Omega,\mathfrak{F})$ gegeben, so würde im **klassischen Fall** $E\left[H/B_T\right]$ als faire Prämie angesehen werden – unabhängig von der hier vorliegenden Situation eines Finanzmarktes. Hier kann aber eine andere Antwort gegeben werden. Dazu betrachten wir die folgende Situation:

Es sei d=1. Wenn die Bank durch einen Vertrag eine Zahlung $H = a \cdot S_T^1$ zusichert, so ist $a \cdot S_0^1$ eine faire Prämie; denn offenbar kann die Bank die Prämie von $a \cdot S_0^1$ sofort in die Anlage 1 investieren und hat dann z. Zt. T den auszuzahlenden Betrag $H = a \cdot S_T^1$ zur Verfügung. Wir können auch 1.11 heranziehen. Mit $v_0 = a \cdot S_0^1 = a \cdot X_0$, $\xi_t \equiv a$ gilt gerade:

$v_0 + G_T = a \cdot X_0 + \sum_{m=1}^{T} a \cdot \Delta X_m = a \cdot X_T = H/B_T$, also $V_T = H$.

Die Bank geht dann also kein Risiko ein. Ebenso kann der Vertragsunterzeichner anstelle des Vertrages selbst $a \cdot S_0^1$ z.Zt. 0 in das kursabhängige Wertpapier investieren. In dem Sinn sind also die Prämie und der Vertrag gleichwertig.

Dies gilt noch in allgemeineren Situationen.

1.15 Definition. Ein Zahlungsanspruch H heißt **erreichbar** (attainable) oder **duplizierbar** $\left[\text{durch } (v_0,\xi)\right]$, wenn gilt: $H = V_T(v_0,\xi)$ $(\Leftrightarrow H/B_T = v_0 + G_T(\xi))$ für einen selbstfinanzierenden Plan (v_0,ξ).

Ein Zahlungsstrom $\{Z_t,\ 1 \le t \le T\}$ heißt erreichbat, wenn ein Plan ϑ existiert mit $V_T(\vartheta) = 0$, sodaß gilt:

$\Delta C_t(\vartheta) = \Delta Z_t$, $t = 1,...,T$ $\left[C_t(\vartheta) = Z_t,\ t = 1,...,T\right]$.

Es ist leicht zu sehen, daß die beiden Definition konsistent sind; d.h. ein Zahlungsanspruch H ist genau dann erreichhbar, wenn der Zahlungsstrom $(Z_1,...,Z_T) = (0,...,0,H)$ erreichbar ist.

In der Situation $H = V_T(v_0,\xi)$ ist v_0 eine **faire Prämie**. Dann kann sich die Bank nämlich gegen den Zahlungsanspruch H **absichern** (hedging), indem sie die Prämie v_0 benutzt, um gemäß (V_0,ξ) zu investieren. Dann hat sie z. Zt T den Betrag $V_T = H$ zur Verfügung. Das gleiche kann jeder andere Marktteilnehmer tun. Im nächsten §2 wird in einem speziellen Modell gezeigt, daß jeder Zahlungsanspruch erreichbar ist und somit vollständig abgesichert werden kann. H kann i.a. durch mehrere Pläne erreichbar sein. Dann ist die faire Prämie eindeutig bestimmt $\left[\text{bei Arbitragefreiheit vgl. 1.17 und 1.20}\right]$. Entsprechendes gilt für einen erreichbaren Zahlungsstrom.

1.16 Beispiel. Bewertung von Optionen. Eine europäische (Kauf–) **Option** $\left[\text{call option}\right]$ ist ein Vertrag, der dem Käufer das Recht einräumt, zum **Fälligkeitstermin** T (maturity time, exercise time) für einen festen **Wahrnehmungs– / Basispreis** K (exercise/striking price),

unabhängig von dem vorliegenden Kurs S^1_T, a Anteile eines Wertpapiers zu kaufen, z.B. $K = a \cdot S^1_0$. Dann ist der Gewinn des Käufers und damit der Verlust des Verkäufers

$$H := h(S^1_T) := [a \cdot S^1_T - K]^+.$$

Es ist also günstig für den Käufer, wenn der Kurs steigt; es ist günstig für die Bank, wenn der Kurs fällt. Um den Verlust bei steigendem Kurs abzusichern (hedging), kann die Bank selbst Wertpapiere kaufen . Dadurch kann es auch günstig für die Bank werden, wenn der Kurs steigt. [] Eine naheliegende Forderung an den Markt ist der Ausschluß von sogenannten Arbitragemöglichkeiten; nur so kann eine Stabilität des Marktes vorliegen.

1.17 (Vorläufige) **Definition.** Eine **Arbitragemöglichkeit** ist gegeben, falls ein Plan (v_0,ξ) existiert, so daß für $V_T = V_T(v_0,\xi)$ gilt:
(i) $v_0 = 0$, (ii) $V_T \geq 0$, (iii) $V_T(\omega) > 0$ für (mindestens) ein ω.
Liegt keine Arbitragemöglichkeit vor, so heißt der Markt **arbitragefrei**.

Wegen $\breve{V}_T = V_0 + G_T = V_T/B_T$ mit $B_T > 0$ gilt offenbar:

1.18 Lemma. Eine Arbitragemöglichkeit ist genau dann gegeben, falls ein $\xi \in \Xi$ existiert mit $G_T(\xi) \geq 0$ und $G_T(\xi)(\omega) > 0$ für ein ω.

1.19 Beispiel. Mit (1.1) liegt eine Arbitragemöglichkeit vor, wenn für ein $t \geq 1$ gilt:

$$\exists\, \omega^*_t = (i^*_1,...,i^*_t) \text{ mit:} \quad S^1_t(\omega^*_{t-1},i_t) \geq (1+r_t) \cdot S_{t-1}(\omega^*_{t-1}) \quad \forall\, i_t \in E \ [\text{bzw } "\leq"]$$
$$S_t(\omega^*_{t-1},i^*_t) > (1+r_t) \cdot S_{t-1}(\omega^*_{t-1}) \ [\text{bzw. } "<"].$$
$$\text{d.h.:} \quad X_t(\omega^*_{t-1},i_t) \geq X_{t-1}(\omega^*_{t-1}) \quad \forall\, i_t \in E \ [\text{bzw } "\leq"]$$
$$X_t(\omega^*_{t-1},i^*_t) > X_{t-1}(i^*_{t-1}) \ [\text{bzw. } "<"].$$

Einen Plan kann man nun so wählen, daß man z.Zt. $t-1$ bei Vorliegen von ω^*_{t-1} einen Anteil des Wertpapiers 1 kauft und dafür Geld (DM) leiht. Sonst wird nicht in das Wertpapier 1 investiert. (Ab t wird dann alles in DM angelegt.) Setze $\xi_{t-1}(\omega^*_{t-1}) = +1$ und $\xi_m = 0$ sonst. Dann gilt mit $A_m := \{I_1 = i^*_1,...,I_m = i^*_m\}$:

$$G_T = \sum_{m=1}^{T} \xi_{m-1} \cdot \Delta X_m = \mathbf{1}_{A_{t-1}} \cdot \Delta X_t \geq 0 \text{ und } > 0 \text{ auf } A_t. \ []$$

1.20 Lemma. Ist der Markt arbitragefrei, so ist die faire Prämie für erreichbare Zahlungsansprüche eindeutig bestimmt, d.h. unabhängig von der Wahl des (duplizierenden) Plans.

Beweis: Sei $H/B_T = v_0 + G_T(\xi) = \tilde{v}_0 + G_T(\tilde{\xi})$. Z.z. ist : $V_0 = \tilde{v}_0$.

Wäre etwa $v_0 < \tilde{v}_0$, so setzen wir $\alpha := \tilde{v}_0 - v_0 > 0$. Dann folgt:

$0 = v_0 - \tilde{v}_0 + G_T(\xi) - G_T(\tilde{\xi})$, also: $0 + G_T(\xi - \tilde{\xi}) = \alpha > 0$.

Also würde $\xi - \tilde{\xi} := (\xi_t - \tilde{\xi}_t, 0 \le t < T)$ eine Arbitragemöglichkeit bieten. []

1.21 Beispiel. Verkaufsoptionen (put options) .

Hier werden Verträge betrachtet, bei denen dem Käufer der Option das Recht eingeräumt wird, zum Fälligkeitstermin T für einen festen Basispreis K unabhängig vom vorliegenden Kurs S_T^1 a Anteile des ersten Wertpapiers zu verkaufen.

Bei Optionen hat der Käufer wieder ein Wahlrecht; er kann die Option verfallen lassen. Dann ist der Verlust des Verkäufers und der Gewinn des Käufers

$$H = (K - a \cdot S_T^1)^+.$$

1.22 Beispiel. Termingeschäfte (**Forward–Kontrakte**).Bei Termingeschäften muß das Wertpapier in jedem Fall zum festgesetzten Preis gekauft bzw. verkauft werden. Hier ist der Gewinn des Käufers des Kontraktes

$$H = a \cdot S_T^1 - K \quad \text{bzw. } H = K - a \cdot S_T^1.$$

Dieser Zahlungsanspruch ist offenbar immer erreichbar; sei etwa d=1. Im Fall $H = a \cdot S_T - K$ gilt etwa: $H/B_T = [a \cdot X_0 - K/B_T] + [a \cdot X_T - a \cdot X_0] = [a \cdot X_0 - K/B_T] + \sum_1^T \xi_{t-1} \Delta X_t$ mit $\xi_t :\equiv a$.

Also ist dann $a \cdot S_0 - K/B_T$ (Preis z.Zt. 0 – Gegenwartswert vom festgesetzten Preis K) die faire Prämie.

Betrachten wir speziell ein Devisentermingeschäft, bei dem a Dollar zum festen Preis K gekauft werden können. Es beschreibe D_t den Dollarkurs. Es soll die Möglichkeit bestehen, die Dollar auf dem amerikanischen Markt zum dortigen Marktzins r' anzulegen. Dann ist zu setzen:

$$S_t^1 = (1+r')^t D_t, \quad a\,D_T = a_T\,S_T \quad \text{mit } a_T := a/(1+r')^T,\ H = a \cdot D_T - K = a_T \cdot S_T^1 - K.$$

Also ist jetzt $a_T \cdot D_0 - K/(1+r)^T = a/(1+r')^T \cdot D_0 - K/(1+r)^T$ der faire Prämie.

Macht man noch den Ansatz

$$K =: \gamma \cdot a \cdot D_0,$$

so ist bei der Wahl von

$$\gamma = (1+r)^T/(1+r')^T$$

die faire Prämie gerade gleich Null. Dabei ist $\gamma \cdot D_0$ der sogenannte **Terminkurs**, bei dem keine zusätzliche Prämie bezahlt werden muß.

Ist der amerikanische Marktzins r' höher als r, gilt $\gamma < 1$.

Man kann sich das direkt überlegen:
Z.Zt. T hat der Verkäufer a \$, die er auf Grund des Vertrages zu einem Preis K verkaufen muß. Er kann bereits z. Zt. 0 über K verfügen, indem er einen Kredit aufnimmt zu einem Preis von $K(1+r)^{-t}$ DM.
Andererseits kann man auch z.Zt. 0 über die a \$ verfügen, indem man einen Kredit über a \$ aufnimmt. Dieser Kredit kostet $a(1+r')^{-t}$ \$ = $a \cdot D_0(1+r')^{-t}$ DM.
Ein faire Prämie für diesen Vertrag ist also gerade: $a \cdot D_0(1+r')^{-t} - K(1+r)^{-t}$. []

§2 Das Binomialmodell.

Es liege die Situation d = 1 und (1.1) vor mit $1+r_m = R$. Das Wertpapier 0 ist also ein Sparbuch mit dem Zinssatz R–1 (R≥1), und man hat

$$B_t = S_t^0 = R^t.$$

[Das Symbol r wird später noch für das zeitstetige Modell benutzt.] Es soll zunächst eine Beschränkung auf den Fall R = 1 vorgenommen werden. Deswegen schreiben wir X für die Preisentwicklung des kursabhängigen Wertpapiers 1.

Als erste Verallgemeinerung des deterministischen Falles sieht die **Modellannahme** vor, daß die Preisentwicklung durch Zahlen $0 < d < 1 < u < \infty$ beschrieben wird, so daß gilt:

$$X_t \in \{d \cdot X_{t-1}, u \cdot X_{t-1}\}, \quad [\text{d wie "down", u wie "up"}].$$

Es soll also ein Modell betrachtet werden, in dem sich der Kurs nur um einen Faktor d nach unten oder um einen Faktor u noch oben bewegen kann. In den Fällen "1≤d<u" und "d<u≤1" ergäben sich Arbitragemöglichkeiten gemäß 1.19.

Das 1–Perioden–Modell:

Es sei T=1, $E = \{d,u\} = \Omega$, $x_0>0$ gegeben, $X_1(i) = i \cdot x_0$, i∈E. Es wird kein W–Maß vorausgesetzt. H sei der Zahlungsanspruch zu einem Derivat, setze:

$$h_i := H(i) \text{ für } i \in \{d,u\}.$$

Es soll gezeigt werden, daß im vorliegenden Fall H stets erreichbar ist.

2.1 Lemma. Das Gleichungssystem $v + \xi[ix_0 - x_0] = h_i$, $i \in \{d,u\}$, in v und ξ hat eine eindeutige Lösung; dabei ist: $v = p_d h_d + p_u h_u$, $\xi \cdot x_0 = (h_u - h_d)/(u-d)$ mit

$$p_d := \frac{u-1}{u-d}, \; p_u := \frac{1-d}{u-d}, \text{ und } 0 < p_i < 1, \; p_d + p_u = 1.$$

Würde X_1 mehr als zwei Werte annehmen, so hätte man für die beiden Unbekannten V und ξ mehr als zwei Bestimmungsgleichungen. Der **Beweis** von 2.1 ist einfach.

H ist also erreichbar durch die Wahl von $v = v_0$ und $\xi = \xi_0$.

2.2 Bemerkung. Wählt man ein künstliches W–Maß P* auf Ω, so daß $P^*[\{i\}] = p_i$, so gilt:

$$v = E^*[H], \quad E^*[X_1] = x_0 \quad \text{wegen}$$

(2.3) $$p_d \cdot d + p_u \cdot u = 1.$$

P* ist das einzige Maß mit $E^*[X_1] = x_0$.

[In dem Fall $h_d = 0 < h_u$, etwa bei $H = [X_1 - K]^+$ mit $d \cdot x_0 \le K \le u \cdot x_0$, gilt: $\xi_0 \cdot x_0 > v_0$; die Bank muß also zusätzlich Geld leihen, um in das kursabhängige Wertpapier gemäß ξ zu investieren.]

[]

Das T–Perioden–Modell.

Modell: $E = \{d,u\}$, $\Omega := \{d,u\}^T$, $I_t((i_1,...,i_T)) = i_t$;
sei $x_0>0$ gegeben, $X_t = I_t \cdot ... \cdot I_1 \cdot x_0 = I_t \cdot X_{t-1}$.
Wir können wieder $X_t(\omega)=X_t(\omega_t)$ schreiben.
Es wird kein W–Maß vorausgesetzt.

Es soll wieder gezeigt werden, daß jeder Zahlungsanspruch erreichbar ist.

2.4 Lemma. Zu $H : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ existieren $v_0 \in \mathbb{R}$, $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $\xi_t : \{d,u\}^t \mapsto \mathbb{R}$, $1 \le t < T$, so daß gilt:

$$v_0 + \sum_{t=1}^{T} \xi_{t-1}(\omega_{t-1}) \cdot \Delta X_t(\omega_t) = H(\omega) \quad , \forall \omega \in \Omega.$$

Dabei ist $v_0 = \sum_{\omega=(i_1,...,i_T)\in\Omega} p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot ... \cdot p_{i_T} \cdot H(\omega)$.

mit p_i wie in 2.1.

Bew. von 2.4. Setze $V_T(\omega)=H(\omega)$. Zu ω_t, $t<T$, wähle rekursiv $v=V_t(\omega_t)$ und $\xi=\xi_t(\omega_t)$ gemäß 2.1 mit $X_t(\omega_t)$ und $V_{t+1}(\omega_t,i)$ statt X_0 bzw. h_i als Lösung von

$$v + \xi \left[i \cdot X_t(\omega_t) - X_t(\omega_t) \right] = \Big(v + \xi \cdot \Delta X_{t+1}(\omega_t,i) = \Big) V_{t+1}(\omega_t,i) \quad \text{für } i \in \{d,u\}. \; \square$$

2.5 Bemerkung. Ein Finanzmarkt heißt **vollständig**, wenn wie hier jeder Zahlungsanspruch erreichbar ist.

2.6 Darstellung von v_0:

P^* sei ein künstliches W–Maß auf $(\Omega,\mathfrak{P}(\Omega))$ mit $P^*\left[\{(i_1,...,i_T)\}\right] = p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot ... \cdot p_{i_T}$, also

$P^*\left[I_1 = i_1,...,I_T = i_T\right] = P^*\left[I_1 = i_1\right] \cdot ... \cdot P^*\left[I_T = i_T\right]$ mit $P^*\left[I_t = i\right] = p_i$.

Die J_t seien definiert durch

$$J_t = \mathbf{1}_{\{u\}}(I_t) \text{, also } I_t = d \cdot \left(\frac{u}{d}\right)^{J_t}.$$

Mit den (I_t) sind auch die J_t, $1 \le t \le T$, unter P^* iid, und man hat: $J_t \sim b(1,p_u)$ sowie:

$$X_t = d \cdot \left(\frac{u}{d}\right)^{J_t} \cdot X_{t-1} \quad \text{oder} \quad \Delta \log X_t = \log d + \log(u/d) \cdot J_t.$$

Von der Beschreibung durch die Binomialverteilung werden wir noch Gebrauch machen.

Unter P^* gilt:

(i) $v_0 = E^*[H]$

(ii) $E^*\left[X_{t+1} \mid (I_1,...,I_t) = \omega_t\right] = X_t(\omega_t)$, $0 \le t < T$.

Dabei ist $E^*[... \mid A] := \int ... dP^*[\cdot \mid A] = \int_A ... dP^* / P^*[A]$.

Die Eigenschaft (ii) besagt gerade, daß $\{X_t,\ 0 \le t \le T\}$ ein **Martingal** ist. P^* heißt deswegen auch **Martingalmaß**. Der Beweis folgt leicht aus (2.3); es ist sogar das einzige Martingalmaß. Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß es nur eine Lösung (p_d,p_u) gibt mit $p_d+p_u=1$ und (2.3). $\square$

Nun soll ein **beliebiger Zinssatz**, also $R \geq 1$, zugelassen werden. Wir setzen hier

$$S_t^1 =: S_t \left[:= B_t \cdot X_t = R^t \cdot X_t \right] = R \cdot I_t \cdot S_{t-1}, \quad \text{also gilt:}$$
$$S_t \in \{d \cdot R \cdot S_{t-1},\ u \cdot R \cdot S_{t-1}\},\ S_0 = x_0 \quad \text{mit} \quad d \cdot R < R < u \cdot R.$$

Ferner suchen wir die faire Prämie für eine europäische Kaufoption, also für $H = (S_T - K)^+$. Dann ergibt sich aus 2.4 und 2.6

$$(X_T - K_0)^+ := (S_T - K)^+ / B_T = v_0 + \sum_{t=1}^{T} \xi_{t-1} \cdot \Delta X_t \quad \text{mit} \quad K_0 := K/R^T$$
$$\text{für einen gewissen Plan } (v_0, \xi) \text{ mit } \quad v_0 = E^*\left[(X_T - K_0)^+\right] \ .$$

Also ist $H = (S_T - K)^+$ gemäß 1.15 erreichbar und somit v_0 eine faire Prämie. Es folgt:

$$v_0 = E^*\left[(X_T - K_0)^+\right] = E^*\left[(X_T - K_0) \cdot \mathbf{1}_\Gamma\right] \qquad \text{mit}$$
$$\Gamma := \{X_T > K_0\} = \{I_1 \cdot I_2 \cdot \ldots \cdot I_T \cdot x_0 > K_0\} = \{\sum_{t=1}^{T} \log(I_t) > \log(K_0/x_0)\}.$$

Wegen $\log(I_t) = \log(u/d) \cdot J_t + \log(d)$ gilt

(2.7) $$\Gamma = \{\ \log(u/d) \cdot \sum_{t=1}^{T} J_t + T \cdot \log(d) > \log(K_0/S_0)\ \}$$
$$= \{\ \sum_{t=1}^{T} \left[\log(u) \cdot J_t + \log(d) \cdot (1 - J_t)\right] > \log(K_0/S_0)\ \} = \{\sum_{t=1}^{T} J_t > a\}$$

mit

(2.8) $$a := (\log(K_0/S_0) - T \cdot \log(d))/\log(u/d) \ .$$

Sei $p'_i := p_i \cdot i$ und P' ein weiteres W–Maß auf Ω mit $P'\left[\{(i_1,\ldots,i_T)\}\right] = p'_{i_1} \cdot p'_{i_2} \cdot \ldots \cdot p'_{i_T}$. Dabei ist P' wegen (2.3) ein W–Maß. Dann ergibt sich für v_0 die Darstellung:

$$v_0 = \sum_{\omega=(i_1,\ldots,i_T)\in\Gamma} p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_T} \left[i_1 \cdot i_2 \cdot \ldots \cdot i_T \cdot x_0 - K_0\right]$$
$$= x_0 \cdot \sum_{\omega\in\Gamma} p'_{i_1} \cdot p'_{i_2} \cdot \ldots \cdot p'_{i_T} - K_0 \cdot \sum_{\omega\in\Gamma} p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_T} \ , \text{ also}$$

(2.9) $$v_0 = x_0 \cdot P'\left[\Gamma\right] - K_0 \cdot P^*\left[\Gamma\right]$$
$$= S_0 \cdot \bar{\Phi}(T, p'_u; a) - K \cdot R^{-T} \cdot \bar{\Phi}(T, p_u; a)$$

mit

(2.10) $$p_d = \frac{u - 1}{u - d} \quad p_u = \frac{1 - d}{u - d} \quad p'_i := p_i \cdot i \ .$$

(2.11) $$\bar{\Phi}(T,p;a) := \sum_{a<t\leq T} \binom{T}{t} p^t \cdot (1-p)^{T-t} = \bar{\Phi}(T,p;\lceil a \rceil).$$

Dies ist die **Bewertungsformel für Optionen im** sog. **Binomialmodell**; $1 - \bar{\Phi}(T,p_u;\cdot)$ ist dabei gerade die Vf zu $b(T,p_u)$.

2.12 Bemerkung. Die Darstellung (2.9) und die Darstellung $v_0 = \xi_0 \cdot S_0 + \xi_0^0$ legen die Vermutung $\xi_0 = \Phi(T,p'_u;a)$? nahe. Wir wollen diese für T=1 und R=1 untersuchen.
Man berechnet leicht in 2.1: $\xi_0 = (h_u - h_d)/(u-d)x_0$. In dem allein interessanten Fall: $d \cdot x_0 < K < u \cdot x_0$ ist $h_d = 0$ und $h_u = ux_0 - K$, also $\xi_0 = (u - K/x_0)/(u-d)$.

Andererseits ist wegen $d<K/x_0<u$: a=0, also $\Phi(1,u\cdot p_u;1) = u\cdot p_u = (u - d\cdot u)/(u-d)$.
Die Vermutung gilt also im Fall: $K/x_0 = d\cdot u$.
Wir wissen aber nur: $d<K/x_0<u$ und $d<d\cdot u<u$.

Konvergenz gegen ein zeitstetiges Modell.
Nun soll die Periodenlänge, also die Zeitspanne zwischen zwei möglichen Aktionen, immer kürzer gewählt, der Fälligkeitstermin $T\in\mathbb{R}$ aber konstant gehalten werden. [Im Zeitalter der Computermärkte werden die Periodenlängen tatsächlich immer kleiner.] Das Zeitintervall $[0,T]$ wird in n Perioden der Länge T/n unterteilt. Wir erhalten ein zeitdiskretes n–Periodenmodell. Dabei muß die Verzinsung für das Intervall $[0,T]$ und damit K_0 konstant bleiben. Wir setzen

$$R^n = e^{rT} \quad , \text{also } K_0 = K\cdot e^{-rT},$$

dann kann $r\geq 0$ als die **Zinsrate für ein zeitstetiges Modell** interpretiert werdend.
Mit kleinerer Periodenlänge müssen auch kleinere Werte für die Sprunghöhen u und d angesetzt werden. Die richtige Wahl wird sich aus dem zentralen Grenzwertsatz ergeben. Sei

$$U := \log(u),\ D := \log(d),\ Y_n := \sum_{m=1}^{n} [U\cdot J_m + D\cdot(1-J_m)] \ ;$$

Y_n ist also Summe von iid Zva sowohl unter P* also auch unter P' . So ergibt sich aus (2.7) [jetzt mit n statt T] :

(2.13) $\Gamma =: \{Y_n > \log(K_0/S_0)\}$.

Wir wählen hier: $U = -D$, also $d = \frac{1}{u}$.

(2.14*) Unter P* hat Y_n die CF $\varphi_n^*(s) := (p_u\cdot e^{isU} + p_d\cdot e^{-isU})^n$,
und entsprechend gilt:

(2.14') unter P' hat Y_n die CF $\varphi_n'(s) := (p_u'\cdot e^{isU} + p_d'\cdot e^{-isU})^n$.
Dabei hat man nach (2.10):

$$p_u = (1 - e^{-U})/(e^{U} - e^{-U}) =$$

$$\frac{U - \frac{1}{2}U^2 + o(U^2))}{2U + o(U^2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}U + o(U),\ \text{mit } \frac{1}{1+o(U)} = 1+o(U) \text{ , also:}$$

$$p_u - p_d = 2p_u - 1 = -\frac{1}{2}U + o(U) .$$

Es folgt:

$$\varphi_n^*(s) = \left[p_u\cdot[1 + isU - \tfrac{1}{2}s^2U^2 + o(U^2)] + p_d\cdot[1 - isU - \tfrac{1}{2}s^2U^2 + o(U^2)]\right]^n$$
$$= \left[1 + isU\cdot(p_u - p_d) - \tfrac{1}{2}s^2U^2 + o(U^2)\right]^n = \left[1 - \tfrac{1}{2}isU^2 - \tfrac{1}{2}s^2U^2 + o(U^2)\right]^n .$$

Ein geeigneter Ansatz ist, daß U^2 proportional zur Periodenlänge T/n ist. Wir wählen :

$$U^2 = \sigma^2 \cdot \frac{T}{n} \ ,$$

Dabei ist σ ein Maß für die Fluktuationen des Kurses. Je kleiner die Periodenlänge ist, desto weniger gravierend ist übrigens die Beschränkung für S_t auf zwei Werte bei geg. S_{t-1}. Dann ergibt sich

$$\varphi_n^*(s) = \left[1 - \tfrac{1}{2}\,(is + s^2)\cdot\sigma^2\cdot\frac{T}{n} + o(\frac{1}{n})\right]^n \ \to \ \exp\{-\tfrac{1}{2}(is - s^2)\cdot\sigma^2\cdot T\}.$$

Dies ist die CF zu $N(-\frac{1}{2}\sigma^2\cdot T,\sigma^2\cdot T)$, diese hat die Vf $x \mapsto \Phi((x + \frac{1}{2}\sigma^2\cdot T)/\sigma\sqrt{T})$, wenn Φ die Vf zu $N(0,1)$ ist (vgl. W. th. 12.15b). Dabei gilt: $1-\Phi(x)=\Phi(-x)$ (gemäß W.th. 12.10).
Nach dem Stetigkeitssatz von Levy–Cramér [W.theorie 18.6] folgt

$$P^*Y_n^{-1} \xrightarrow{w} N(-\tfrac{1}{2}\sigma^2\cdot T,\sigma^2\cdot T);$$

dies impliziert hier die Konvergenz der Verteilungsfunktionen [W.th. 17.10].

[Wegen $U^2 = \sigma^2\cdot\frac{T}{n}$ hängen die p_i und damit P* von n ab. Man müßte also eigentlich P_n^* und $P_n^*Y_n^{-1}$ schreiben; deswegen ist auch der zentrale Grenzwertsatz nicht direkt anwendbar.]

Es folgt mit (2.13):

$$P^*[\Gamma] \to 1 - \Phi([\log(K_0/S_0) + \tfrac{1}{2}\sigma^2\cdot T]/\sigma\sqrt{T})) = \Phi([\log(S_0/K_0) - \tfrac{1}{2}\sigma^2\cdot T]/\sigma\sqrt{T}).$$

Ebenso zeigt man mit $p'_u = p_u\cdot u = p_d$:

$$P'[\Gamma] \to \Phi([\log(S_0/K_0) + \tfrac{1}{2}\sigma^2\cdot T]/\sigma\sqrt{T}).$$

Insgesamt ergibt sich also aus 2.9 mit $K_0 = e^{-rT}$ für $n\to\infty$:

(2.15) $$v_0 \to \pi(r,\sigma^2\cdot T,S_0,K_0) :=$$

$$S_0\cdot\Phi([\log(S_0/K_0) + \tfrac{1}{2}\sigma^2\cdot T]/\sigma\sqrt{T}) - K_0\cdot\Phi([\log(S_0/K_0) - \tfrac{1}{2}\sigma^2\cdot T]/\sigma\sqrt{T}) =$$

$$S_0\cdot\Phi([\log(S_0/K) + (r+\tfrac{1}{2}\sigma^2)T]/\sigma\sqrt{T}) - K\cdot e^{-rT}\cdot\Phi([\log(S_0/K) + (r-\tfrac{1}{2}\sigma^2)T]/\sigma\sqrt{T}).$$

Dies ist die **Black–Scholes–Formel** für die Bewertung einer Option in einem zeitstetigen Modell. Dabei ist

r die Zinsrate im zeitstetigen Modell,
σ^2 die sog. Volatilität als Maß für die Kursfluktationen,
S_0 der Kurs z.Zt. 0,
T der Fälligkeitskeitstermin der Option,
$K_0 = Ke^{-rT}$ der diskontierte Wahrnehmungspreis der Option.

Es gilt die folgende interessante Beziehung:

(2.16) $\sigma^2 \to \pi(r,\sigma^2T,S_0,K_0)$ ist isoton.

Im Fall $S_0 = K_0$ ist die Aussage offensichtlich. Für den Beweis des allgemeinen Falles berechnen wir $\frac{\partial}{\partial y}\,\pi(r,y^2,S_0,K_0)$, mit $y := \sigma\sqrt{T}$. Sei dazu φ die Dichte der N(0,1)–Verteilung.

Mit $x := S_0/K_0$ gilt:

$$\pi(r,y^2,S_0K_0)/K_0 = x\Phi(\tfrac{1}{y}\log x + \tfrac{1}{2}y) - \Phi(\tfrac{1}{y}\log x - \tfrac{1}{2}y) \text{ , also}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\pi(r,y^2,S_0,K_0)$$

$$= x\varphi(\tfrac{1}{y}\log x + \tfrac{1}{2}y)\cdot(-\log(x)/y^2 + \tfrac{1}{2}) - \varphi(\tfrac{1}{y}\log x - \tfrac{1}{2}y)\cdot(-\log(x)/y^2 - \tfrac{1}{2}).$$

Wegen $\varphi(a+b)/\varphi(a-b) = e^{-2ab}$ ist $\frac{\partial}{\partial y}\pi(r,y^2,S_0,K_0) > 0$ äquivalent zu:

$$x\cdot e^{-\log x}\cdot(-\log(x)/y^2 + \tfrac{1}{2}) > (-\log(x)/y^2 - \tfrac{1}{2}) \text{ , also zu } \tfrac{1}{2} > -\tfrac{1}{2} \text{ wegen } x\cdot e^{-\log x} = 1.$$

Das folgende Diagramm zeigt Wege zur Berechnung der Black–Scholes– Formel:

zeitdiskretes Modell	$\longrightarrow$	zeitdiskrete Formel
$\downarrow$		$\downarrow$
zeitstetiges Modell	$\longrightarrow$	zeitstetige Formel

Hier sind wir den Weg vom zeitdiskreten Modell zur zeitdiskreten Binomialformel mit Hilfe einfacher Arithmetik und dann von der zeitdiskreten Formel zur zeitstetigen Black–Scholes–Formel durch einen Grenzübergang analog zum Beweis des zentralen Grenzwertsatzes gegangen. Der Grenzübergang vom zeitdiskreten Modell zum zeitstetigen Modell wird durch das Invarianzprinzip von Donsker [vgl. Stochastische Prozesse/W.th. II 8.13] geliefert.
In dem zeitstetigen Modell kann die zeitstetige Black–Scholes–Formel mit Methoden der stochastischen Analysis hergeleitet werden.

2.17 Bemerkung. Die Darstellung des fairen Preises für $H = [S_T - K]^+$ als gewichtete Differenz von Wahrscheinlichkeiten ergibt sich auch in allgemeinen Situationen.
Ist P* ein Martingalmaß, also der diskontierte Preisprozeß X ein Martingal unter P*, so wird sich $E^*[H/R^T]$ als ein vernünftiger Preis erweisen. Unter P* ist insbesondere $E^*[X_T] = X_0$.
Damit ist $P'[\Gamma] := E^*[\mathbf{1}_\Gamma\cdot X_T/X_0]$ ein W–Maß und es gilt mit $\Gamma := \{S_T > K\}$:

$$E^*[(S_T-K)^+/R^T] = E^*[(X_T - K_0)\cdot\mathbf{1}_\Gamma] = X_0\cdot P'[\Gamma] - (K/R^T)\cdot P^*[\Gamma] \ .$$

2.18 Bemerkung. In einem Modell mit d = 1/u, also $\log d = -\log u = -U$ gilt wegen $X_t/X_{t-1} \in \{d,u\}$ offenbar $\Delta\log X_t \in \{-U,U\}$ und somit:

$$|\Delta\log X_t| = U, \quad (\Delta\log X_t)^2 = U^2 \text{ und .}$$

(2.19) $$\sum_{t=1}^n |\Delta\log X_t| = U, \quad \{\sum_{t=1}^n (\Delta\log X_t)^2\}^{\frac{1}{2}} = U.$$

In der Realität werden diese Beziehungen nicht streng gelten, da das Modell die Wirklichkeit nur annähernd beschreibt. Die Beziehung (2.19) legt aber nahe, die dort angegebenen Größen als Schätzer für U zu benutzen auf Grund einer Beobachtung von Daten über n Perioden. []

§3 Ein L^p–Modell.

Es sollen nun unvollständige Märkte untersucht werden. Die Bezeichnungen und Voraussetzungen schließen sich an §1 an.

Dazu sei jetzt $(\Omega,\mathfrak{F}) = (E\times...\times E,\mathfrak{E}\otimes..\otimes\mathfrak{E})$ mit einem W–Maß P versehen. Dann sind $X_1,...,X_T$ [und $S_1,...,S_T$] Zva auf $(\Omega,\mathfrak{F},P)$. Wir werden den reellwertigen stochastischen Prozeß $X = \{X_0,X_1,...,X_T\}$ in den Vordergrund stellen . Sei

(3.1) $\mathfrak{F}_0 := \{\emptyset,\Omega\}, \quad \mathfrak{F}_t := \sigma(I_1,...,I_t) = \{B\times E\times...\times E \subset \Omega;\ B\in \overset{t}{\underset{1}{\otimes}}\mathfrak{E}\},\ 1\le t\le T\}.$

Dann sind die $\mathfrak{F}_t$ Unter–σ–Algebrea von $\mathfrak{F}$ und es gilt: $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_1 \subset...\subset\mathfrak{F}_T = \mathfrak{F}$. $\{\mathfrak{F}_t\}$ ist eine sogenannte **Filterung in $\mathfrak{F}$**. Dabei stellt $\mathfrak{F}_t$ die Menge der bis zum Zeitpunkt t beobachtbaren Ereignisse dar. Eine reelle Funktion f auf Ω genau dann $\mathfrak{F}_t$–mb, wenn eine reelle mb Funktion g auf E^t existiert, mit $f = g\circ(I_1,...,I_t)$. [vgl. W–th.I Übungen]. In dem man die einzelnen Komponenten betrachtet, erhält man die gleiche Aussage für $\mathbb{R}^d$–wertige Funktionen.

Nach (1.3) ist X_t $\mathfrak{F}_t$–mb, der Prozeß $\{X_t\}$ also an die Filterung $\{\mathfrak{F}_t\}$ **adaptiert**.

Die folgende Voraussetzung möge stets erfüllt sein.

3.2 Voraussetzung. Für ein $p \in [1,\infty]$ gilt: $X_t^k \in L^p = L^p(\Omega,\mathfrak{F},P)$, $1\le k\le d$, für $1\le t\le T$.

3.3 Definition. Sei p=2 und d=1. Wir schreiben dann $X_t := X_t^1$. Der bedingte Erwartungswert $\mu_t := E[\Delta X_{t+1}\,|\,\mathfrak{F}_t]$ ist der **Driftkoeffizient**; die bedingte Varianz $\sigma_t^2 := E[\{\Delta X_{t+1}\}^2\,|\,\mathfrak{F}_t] - \mu_t^2$ heißt **Dispersionskoeffizient**, $0\le t<T$.

3.4 Beispiel. $P = P_1\times...P_T$ ist ein Produktmaß, wobei die P_i W–Maße auf $(E,\mathfrak{E})$ sind. Diese Annahme ist gleichwertig mit:

(3.4)' $I_1,...,I_T$ sind unabhängige Zva mit $I_t \sim P_t$.

Unter dieser Annahme sind die bedingten Verteilungen und Erwartungswerte in besonders einfacher und konstruktiver Weise zu berechnen.

Für eine etwa nach unten beschränkte, reelle Zva H auf $(\Omega,\mathfrak{F})$ ergibt sich dann mit Fubini:

(3.5) $E[H] = \int P_1[d\,i_1]\ \int...\int P_T[d\,i_T]\ H(i_1,...,i_T)\Big] = E[H\,|\,\mathfrak{F}_0].$

(3.6) $E[H\,|\,\mathfrak{F}_t] := F(I_1,...,I_t) : \Omega \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ mit
$F(\omega_t) := \int P_{t+1}[d\,i_{t+1}]\ \int ...\int P_T[d\,i_T]\ H(\omega_t,i_{t+1},...,i_T).$

3.7 Beispiel. Es liege die Situation aus Beispiel 3.4 vor. Es soll dann für p=2, d=1 folgender Ansatz untersucht werden:

(3.8) $\Delta X_t = \mu_{t-1} + \sigma_{t-1}\cdot\Delta W_t \Leftrightarrow \Delta X_t/X_{t-1} = \tilde\mu_{t-1} + \tilde\sigma_{t-1}\cdot\Delta W_t$ mit
$\tilde\mu_t := \mu_t/X_t$ und $\tilde\sigma_t := \sigma_t/X_t$.

Dabei seien μ_t und $\tilde{\mu}_t$ reelle sowie σ_t^2 und $\tilde{\sigma}_t^2$ nichtnegative und jeweils $\mathfrak{F}_t$–mb Funktionen und $\{W_t\}$ ein Prozeß mit $W_0 = 0$, $E[\Delta W_t] = 0$, $Var[\Delta W_t] = 1$, und $\Delta W_t = w_t \circ I_t$ für gewisse mb Funktionen w_t. Mit den I_t sind auch $\Delta W_1,...,\Delta W_T$ unabhängig. Man kann sich $\Delta W_t = I_t$ vorstellen, d.h. man wählt die Zva ΔW_t als die die Marktentwicklung bestimmenden Größen.. Dann sind die $\{\Delta W_t\}$ standardisierte unabhängige Zva; man spricht auch von einem (zeitdiskreten) **weißen Rauschen**. Der Prozeß $W = \{W_t\}$ hat **unabhängige Zuwächse**.

(3.8) ist eine **stochastische Differenzengleichung**.

[Im zeitstetigen Fall wählt man oft W als Wienerprozeß.]

In der vorliegenden Situation berechnet man leicht, daß μ_{t-1} und σ_{t-1}^2 Drift– und Dispersionskoeffizient sind. Die Notation $\tilde{\mu}_t := \mu_t/X_t$ und $\tilde{\sigma}_t := \sigma_t/X_t$ ist günstig für den Ansatz, daß die Änderungen ΔX_t proportional zu X_{t-1} sind. Bei hohen Preisen X_{t-1} wird man höhere Schwankungen erwarten als bei niedrigen Preisen. Das Modell ist also festgelegt durch die Angabe von $(\tilde{\mu}_t, \tilde{\sigma}_t^2) : E^t \mapsto \mathbb{R}\times(0,\infty)$, $0\le t<T$, einem weißen Rauschen $\{\Delta W_t, 1\le t\le T\}$ und den L^2–Bedingungen.

Dabei ist für $X_t>0$, $1\le t\le T$ bei $x_0>0$ hinreichend und notwendig:

(3.9) $\Delta W_t > -(1+\tilde{\mu}_{t-1})/\tilde{\sigma}_{t-1}$, $1\le t\le T$.

Läßt man die Periodenlänge gegen Null gehen, so hat man $\tilde{\sigma}_t \to 0$; gilt dann noch

$\underline{\lim}\, \tilde{\mu}/\tilde{\sigma} > -\infty$, so geht die rechte Seite in (3.9) gegen $-\infty$. Mit schrumpfender Periodenlänge wird die Bedingung (3.9) immer schwächer. Das erklärt auch, warum diese Bedingung im zeitstetigen Fall nicht auftaucht. Durch die Vorgabe der Parameter $\tilde{\mu}_t$ und $\tilde{\sigma}_t$ sowie eines weißen Rauschens ist also das Modell festgelegt. []

3.10 Beispiel. Es liege wieder die Situation 3.4 vor. Es soll für d=1 folgender Ansatz untersucht werden:

(3.11) $X_t = x_0 \cdot e^{Y_t} = X_{t-1} \cdot (1+Z_t)$ mit $Z_t := e^{\Delta Y_t} - 1$, d.h.

(3.11)' $\Delta X_t/X_{t-1} = Z_t$.

Es gelte jetzt $\Delta Y_t = y_t \circ I_t$ für mb Funktionen $y_t$und $Y_0=0$. Dann hat $Y = \{Y_t\}$ unabhängige Zuwächse. Ebenso sind $Z_1,...,Z_T$ unabhängig als Funktionen von $I_1,...,I_T$. Man kann sich hier auch $\Delta Y_t = I_t$ oder $Z_t = I_t$ vorstellen, d.h. man kann entweder die ΔY_t oder die Z_t als die die Marktentwicklung definierenden Größen wählen. Z_t ist der relative Zuwachs und kann als ein **stochastischer Zinssatz** interpretiert werden; er nimmt i.a. auch negative Werte an.

Dabei sei Z_t nicht f.s. konstant. Hier handelt es sich offenbar um eine Verallgemeinerung des Binomialmodells.

Gilt $Z_t \in L^2 \ \forall\, t$ und setzt man

$$\tilde{\mu}_{t-1} := E[Z_t],\ \tilde{\sigma}^2_{t-1} := \mathrm{Var}[Z_t]\ ,\Delta W_t := (Z_t - E[Z_t]) / \sqrt{\mathrm{Var}[Z_t]},\ W_0 := 0,$$

so erfüllt der Prozeß $W = \{W_t\}$ die Voraussetzungen von 3.7.

Dabei sind jetzt $\tilde{\mu}_t$, $\tilde{\sigma}^2_t$ Konstanten, für die (3.9) gelten sollte, mit

(3.8)' $$\Delta X_t / X_{t-1} = \tilde{\mu}_{t-1} + \tilde{\sigma}_{t-1} \cdot \Delta W_t\ .$$

Wegen $\Delta Y_t = \Delta \log X_t$ entspricht der Fall $\Delta Y_t \sim N(b - \frac{1}{2}\tau^2, \tau^2)$ der geometrischen Brownschen Bewegung im zeitstetigen Fall . Dann gilt wegen $E[e^{\alpha \cdot N}] = e^{\frac{1}{2}\alpha^2}$ für $N \sim N(0,1).$]

$$\tilde{\mu} = e^b - 1 = b + o(b) \text{ und } \tilde{\sigma} = e^b \cdot \sqrt{e^{\tau^2} - 1}\ .\ [\,]$$

3.12 Definition. Sei P* ein W–Maß auf $\mathfrak{F}$. Ist der diskontierte Preisprozeß X ein P*–Martingal, d.h. X^k_t ist ein Martingal unter P* für $1 \le k \le d$, so heißt P* ein **Martingalmaß**.

[Ein reellwertiger Prozeß $(M_t,\ 0 \le t \le T)$ heißt ein P*–Martingal, wenn gilt: M_t ist $\mathfrak{F}_t$–mb. und P*–intb. $\forall t$ und $\int_A M_t\, dP^* = \int_A M_{t+1}\, dP^* \ \forall\, A \in \mathfrak{F}_t$, d.h. $E^*[\Delta M_{t+1} \mid \mathfrak{F}_t] = 0\ ,\ 0 \le t < T.$]

3.13 Bemerkung. Für d=1 ist X genau dann ein P–Martingal, wenn gilt: $\mu_t = 0,\ 0 \le t < T$, f.s. . [ ]

Wir betrachten jetzt nur Pläne mit einer Integrabilitätsbedingung:

3.14 Definition. Wir schreiben $\xi \in \Xi^p(P^*)$ für ein $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{T-1})$ und ein W.Maß P* auf $(\Omega, \mathfrak{F})$, falls wie in §1 ein Portfolioplan (ϑ, V_T) existiert mit $\xi^k_t = \vartheta^k_t$, $1 \le k \le d$, und falls

$$E^*[\,|\xi^k_{t-1} \cdot \Delta X^k_t|^p\,] < \infty\ ,\ 1 \le k \le d,\ 1 \le t \le T.$$

Es sei $\Xi^p = \Xi^p(P)$.

Für den in (1.12) definierten Gewinnprozeß im diskontierten Modell gilt:

(3.15) $$G_t(\xi) = \sum_{m=1}^{t} \xi^{\top}_{m-1} \cdot \Delta X_m \in L^p(P^*)\ ,\ 0 \le t \le T\ ,\ \xi \in \Xi^p(P^*).$$

3.16 Lemma. Es sind äquivalent:

i) X ist ein P*– Martingal;

ii) $\{G_t(\xi),\ 0 \le t \le T\}$ ist ein P*–Martingal $\forall\, \xi \in \Xi^1(P^*)$;

iii) $E^*[G_T(\xi)] = 0 \ \forall\, \xi \in \Xi^1(P^*)$.

Beweis. "(i)⇒(ii)" $E^*[\Delta G_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = E^*[\xi^\top_{t-1} \cdot \Delta X_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = \xi^\top_{t-1} \cdot E^*[\Delta X_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = 0$.
"(ii)⇒(iii)" Es gilt insbesondere $E^*[\Delta G_t] = 0$ und somit $E^*[G_T] = E^*[G_0] = 0$.
"(iii)⇒(i)" Für $A \in \mathfrak{F}_{t-1}$, $0 \le t < T$ folgt $E^*[\mathbf{1}_A \cdot \Delta X^k_t] = 0$, indem man $\xi^k_{t-1} = \mathbf{1}_A$ und = 0 sonst definiert; dann ist $G_T = \mathbf{1}_A \cdot \Delta X^k_t$. []

Wir werden mit künstlichen W–Maßen P* arbeiten mit:

(3.17) $P^*[A] > 0 \Leftrightarrow P[A] > 0$ d.h. P* << P und P<<P*.

Einerseits sollen unter P* keine Ereignisse eintreten, die unter P nicht möglich sind. Dazu dient die Forderung: P*<<P, d.h. nach dem Satz von Radon–Nikodym, daß P* eine P–Dichte Z := dP*/dP hat. Andererseits will man von "für P*–f.a. ω" auf "für P–f.a. ω" schließen.
Dazu dient die Forderung: P<<P*; diese ist in der Situation dP* = Z dP äquivalent mit Z>0 P–f.s. . In der Situation (3.17) sagt man, daß P und P* **äquivalent** sind.
Wir schreiben für ein W–Maß Q auf $\mathfrak{F}$:

(3.18) $Q \in \mathbb{Q}^q(P) :\Leftrightarrow$ es existiert eine positive Dichte $dQ/dP \in L^q$,

Dann folgt:

3.19 Lemma Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) $Q \in \mathbb{Q}^q(P) \Rightarrow \left[P\text{–f.s.} \Leftrightarrow Q\text{–f.s.} \right]$;

(b) $Q \in \mathbb{Q}^q(P) \Rightarrow L^p(P) \subset L^1(Q)$, insbesondere gilt: $\Xi^p \subset \Xi^1(Q)$.

Beweis: 3.19(a) ist klar, und (b) folgt aus der Hölderschen Ungleichung:

$$E_Q[|Y|] = E[Z \cdot |Y|] \le E[Z^{p'}]^{1/p'} \cdot E[|Y|^p]^{1/p}, \quad 0<p<\infty \quad \text{mit } Z := dQ/dP.$$

Eine entsprechende Ungleichung erhält man für p=1,∞. []
Sei

(3.20) $\mathbb{P}^{*q} := \mathbb{P}^{*q}(P) := \{Q \in \mathbb{Q}^q(P);\ Q \text{ ist ein Martingalmaß}\}$,

3.21 Bayesformel. Für $Q \in \mathbb{Q}^{p'}(P)$ und $dQ/dP =: Z$ gilt:

$$E_Q[H | \mathfrak{F}_t] = E[Z \cdot H | \mathfrak{F}_t] \,/\, E[Z | \mathfrak{F}_t] \quad , \ H \in L^p(P).$$

Beweis: Sei $H_t := E[Z \cdot H | \mathfrak{F}_t] \,/\, E[Z | \mathfrak{F}_t]$, dann hat man für $A \in \mathfrak{F}_t$:

$$\int_A H\, dQ = \int_A Z \cdot H\, dP = \int_A E[Z \cdot H | \mathfrak{F}_t]\, dP = \int_A H_t \cdot E[Z | \mathfrak{F}_t]\, dP$$
$$= \int_A E[H_t \cdot Z | \mathfrak{F}_t]\, dP = \int_A H_t \cdot Z\, dP \ , \text{ also}$$
$$\int_A E[H | \mathfrak{F}_t]\, dQ = \int_A H_t\, dQ\ . \ []$$

§ 4 Preissysteme und Martingalmaße.

Es liege das L^p–Modell von §3 vor. Als Zahlungsansprüche H, die in T anfallen, betrachten wir beliebige H, sodaß für die diskontierten Größen gilt: $H/B_T \in L^p(\Omega,\mathfrak{F},P)$. Die zentrale Aufgabe ist es, jedem solchen H einen Prämie zuzuordnen.
Es soll erinnert werden an [vgl. (1.11*)]:

(4.1) $\check{V}_T = V_T/B_T = v_0 + G_T(\xi)$ für einen selbstfinanzierenden Plan (v_0,ξ).

4.2 Definition. Sei $L_T^p := \{ H ,\ H/B_T \in L^p(\Omega,\mathfrak{F},P)\}$.

Ein **Preissystem** ist eine Abbildung $\Pi : L_T^p \mapsto \mathbb{R}$ mit

(i) $\Pi(\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2) = \alpha_1\Pi(H_1) + \alpha_2\Pi(H_2)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $H_i \in L_T^p$;

(ii) $\sup \left\{ |\Pi(H)| ; E[(H/B_T)^p] \le 1 \text{ für } p<\infty \text{ bzw. } |H/B_T| \le 1 \text{ f.s. für } p=\infty \right\} < \infty$;

(iii) für $H \ge 0$ f.s. gilt:

(a) $\Pi(H) \ge 0$;

(b) $\Pi(H) > 0 \Leftrightarrow P[H > 0] > 0$;

d.h. $\tilde{\Pi} : L^p \mapsto \mathbb{R}$, $\tilde{\Pi}(\tilde{H}) := \Pi(B_T \cdot \tilde{H})$ ist eine positive, stetige (d.h. hier beschränkte), lineare Abbildung [ein positiver linearer Operator].

Wegen der Linearität genügt es einzelne Zahlungsansprüche zu betrachten; die Bewertung eines Zahlungsstroms (Z_t) ergibt sich dann aus der Summe der Prämien für die einzelnen Zahlungssansprüche Z_t z.Zt. t mit t als Zeithorizont.

4.3 Definition. Ein Preissystem Π heißt **konsistent**, falls gilt:

Ist $H \in L_T^p$ erreichbar durch einen selbstfinanzierenden Plan (v_0,ξ), hat man also
$H/B_T = v_0 + G_T(\xi)$ für ein $\xi \in \Xi^p$, so gilt $\Pi(H) = v_0$.

In der Situation eines erreichbaren Zahlungsanspruchs H hatten wir in §1 v_0 bereits als faire Prämie erkannt. Aus 3.19 und der Hölderschen Ungleichung:

$$|E_Q[H/B_T]| \le E[Z \cdot |H/B|] \le E[Z^q]^{1/q} \cdot E[|H/B_T|^p]^{1/p} , \ 1<p<\infty,$$

erhält man

4.4 Lemma. Für $Q \in \mathfrak{Q}^q(P)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist
$\Pi(H) := E_Q[H/B_T]$ eine Preissystem mit $\Pi(B_T) = 1$.

Es soll untersucht werden, wann ein Preissystem wie in 4.4 konsistent ist. Die Eigenschaft $\Pi(B_T) = 1$ ist sicherlich notwendig; betrachte etwa $v_0=1$, $\xi_t=0\ \forall$ t, also $V_T = B_T$.

Eine weitere notwendige Eigenschaft für die Konsistenz von $\Pi(H) := E_Q[H/B_T]$ soll jetzt ermittelt werden. Sei $v_0 = 0$, $H/B_T = G_T(\xi)$ für ein $\xi \in \Xi^p$. Dann muß gelten:
$E_Q[G_T(\xi)] = 0$ für $\xi \in \Xi^p \subset \Xi^1(P)$. Der Beweis von 3.16 zeigt nun:
X^k ist für $1 \le k \le d$ unter Q ein Martingal, d.h. Q ist ein Martingalmaß.

4.5 Satz. Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Ist $1 \le p < \infty$, so existiert eine eineindeutige Beziehung zwischen konsistenten Preissystemen Π und W–Maßen $Q \in \mathbb{P}^{*q}$ gemäß:

(i) $Q[A] = \Pi(B_T \cdot \mathbf{1}_A)$, $A \in \mathfrak{F}$;

(ii) $\Pi(H) = E_Q[H/B_T]$, $H \in L_T^p$.

(b) Für $p = \infty$ wird für $Q \in \mathbb{P}^{*1}$ zumindest durch (ii) ein konsistentes Preissystem definiert.

Beweis: Sei Π ein konsistentes Preissystem, $\tilde{\Pi}$ wie in 4.2 und Q gemäß (i) definiert. Dann ist $\tilde{\Pi}$ ein Element des Dualraumes zum Banachraum L^p. Damit existiert für $1 \le p < \infty$ ein $Z \in L^q$ mit

(*) $\tilde{\Pi}(\tilde{H}) = E[Z \cdot \tilde{H}]$, insbesondere $Q[A] = \tilde{\Pi}(\mathbf{1}_A) = E[Z \cdot \mathbf{1}_A]$.

Wegen der Positivität von $\tilde{\Pi}$ folgt: $Z \ge 0$ f.s. [W.th. 9.20].

Gilt ferner $P[A] > 0$ so hat man nach 4.2 (iii): $\tilde{\Pi}(\mathbf{1}_A) = Q[A] > 0$; somit gilt: $Z > 0$ f.s. . Ferner gilt: $Q[\Omega] = \Pi(B_T) = 1$ wegen der Konsistenz.

Also wissen wir: Q ist ein W–Maß mit der P–Dichte Z ; insbesondere: $Q \in \mathbb{Q}^2(P)$. Gemäß (*) gilt auch: $\Pi(H) = \tilde{\Pi}(H/B_T) = E_Q[H/B_T]$; die in (ii) definierte Abbildung ist also die Umkehrabbildung zu (i).

Nach den Vorüberlegungen folgt nun aus der Konsistenz, daß Q ein Martingalmaß ist.

Sei nun $1 \le p \le \infty$, $Q \in \mathbb{P}^{*q}$ und Π gemäß (ii) definiert. Dann ist Π ein Preissystem nach 4.4. Da X ein Martingal unter Q ist, folgt aus 3.16: $E_Q[G_T(\xi)] = 0 \quad \forall\, \xi \in \Xi^1(Q) \supset \Xi^p(P)$ und somit die Konsistenz: Sei nämlich $H/B_T = v_0 + G_T(\xi)$ für ein $\xi \in \Xi^p$; dann folgt:
$\Pi(H) = E_Q[H/B_T] = E_Q[v_0 + G_T(\xi)] = v_0 + E_Q[G_T(\xi)] = v_0$. []

Ein konsistentes Preissystem gewinnt man also über ein Martingalmaß. Es soll nun untersucht werden, wie man zu einem Martingalmaß kommen kann.

4.6 Proposition. Sei Q ein Maß auf $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_T$; dann sind äquivalent:

i) $Q \in \mathbb{P}^{*1}$.

ii) Es existiert ein Prozeß $(L_t,\ 0\le t\le T)$ mit $\frac{dQ}{dP} = \prod_{t=1}^{T} L_t$ und $L_0 := 1$, wobei für $1\le t\le T$ gilt:

(4.7a) $L_t > 0$, L_t ist $\mathfrak{F}_t$–mb., $E[L_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = \mathbf{1}$, $E[L_t \cdot X_t^k \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = X_{t-1}^k$ f. s. , $1\le k\le d$.

iii) Es existiert ein P–Martingal $(M_t^Q,\ 0\le t\le T)$ mit $\frac{dQ}{dP} = \prod_{t=1}^{T} (1 + \Delta M_t^Q)$;

dabei gilt $M_0^Q = 0$ und für $1\le t\le T$:

(4.7b) $\Delta M_t^Q > -1$, $E[(1+\Delta M_t^Q)\cdot \Delta X_t^k \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = 0$ f. s. , $1\le k\le d$.

iv) Es existiert ein P–Martingal $\{Z_t,\ 0\le t\le T\}$ mit $\frac{dQ}{dP} = Z_T$, $Z_0 = 1$; dabei gilt für $1\le t\le T$:

(4.7c) $Z_t > 0$, Z_t ist $\mathfrak{F}_t$–mb , auch $\{Z_t \cdot X_t^k\}$ ist P–Martingal ,$1\le k\le d$.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Mit $Z := \frac{dQ}{dP} > 0$ gilt: $Z \in L^1$ und $E[Z \mid \mathfrak{F}_t] > 0$. Setze

$L_1 := E[Z \mid \mathfrak{F}_1]$, $L_1 \cdot \ldots \cdot L_{t-1} \cdot L_t := E[Z \mid \mathfrak{F}_t]$.

Nach Konstruktion gilt: $L_t > 0$. Wegen $Z = E[Z \mid \mathfrak{F}_T]$ folgt: $Z = L_1 \cdot \ldots \cdot L_T$.

Ferner ergibt sich für eine $\mathfrak{F}_t$–mb Zva $Y\ge 0$:

$$E[Z\cdot Y \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = E[\,E[Z\cdot Y \mid \mathfrak{F}_t] \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = E[\,Y\cdot E[Z \mid \mathfrak{F}_t] \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = E[Y\cdot L_1 \cdot \ldots \cdot L_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}]$$

$$= L_1 \cdot \ldots \cdot L_{t-1} \cdot E[L_t \cdot Y \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = E[Z \mid \mathfrak{F}_{t-1}] \cdot E[L_t \cdot Y \mid \mathfrak{F}_{t-1}] .$$

Daraus erhält man mit der Bayes–Formel:

$E[L_t \cdot Y \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = E[Z\cdot Y \mid \mathfrak{F}_{t-1}] \,/\, E[Z \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = E_Q[Y \mid \mathfrak{F}_{t-1}]$.

Mit $Y \equiv 1$ und $Y \equiv X_t^k$ folgt nun die Behauptung.

"(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)" Offenbar ist (4.7a) äquivalent zu:

(4.7)* $L_t > 0$, L_t ist $\mathfrak{F}_t$–mb., $E[L_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = \mathbf{1}$, $E[L_t \cdot \Delta X_t^k \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = 0$ f. s. , $1\le k\le d$.

Setze nun $\Delta M_t^Q := L_t - 1$.

"(ii) $\Rightarrow$ (iv) Setze $Z_t = \prod_1^t L_m$ und Y wie oben; dann gilt:

$E[Z_t \cdot Y \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = Z_{t-1} \cdot E[L_t \cdot Y \mid \mathfrak{F}_{t-1}]$.

Mit $Y \equiv 1$ und $Y \equiv X_t^k$ folgt nun wieder die Behauptung.

"(iv) $\Rightarrow$ (i)" Wegen $E[Z_T] = E[Z_0] = 1$ ist Z_T P–Dichte eines W–Maßes Q.

Zum Nachweis der Martingaleingenschaft sei $A \in \mathfrak{F}_{t-1}$, $m \in \{t-1,t\}$; dann folgt:

$$\int_A X_m^k \, dQ = \int_A X_m^k \cdot Z_T \, dP = \int_A X_m^k \cdot E[Z_T \mid \mathfrak{F}_m] \, dP = \int_A X_m^k \cdot Z_m \, dP .$$

Der letzte Ausdruck ist nach Voraussetzung unabhängig von m. $[\,]$

In der Situation von 4.6 gilt nach dem Beweis:

(4.8) $Z_t = \prod_{m=1}^{t} (1 + \Delta M_t^Q) = \prod_{m=1}^{t} L_t$,

$Z_t = E\left[\frac{dQ}{dP} \mid \mathfrak{F}_t\right] = dQ\big|_{\mathfrak{F}_t} / dP\big|_{\mathfrak{F}_t}$.

Die letzte Beziehung folgt dabei aus: $\forall\, A \in \mathfrak{F}_t \;\; Q[A] = \int_A \frac{dQ}{dP}\, dP = \int_A Z_t\, dP$.

Der Prozeß $(Z_t,\ 0 \le t \le T)$ heißt **Dichte–Prozeß**. Der Prozeß $(\prod_{m=1}^{t} (1 + \Delta M_m^Q)\ ,\ 0 \le t \le T) =: \mathcal{E}(M)$ heißt **exponentielles Martingal** [von Doléans–Dade] und ist wie M^Q ein Martingal. Das positive Martingal läßt sich also als exponentielles Martingal schreiben.

4.9 Beispiel (Girsanov–Transformation)

Um ein Martingalmaß für den Fall d=1 gemäß (4.7)* zu finden, machen wir den Ansatz:

$L_t = a \cdot \Delta X_t + b$, wobei $a = a_{t-1},\ b = b_{t-1}\ \mathfrak{F}_{t-1}$–mb sind.

Die Forderungen in (4.7)* sind dann erfüllt, wenn gilt:

$a \cdot \mu_{t-1} + b = 1,\ a \cdot (\sigma_{t-1}^2 + \mu_{t-1}^2) + b \cdot \mu_t = 0$, d.h.

$a = -\mu_{t-1}/\sigma_{t-1}^2\ ,\ b = 1 + \{\mu_{t-1}/\sigma_{t-1}\}^2$.

Für L_t ergibt sich somit:

$$L_t = 1 - \frac{\mu_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \cdot \frac{\Delta X_t \ - \ \mu_{t-1}}{\sigma_{t-1}} = 1 - \frac{\mu_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \cdot \Delta W_t\ ,$$

wenn man ΔX_t wie in der Darstellung (3.8) wählt, wobei ΔW_t standardisierte Zva sind. Problematisch ist hier die Forderung: $L_t > 0$. Sie ist erfüllt, wenn die Störungen ΔW_t nicht zu groß sind. Als einfache Bedingung für "$L_t > 0$" hat man offenbar:

(4.10) $\operatorname{sgn}(\mu_{t-1}) \cdot \Delta W_t < 1 \,/\, \|\mu_{t-1}/\sigma_{t-1}\|_\infty$.

Der Name Girsanov–Transformation wird in §8 gerechtfertigt. []

4.11 Beispiel (exponentielle Zentrierung, Esscher–Transformation).

Wir machen wieder für d=1 unter geeigneten Integrierbarkeitsbedingungen für L_t den Ansatz:

$L_t = \exp\{a \cdot \Delta X_t + b\}$ mit $a = a_{t-1},\ b = b_{t-1}\ \mathfrak{F}_{t-1}$–mb.

Es bezeichne $\psi(s)$ die momentenerzeugende Funktion der bedingten Verteilung von ΔX_t, also

$\mathbb{R} \ni s \mapsto \psi(s) = \psi_{t-1}(s \mid \omega_{t-1}) := E\left[\exp\{s \cdot \Delta X_t\} \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right](\omega_{t-1})$.

Dann ist $J := \{s;\ \psi(s) < \infty\}$ ein Intervall. Es gelte: $J \neq \emptyset$ und $\lim_{s \to \partial J} \psi(s) = \infty$; diese Forderung ist nicht stark (unter der noch zu formulierenden Bedingung der Arbitragefreiheit). Dann hat ψ ein Minimum etwa bei s*, und es gilt: $\psi'(s^*) = 0 = E\left[\Delta X_t \cdot \exp\{s^* \cdot \Delta X_t\} \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right]$.

Nun kann man setzen:

$L_t = \exp\{s^* \cdot \Delta X_t\}/\psi(s^*)$, also $a := s^*$ und $\exp\{b\} := 1 / \psi(s^*)$. []

4.12 Beispiel.

Um ein Martingalmaß gemäß (4.7)* zu finden, führt auch der folgende Ansatz zu einem interessanten Maß:

$L_t = (a^\top \cdot \Delta X_t + b)^{-1}$, wobei $a = a_{t-1}$, $b = b_{t-1}$ $\mathfrak{F}_{t-1}$–mb sind.

Dieser Ansatz soll in § 7 weiterverfolgt werden.

Vergleich mit dem Binomialmodell.

Wir verallgemeinern die Voraussetzungen des Binomialmodells, in dem wir fordern:

(4.13) $d \cdot X_{t-1} \le X_t \le u \cdot X_{t-1}$ für gewisse Zahlen $0 < d < 1 < u < \infty$.

Schreiben wir wie in (3.11): $X_t = X_{t-1} \cdot \exp\{\Delta Y_t\}$, so bedeutet (4.13) gerade:

(4.13)' $d \le \exp\{\Delta Y_t\} = X_t / X_{t-1} \le u$.

Hier können wir offenbar $p = \infty$ und $q = 1$ wählen wegen $X_t \le u^t \cdot x_0$.

Ferner betrachten wir Zahlungsansprüche der Form

(4.14) $H/B_T = h(X_T)$ mit $h : (0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ konvex

mit $B_t = (1+r)^t$. Ein Beispiel ist der diskontierte Zahlungsanspruch $H/B_T = (X_T - K_0)^+$ zu einer europäischen Kaufoption. Nach Satz 4.5 bedeutet eine Bewertung des Zahlungsanspruchs die Berechnung von

$$E_Q[H/B_T] = E_Q[h(X_T)] \quad \text{mit einem Martingalmaß } Q \in \mathbb{P}^{*1}.$$

Dabei soll eine Beziehung zum Binomialmodell wie in §2 hergestellt werden; wir bezeichnen die zugehörigen Größen mit "*", also etwa $E^* = \{d,u\}$,

$X_t^*/X_{t-1}^* \in \{d,u\}$ und P^* das eindeutige Martingalmaß dazu.

Aufgrund von (4.13) und(4.14) erhält man:

$$h(X_t) \le \frac{u \cdot X_{t-1} - X_t}{u \cdot X_{t-1} - d \cdot X_{t-1}} h(d \cdot X_{t-1}) + \frac{X_t - d \cdot X_{t-1}}{u \cdot X_{t-1} - d \cdot X_{t-1}} h(u \cdot X_{t-1}).$$

Aus der Martingaleigenschaft ergibt sich:

$$E_Q[h(X_t)] \le \frac{u-1}{u-d} \cdot h(d \cdot X_{t-1}) + \frac{1-d}{u-d} \cdot h(u \cdot X_{t-1}) =: h^{[1]}(X_{t-1}),$$

und andererseits: $E_{P^*}[h(X_t^*) \mid \mathfrak{F}_{t-1}^*] = h^{[1]}(X_{t-1}^*)$ [vgl. 2.1, 2.2].

Nun ist $h^{[1]}$ wieder konvex und man erhält:

$$E_Q[h(X_t) \mid \mathfrak{F}_{t-2}] \le E_Q[h^{[1]}(X_{t-1}) \mid \mathfrak{F}_{t-2}]$$
$$\le \frac{u-1}{u-d} \cdot h^{[1]}(d \cdot X_{t-2}) + \frac{1-d}{u-d} \cdot h^{[1]}(u \cdot X_{t-2}) =: h^{[2]}(X_{t-2}),$$

und andererseits: $E_{P^*}[h(X_t^*) \mid \mathfrak{F}_{t-2}^*] = E_{P^*}[h^{[1]}(X_{t-1}^*) \mid \mathfrak{F}_{t-2}^*] = h^{[2]}(X_{t-2}^*)$.

Mit vollständiger Induktion und $E[...] = E[... | \mathfrak{F}_0]$ erhält man:

$$E_Q[h(X_T)] = E[Z_T \cdot h(X_T)] \le E_{P^*}[h(X_T^*)] \text{ , also:}$$

(4.15) $$E_Q[H/B_T] \le E_{P^*}[H^*/B_T] \quad \forall\, Q \in \mathbb{P}^{*1}(P).$$

Für eine europäische Kaufoption mit Wahrnehmungspreis $K = B_T \cdot K_0$ erhält man also:

$$E_Q[(S_T - K)^+/B_T] = E_Q[(X_T - K_0)^+] \le E_{P^*}[(X_T^* - K_0)^+].$$

4.16 Satz. In der obigen Situation gilt für eine europäische Kaufoption mit $K_0 = K/B_T$:

$$\bar{\Pi}(H) := \sup \{ E_Q[(X_T - K_0)^+/B_T]; Q \in \mathbb{P}^{*1}(P) \} \le E_{P^*}[(X_T^* - K_0)^+] ;$$

dabei ist $E_{P^*}[(X_T^* - K_0)^+]$ die Bewertungsformel im Binomialmodell.

Wählt man also den Preis nach dem Binomialmodell, wobei u und d als "Extremwerte", also gemäß $d = \inf X_t/X_{t-1}$, $u = \sup X_t/X_{t-1}$, so ist dieser Preis eine obere Schranke für eine Bewertung nach einem konsistenten Preissystem.

Definition 1.17 und 1.18 müssen angepaßt werden, da jetzt Eigenschaften auf Nullmengen keine Rolle spielen.

4.17 Definition. Eine **Arbitragemöglichkeit** ist gegeben, falls ein $\xi \in \Xi$ existiert mit $G_T(\xi) \ge 0$ f.s. und $P[G_T(\xi) > 0] > 0$, d.h. bei $v_0 = 0$: $V_T(\xi) \ge 0$ f.s., $P[V_T(\xi) > 0] > 0$.
Arbitragefreiheit liegt also gerade unter der folgenden No–Arbitrage–Bedingung vor:

(NA) Für $\xi \in \Xi$ gilt: $G_T(\xi) \ge 0$ f.s. $\Rightarrow G_T(\xi) = 0$ f.s. .

Es soll nun eine lokale Charakterisierung von (NA) gegeben werden.

4.18 Lemma. Jede der folgenden Bedingungen ist äquivalent zu (NA):

(NA^O) Für $1 \le t \le T$, $\xi \in \Xi$ gilt: $\xi_{t-1}^\top \cdot \Delta X_t \ge 0$ f.s. $\Rightarrow$ $\xi_{t-1}^\top \cdot \Delta X_t = 0$ f.s. .

(NA') Für $1 \le t \le T$, $\xi \in \Xi$ gilt: $P[\xi_{t-1}^\top \cdot \Delta X_t > 0] > 0 \Leftrightarrow P[\xi_{t-1}^\top \cdot \Delta X_t < 0] > 0$.

Beweis: Die Äquivalenz von (NA^O) und (NA') ist offensichtlich.

"(NA) $\Rightarrow$ (NA^O)" Setzt man $\xi_m = 0$ für $m \ne t$, so gilt: $G_T(\xi) = \xi_{t-1}^\top \cdot \Delta X_t$.

"(NA^O) $\Rightarrow$ (NA)" Es soll eine Induktion nach T durchgeführt werden.
Für T=1 sind beide Bedingungen die gleichen. (NA) gelte nun für T–1.
Sei nun $G_T = G_T(\xi) \ge 0$ f.s. .

Ist $G_{T-1} = 0$ f.s., so muß $\xi_{T-1}^\top \cdot \Delta X_T \ge 0$ gelten und wir können $G_T = 0$ f.s. schließen.
Angenommen es gälte nicht: $G_{T-1} = 0$ f.s., aber $G_T \ge 0$ f.s. .

Nach unserer Induktionsvoraussetzung kann nicht $G_{T-1} \geq 0$ f.s. und $P[G_{T-1}>0]>0$ gelten. Also erhalten wir für $A := \{G_{T-1} < 0\} \in \mathfrak{F}_{T-1}$: $P[A] >0$, $\xi^{\top}_{T-1} \cdot \Delta X_T > 0$ f.s. auf A.
Für $\xi'_{T-1} := \mathbf{1}_A \cdot \xi_{T-1}$ gilt nun: $\xi'^{\top}_{T-1} \cdot \Delta X_T = \mathbf{1}_A \cdot \xi^{\top}_{T-1} \cdot \Delta X_T \geq 0$ f.s. und $\xi'^{\top}_{T-1} \cdot \Delta X_T > 0$ auf A.
Dies ist aber ein Widerspruch zu (NA^o). []

Wir können nun den einen der wichtigsten Sätze formulieren:

4.19 Satz Unter (NA) existiert ein Martingalmaß mit positiver, beschränkter P–Dichte .

Der Beweis soll in §5 gegeben werden. Als Korollar ergibt sich:

4.**20 Fundamentalsatz.** Es sind äquivalent:

i) es gilt (NA);

ii) $\mathbb{P}^{*\infty}$ ist nicht leer;

iii) $\mathbb{P}^{*q}$ ist nicht leer (p wie in 3.2, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Beweis: Gemäß 4.19 folgt (ii) aus (i). Wegen $\mathbb{P}^{*\infty} \subset \mathbb{P}^{*q}$ hat man "(ii) $\Rightarrow$ (iii)".

Die Richtung "(iii) $\Rightarrow$ (i)" ist leicht zu zeigen. Sei $Q \in \mathbb{P}^{*q}$; wir zeigen (NA^o).

Sei $\xi \in \Xi$ mit $\xi^{\top}_{t-1} \cdot \Delta X_t \geq 0$ f.s. ; dann hat man auch $\tilde{\xi}^{\top}_{t-1} \cdot \Delta X_t \geq 0$ f.s. mit

$$\tilde{\xi}^k_t := \xi^k_t \cdot N_t \text{ und } N_t := (1 + \sum_1^d |\xi^j_t|)^{-1} > 0.$$

Es folgt $|\tilde{\xi}^k_t| \leq 1$ und somit $\tilde{\xi} \in \Xi^p(P) \subset \Xi^1(Q)$.

Es gilt nun : $E_Q[\tilde{\xi}^{\top}_{t-1} \cdot \Delta X_t] = E_Q[\tilde{\xi}^{\top}_{t-1} \cdot E_Q[\Delta X_t | \mathfrak{F}_{t-1}]] = 0$.

Somit ergibt sich: $\tilde{\xi}^{\top}_{t-1} \cdot \Delta X_t = 0 = N_{t-1} \cdot \xi^{\top}_{t-1} \cdot \Delta X_t$ f.s. , d.h. $\xi^{\top}_{t-1} \cdot \Delta X_t = 0$ f.s. . []

§ 5 Der Fundamentalsatz,

Hier soll ein Beweis von 4.19 gegeben werden. Dieser nimmt die Idee aus Beispiel 4.11 über die exponentielle Zentrierung oder Esscher–Transformation auf und orientiert sich an Rogers [Stochastics and Stochastics Reports **51** , 41–49, 1994].

Um Integrierbarkeitsprobleme zu umgehen, gehen wir über zu dem zu P äquivalenten Maß

(5.1) $$P'[A] := {}_A\int \exp\{-\sum_{t=1}^{T} \|\Delta X_t\|^2\}\, dP \,/\, E[-\exp\{\sum_{t=1}^{T} \|\Delta X\ \ \|^2\}] \ .$$

Es soll zunächst die Idee für den Fall T=1 gegeben werden. Sei dazu $\Delta X := \Delta X_1$ und

$$\tilde{\varphi}(a) := E'[e^{a^\top \cdot \Delta X}] \ , \ a \in \mathbb{R}^d.$$

Ist a* eine Minimumstelle von $\tilde{\varphi}$, so gilt für den Gradienten

$$0 = E'[\Delta X \cdot e^{a^{*\top} \cdot \Delta X}].$$

Dann ist also

$$P^*[A] := E'[\mathbf{1}_A \cdot e^{a^{*\top} \cdot \Delta X}] \,/\, E'[e^{a^{*\top} \cdot \Delta X}] =$$
$$ {}_A\int \exp\{a^{*\top} \cdot \Delta X - \|\Delta X\|^2\}\, dP \,/\, \int \exp\{...\}\, dP$$

das gesuchte Martingalmaß mit beschränkter P–Dichte. Es kann und wird aber gezeigt werden, daß eine Minimumstelle von $\tilde{\varphi}$ bei Arbitragefreiheit existiert.

Die zu minimierende Funktion $\tilde{\varphi}$ wurde über die e–Funktion definiert. Diese ist für die Konstruktion einer beschränkten Dichte im Mehrperiodenfall noch nicht ganz geeignet. Wir ersetzen sie deshalb auf der rechten Halbachse durch eine Funktion, die nur linear wächst:

(5.2a) $$\Lambda(x) := \begin{cases} 2x + e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \\ e^{x} & \text{für } x \leq 0 \end{cases}, \quad \text{also}$$

(5.2b) $$\Lambda'(x) := \begin{cases} 2 - e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \\ e^{x} & \text{für } x \leq 0 \end{cases}, \quad \Lambda''(x) = e^{-|x|}.$$

Wir notieren die folgenden Eigenschaften:

(5.3) $$0 < \Lambda'(x) < 2,\ 0 < \Lambda''(x) < 1.$$

Die Ausdehnung auf den Mehrperiodenfall erfolgt mit Induktion nach T.

Wir setzen $Q_T := P'$ und werden einen Plan ξ und W–Maße Q_t konstruieren mit

(5.4) $$dQ_t = c'_t \cdot \mathbf{\Pi}_{m=t+1}^{T} \Lambda'(\xi_{m-1}^{\top} \cdot \Delta X_m)\, dP' = q_t\, dP \ \text{ mit}$$
$$q_t := c_t \cdot \mathbf{\Pi}_{m=t+1}^{T} \Lambda'(\xi_{m-1}^{\top} \cdot \Delta X_m) \cdot \exp\{-\sum_{m=1}^{T} \|\Delta X_m\|^2\}$$
$$E_t[...] := \int ... dQ_t \qquad [\text{für gewisse Konstanten } c_t, c'_t].$$

Offenbar sind die P–Dichten q_t positiv und beschränkt.
Die Maße sollen die folgende Induktionsvoraussetzung erfüllen:

(5.5) $\quad E_t[\Delta X_{m+1}^k \,|\, \mathfrak{F}_m] = 0 \quad$ f.s. $t \le m < T$, $1 \le k \le d$.

Das W–Maß Q_0 wird dann das gesuchte Martingalmaß sein.
Es sei an die Bayesformel erinnert:

(5.6) $\quad E_{t+1}[\,Y \,|\, \mathfrak{F}_t] = E[\,Y \cdot q_{t+1} \,|\, \mathfrak{F}_t] / E[\,q_{t+1} \,|\, \mathfrak{F}_t]$, also
$Q_{t+1}[\,A \,|\, \mathfrak{F}_t] = E[\mathbf{1}_A \cdot q_{t+1} \,|\, \mathfrak{F}_t] / E[\,q_{t+1} \,|\, \mathfrak{F}_t]$, $A \in \mathfrak{F}_T$.

Als $\mathfrak{F}_t$–mb Funktionen hängen $E_{t+1}[\,\cdot \,|\, \mathfrak{F}_t]$ und $Q_{t+1}[\,\cdot \,|\, \mathfrak{F}_t]$ von ω nur über $\omega_t \in E^t$ ab.
Die Induktionsvoraussetzung ist erfüllt für t=T. Dabei ist (5.5) eine leere Bedingung.
Sei also nun $Q_{t+1},\ldots,Q_T$ für $0 \le t < T$ konstruiert.
Um die Beweisidee zu erklären, soll hier zunächst der folgende Fall betrachtet werden:

Der Fall T ≥ 1, d = 1.

Sei $\Delta X := \Delta X_{t+1}$. Aus der Form der Dichte q_{t+1} (vgl. auch (5.21)) folgt die Endlichkeit aller Momente von ΔX unter Q_{t+1} und unter $Q_{t+1}[\,\cdot \,|\, \mathfrak{F}_t]$ sowie die Endlichkeit von

(5.7) $\quad \psi(\omega,a) := E_{t+1}[\Lambda(a \cdot \Delta X) \,|\, \mathfrak{F}_t](\omega)$.

5.8 Lemma. $\mathbb{R} \ni a \mapsto \psi(\omega,a) \in \mathbb{R}$ ist streng konvex $\forall\, \omega$ mit $Q_{t+1}[\Delta X \neq 0 \,|\, \mathfrak{F}_t](\omega) > 0$.

Beweis. Sei ω fest, $\psi(\omega,a) =: \psi(a)$.
Wegen der Integrierbarkeitseigenschaften und wegen (5.2b) und (5.3) haben wir
$\psi'(a) = E_{t+1}[\Delta X \cdot \Lambda'(a \cdot \Delta X) \,|\, \mathfrak{F}_t]$,
$\psi''(a) = E_{t+1}[(\Delta X)^2 \Lambda''(a \cdot \Delta X) \,|\, \mathfrak{F}_t] > 0$ für $Q_{t+1}[\Delta X \neq 0 \,|\, \mathfrak{F}_t] > 0$. []

Ist $\psi(\omega,\cdot)$ nun streng konvex, so sind äquivalent:

(5.9a) $\quad \psi(\omega,\cdot)$ nimmt das Minimum an;

(5.9b) $\quad \lim_{|s| \to \infty} \psi(\omega;s) = \infty$.

Wir setzen nun

$A_\pm := \{\, \omega \,;\, \lim_{s \to \pm\infty} \psi(\omega;s) = \infty \,\}$;

$A'_\pm := \{\omega \,; Q_{t+1}[\pm\Delta X > 0 \,|\, \mathfrak{F}_t](\omega) > 0\}$.

Dann gilt:

(5.10) $\quad A_\pm = A'_\pm \in \mathfrak{F}_t$;

denn Λ hat die Eigenschaften

$$\sup_{s\le 0} \Lambda(s) = \Lambda(0) < \infty \ , \qquad \inf_{s\ge x} \Lambda(s) = \Lambda(x) \to \infty \ \text{ für } x\to\infty.$$

Für $\omega \in A_+\cap A_-$ nimmt $\psi(\omega;\cdot)$ das Minimum an; sei $a^*(\omega)$ die (einzige) Minimumstelle . Dann gilt : $A_+\cap A_-\cap\{a^* \le x\} = A_+\cap A_-\cap\{\omega\,;\, \inf_{x'\le x, x'\in \mathbb{Q}} \psi(\omega;x') = \inf_{x'\in\mathbb{Q}} \psi(\omega;x')\ \}$,

also $\{\ a^* \le x\ \} \cap A_+\cap A_- \in \mathfrak{F}_t$. Somit ist a^* eine $A_+\cap A_-\cap\mathfrak{F}_t$–mb Funktion. Offenbar hat man

$$\Omega = A_+\cap A_- \cup A_+\Delta A_- \cup A_+^c\cap A_-^c \ .$$

Es soll nun gezeigt werden, daß aus (NA) folgt:

(5.11) $\qquad P[\ A_+\Delta A_-\ ] = 0 \ .$

Dazu setzen wir $\tilde{\xi}_t = 1_{A_+'\setminus A_-'} - 1_{A_-'\setminus A_+'}$ Dann folgt:

$$Q_{t+1}[\tilde{\xi}_t\cdot\Delta X>0] = Q_{t+1}[A_+'\setminus A_-'\cap\{\Delta X>0\} \cup A_-'\setminus A_+'\cap\{\Delta X<0\}\ ]$$
$$= E_{t+1}[\mathbf{1}_{A_+'\setminus A_-'}\cdot Q_{t+1}[\Delta X>0\,|\,\mathfrak{F}_t] \ + \ \mathbf{1}_{A_-'\setminus A_+'}\cdot Q_{t+1}[\Delta X<0\,|\,\mathfrak{F}_t]]\ ,$$

Wäre nun $P[\ A_+\Delta A_-\ ] > 0$ und damit $Q_{t+1}[\ A_+\Delta A_-\ ] > 0$, so ergäbe sich $Q_{t+1}[\tilde{\xi}_t\cdot\Delta X>0] > 0$ und damit $P[\tilde{\xi}_t\cdot\Delta X>0] > 0$. Man hat aber $P[\tilde{\xi}_t\cdot\Delta X<0] = 0$ wegen

$$Q_{t+1}[\tilde{\xi}_t\cdot\Delta X<0] = Q_{t+1}[A_+'\setminus A_-'\cap\{\Delta X<0\} \cup A_-'\setminus A_+'\cap\{\Delta X>0\}\ ]$$
$$= E_{t+1}[\mathbf{1}_{A_+'\setminus A_-'}\cdot Q_{t+1}[\Delta X<0\,|\,\mathfrak{F}_t] \ + \ \mathbf{1}_{A_-'\setminus A_+'}\cdot Q_{t+1}[\Delta X>0\,|\,\mathfrak{F}_t]] = 0.$$

Dies wiederspricht (NA)'aus (4.18). Wir setzen nun

$$\xi_t = \begin{cases} a^* & \text{auf } A_+\cap A_- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist ξ_t $\mathfrak{F}_t$–mb. Als Bedingung für das Vorliegen einer Minimumstelle erhalten wir das Verschwinden der Ableitung. Somit gilt auf $A_+\cap A_-$:

$$0 = E_{t+1}[\Lambda'(a^*\cdot\Delta X)\,\Delta X\,|\,\mathfrak{F}_t] = E_{t+1}[\Lambda'(\xi_t^{\top}\cdot\Delta X)\,\Delta X\,|\,\mathfrak{F}_t]\ .$$

Auf $A_+^c\cap A_-^c = A_+'^c\cap A_-'^c$ gilt $Q_{t+1}[\Delta X = 0\,|\,\mathfrak{F}_t] = 1$, somit auch

$0 = E_{t+1}[\Lambda'(\xi_t^{\top}\cdot\Delta X)\,\Delta X\,|\,\mathfrak{F}_t]$. Also hat man insgesamt mit (5.11)

(5.12) $\qquad 0 = E_{t+1}[\Lambda'(\xi_t\cdot\Delta X)\,\Delta X\,|\,\mathfrak{F}_t]$ f.s. .

Wir können also jetzt wie in (5.4) angekündigt Q_t definieren gemäß:

(5.13) $\qquad dQ_t = \tilde{c}_t\cdot\Lambda'(\xi_t\cdot\Delta X)\,dQ_{t+1} = c_t'\cdot\mathbf{\Pi}_{m=t+1}^{T}\Lambda'(\xi_{m-1}\cdot\Delta X_m)\,dP' = q_t\,dP$

[für gewisse Konstanten $\tilde{c}_t$, c_t'].

Dann gilt mit der Bayes–Formel und (5.11):

$$E_t[\Delta X\,|\,\mathfrak{F}_t] = E_{t+1}[\Lambda'(\xi_t\cdot\Delta X)\cdot\Delta X\,|\,\mathfrak{F}_t] \,/\, E_{t+1}[\Lambda'(\xi_t\cdot\Delta X)\,|\,\mathfrak{F}_t] = 0 \quad \text{f.s. .}$$

Ferner hat man auch: $\quad E_t[\Delta X_{m+1}\,|\,\mathfrak{F}_m] = E_{t+1}[\Delta X_{m+1}\,|\,\mathfrak{F}_m] = 0 \quad$ für $m > t$.

Dies folgt aus: $E_t[\Delta X_{m+1} \mid \mathfrak{F}_m] = E_{t+1}[\Lambda'(\xi_t \cdot \Delta X)\, \Delta X_{m+1} \mid \mathfrak{F}_m] \,/\, E_{t+1}[\Lambda'(\xi_t^\top \cdot \Delta X) \mid \mathfrak{F}_m]$
$= \Lambda'(\xi_t \cdot \Delta X)\, E_{t+1}[\Delta X_{m+1} \mid \mathfrak{F}_m] \,/\, \Lambda'(\xi_t \cdot \Delta X) = 0$
nach Induktionsvoraussetzung. Also ist die Induktionsbehauptung für t gezeigt.
Das gesucht Martingalmaß ist Q_0.

Der Fall T = 1, d ≥ 1.

Jetzt soll der am Anfang geführte Beweis wiederholt werden mit $\Lambda(x)$ anstelle von e^x; dabei soll auch zugelassen werden, daß die Verteilung von $\Delta X := \Delta X_1$ auf einen echten Teilraum von $\mathbb{R}^d$ konzentriert ist. Dabei müssen einige technische Schwierigkeiten behoben werden. Dazu dient das folgende Lemma.

5.14 Definition. Sei $\mathfrak{L}$ der kleinste lineare Teilraum in $\mathbb{R}^d$ mit $P[\,\Delta X \in \mathfrak{L}\,] = 1$ und Γ^* die Projektion auf $\mathfrak{L}^\perp$.

Sei nun

(5.15) $\varphi(a) := E'[\Lambda(a^\top \cdot \Delta X)] + \|\Gamma^* a\|^2$, $a \in \mathbb{R}^d$.

Wegen des Übergangs von P zu P' ist $E'[\Lambda(a^\top \cdot \Delta X)]$ endlich für $a \in \mathbb{R}^d$. Wir werden noch zeigen, daß φ streng konvex ist. Wir zeigen zunächst einige Eigenschaften über streng konvexe Funktionen. Sei wie üblich

$S^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d;\ \|x\| = 1\}$.

5.16 Lemma. Sei $\psi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ eine strikt konvexe Funktion. Dann gilt:

(a) Es sind äquivalent

i) das Minimum von ψ wird angenommen,

ii) $\lim_{s\to\infty} \psi(sa) = \infty \ \forall\, a \in S^{d-1}$,

iii) $\lim_{s\to\infty} \inf\{\psi(a), \|a\| \geq s\} = \infty$.

(b) Ist B eine offene Kugel in $\mathbb{R}^d$, $B' = \overline{B}^c$ das Innere von B^c, so sind äquivalent:

i) $\inf_{\mathbb{R}^d} \psi = \min_B \psi$;

ii) $\inf_B \psi < \inf_{B'} \psi$.

Beweis: a) "(i) ⇒ (ii)" Sei $\inf \psi = \psi(a^*)$ und $\underline{\lim}_{s\to\infty} \psi(sb) < \infty$ für ein $b \neq 0$.
Dann ex. $\{s_n\}$, $c < \infty$ mit $s_n \to \infty$ und $\psi(s_n b) \leq c$. Wähle nun $\lambda_n \in (0,1)$ mit
$1 = \|a_n - a^*\| := \|\lambda_n \cdot a^* + (1-\lambda_n) s_n \cdot b - a^*\|$.
Dies ist für alle genügend großen und somit o.E. für alle n möglich.

Dann folgt $\lambda_n \to 1$ wegen $\|s_n \cdot b\| \to \infty$ sowie
$\psi(a_n) \le \lambda_n \cdot \psi(a^*) + (1-\lambda_n) \cdot \psi(s_n \cdot b) \le \lambda_n \cdot \psi(a^*) + (1-\lambda_n) \cdot c.$

Nun existiert $(n') \subset \mathbb{N}$, a_∞ mit $a_{n'} \to a_\infty$ und $\|a_\infty - a^*\| = 1$.
Aus der Stetigkeit von ψ ergibt sich nun: $\psi(a_\infty) \le \psi(a^*)$. Weil die Minimumstelle eindeutig bestimmt ist , folgt also $a_\infty = a^*$. Dies ist ein Widerspruch zu $\|a_\infty - a^*\| = 1$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei $0 < \nu, M < \infty$; dann gilt:

(5.17) $\quad F_{\nu,M} \subset F_{\lambda,M}$ für $\nu > \lambda$ mit $F_{\nu,M} := \{x \in S^{d-1};\ \psi(\nu x) \le \psi(0) + M\}$.

Dann wegen $\lambda x = \alpha \cdot \nu x + (1-\alpha) \cdot 0$ mit $\alpha := \lambda/\nu$ hat man für $x \in F_{\nu,M}$:

$$\psi(\lambda x) - \psi(0) \le \alpha \cdot \psi(\nu x) + (1-\alpha) \cdot \psi(0) - \psi(0) = \alpha\,[\psi(\nu x) - \psi(0)] \le \alpha \cdot M \le M.$$

Nach Voraussetzung gilt nun $\cap_{n \in \mathbb{N}} F_{n,M} = \emptyset$. Wegen der Kompaktheit von $F_{\nu,M}$ existiert nun zu $M > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $F_{N,M} = \emptyset$ und damit $F_{\lambda,M} = \emptyset \ \forall\ \lambda \ge N$, d.h.

$$\psi(x) > \psi(0) + M \quad \text{für } \|x\| \ge N.$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) ist offensichtlich.
b) "(ii) $\Rightarrow$ (i)" Es muß $\inf_{\mathbb{R}^d} \psi = \inf_B \psi < \inf_{\partial B} \psi$ gelten.
"(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei $\psi(a^*) = \inf \psi$ mit $a^* \in B$. Wegen der strengen Konvexität hat man aber:
$\psi(a^*) < \inf_B c\ \psi = \inf_{B'} \psi$. $[\,]$

5.18 Lemma. $\varphi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ ist streng konvex.

Beweis. Sei $\psi(a) := E'[\Lambda(a^\top \cdot \Delta X)]$ und somit:

$\mathbb{R} \ni \varphi(a) = \psi(a) + a^\top \Gamma^{*\top} \Gamma^*(\omega_t) a$

$= \psi(a) + a_o^\top \Gamma^{*\top} \Gamma^* a_o + 2 a_o^\top \Gamma^{*\top} \Gamma^*(a - a_o) + (a-a_o)^\top \Gamma^{*\top} \Gamma^*(a-a_o)$.

Es genügt jetzt zu zeigen, daß φ in allen $a_o \in \mathbb{R}^d$ eine positiv definite zweite Ableitung hat [vgl. Barner & Flohr (1983) II, S. 140]. Wir haben

$$\Lambda(x) = \Lambda(x_o) + (x-x_o) \cdot \Lambda'(x_o) + \tfrac{1}{2}\,(x-x_o)^2 \cdot \Lambda''(x_o) + r(x,x_o)$$

mit $|r(x,x_o)| \le \tfrac{1}{2}\,|x-x_o|^3$, denn Λ'' ist Lipschitz–stetig mit Lipschitz–Konstante 1. Es folgt:

$\Lambda(a^\top \Delta X) = \Lambda(a_o^\top \Delta X) + (a-a_o)^\top \Delta X \cdot \Lambda'(a_o^\top \Delta X)$

$\quad + \tfrac{1}{2}\,(a-a_o)^\top \Delta X \cdot \Delta X^\top (a-a_o) \cdot \Lambda''(a_o^\top \Delta X) + r(a_o^\top \Delta X, a^\top \Delta X)$

mit $|r(a_o^\top \Delta X, a^\top \Delta X)| \le \tfrac{1}{2}\,(a-a_o)^\top \Delta X\ \Delta X^\top (a-a_o) \cdot |(a-a_o)^\top \Delta X|$

$\le \tfrac{1}{2}\,(a-a_o)^\top \Delta X\ \Delta X^\top (a-a_o) \cdot \|\Delta X\| \cdot \|(a-a_o)\|$. Somit ergibt sich

$\psi(a) = E'[\Lambda(a_o^\top \Delta X)] + (a-a_o)^\top \cdot E'[\Delta X \cdot \Lambda'(a_o^\top \Delta X)]$

$\quad + \tfrac{1}{2}\,(a-a_o)^\top E'[\Lambda''(a_o^\top \Delta X) \cdot \Delta X \cdot \Delta X^\top](a-a_o) + E'[r(a_o^\top \Delta X, a^\top \Delta X)]$

mit $E'\left[r(a_o^\top \Delta X, a^\top \Delta X)\right] \le \frac{1}{2}\|(a-a_o)\|\,(a-a_o)^\top E'\left[\Delta X\,\Delta X^\top \cdot \|\Delta X\|\right]\cdot(a-a_o)$.

Wegen der Wahl von P' sind alle auftretenden Erwartungswerte endlich.

Folglich ist $E'\left[\Lambda''(a_o^\top \Delta X)\cdot \Delta X\cdot \Delta X^\top\right]$ die zweite Ableitung von ψ in a_o und

$$\Phi := E'\left[\Lambda''(a_o^\top \Delta X)\cdot \Delta X\cdot \Delta X^\top\right] + \Gamma^{*\top}\Gamma^*$$

die zweite Ableitung von φ in a_o. Es ist nun Φ positiv definit; denn es gilt

$$a^\top \Phi a = E'\left[\Lambda''(a_o^\top \Delta X)\cdot a^\top \Delta X\cdot \Delta X^\top a\right] + a^\top \Gamma^{*\top}\Gamma^* a = E'\left[\Lambda''(a_o^\top \Delta X)\cdot \left|a^\top \Delta X\right|^2\right] + \|\Gamma^* a\|^2 \ge 0$$

sowie $a^\top \Phi a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ wegen

(5.19) $\quad P'\left[a^\top \Delta X = 0\right] = 1$ und $\Gamma^* a = 0 \Leftrightarrow a \perp \mathfrak{L}$, $a \in \mathfrak{L} \Leftrightarrow a = 0$. $\quad[]$

Mit 5.16 haben wir nun:

(5.20) $\quad \inf \varphi$ wird angenommen $\Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \varphi(ta) = \infty \;\; \forall\, a \in S^{d-1}$.

$\Leftrightarrow \Gamma^*(\cdot)a \ne 0$ oder $\lim_{t\to\infty} E'\left[\Lambda(t\, a^\top \cdot \Delta X)\right] = \infty \;\forall\, a \in S^{d-1}$;

$\Leftrightarrow \Gamma^*(\cdot)a \ne 0$ oder $P'\left[a^\top \cdot \Delta X > 0\right] > 0 \;\; \forall\, a \in S^{d-1}$.

Es kann nun gezeigt werden, daß sich eine Arbitragemöglichkeit bietet, wenn $\inf \varphi$ nicht angenommen wird. Dann existiert nämlich nach (5.20) ein $a \in S^{d-1}$ mit

$$\Gamma^* a = 0 \;\text{ und }\; P'\left[a^\top \cdot \Delta X > 0\right] = 0 \text{, d.h.}$$

$$\Gamma^* a = 0 \;\text{ und }\; a^\top \cdot \Delta X \le 0 \;\text{ f.s. .}$$

Wäre $a^\top \cdot \Delta X = 0$ f.s., so würde aus (5.19) $a = 0$ folgen im Gegensatz zu $a \in S^{d-1}$. Damit bietet $\xi_1 \equiv -a$ wirklich eine Arbitragemöglichkeit. Wir wissen also unter der Voraussetzung der Arbitragefreiheit, daß $\inf \varphi$ angenommen wird.

Als Bedingung für das Vorliegen einer Minimumstelle erhalten wir das Verschwinden der Richtungsableitungen. Für $h>0$, $v \in \mathfrak{L}$, a^* Minimumstelle von φ gilt :

$$0 \le \frac{1}{h}\left[\varphi(a^* + hv) - \varphi(a^*)\right]$$

$$= \frac{1}{h} E'\left[\Lambda((a^* + hv)^\top \cdot \Delta X) - \Lambda(a^{*\top} \cdot \Delta X)\right]$$

$$= E'\left[\frac{\Lambda((a^* + hv)^\top \cdot \Delta X) - \Lambda(a^{*\top} \cdot \Delta X)}{h}\right] .$$

Wegen $|\Lambda'| \le 2$ erhalten wir wie im Beweis von 5.8:

$$\Lambda((a^* + hv)^\top \cdot \Delta X) - \Lambda(a^{*\top} \cdot \Delta X) = h\, v^\top \cdot \Delta X\, \Lambda'(a^{*\top} \cdot \Delta X) + r(hv, \Delta X)$$

mit $|r(hv,\Delta X)| \le 2\cdot(h\, v^\top \Delta X)^2$.

Mit majorisierte Konvergenz ergibt sich nun für $h \downarrow 0$:

$$0 \le E'\left[\Lambda'(a^{*\top} \cdot \Delta X)\, v^\top \cdot \Delta X\right] = v^\top \cdot E'\left[\Lambda'(a^{*\top} \cdot \Delta X)\, \Delta X\right].$$

Ist $w \in \mathfrak{L}^{\perp}$, so hat man $w^{\perp} \cdot \Delta X = 0$ f.s. und somit $0 \le (v+w)^{\top} \cdot E'[\Lambda'(a^{*\top} \cdot \Delta X)\, \Delta X] \quad \forall\, v \in \mathfrak{L}$, $w \in \mathfrak{L}^{\perp}$, d.h. $0 \le x^{\top} \cdot E'[\Lambda'(a^{*\top} \cdot \Delta X)\, \Delta X] \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d$. Es folgt schließlich:

$$0 = E'[\Lambda'(a^{*\top} \cdot \Delta X)\, \Delta X] \text{ , d.h. } 0 = E'[\Lambda'(a^{*\top} \cdot \Delta X)\, \Delta X^k] \quad \forall\, 1 \le k \le d.$$

Wir können also jetzt P* definieren gemäß:

$$dP^* = \tilde{c} \cdot \Lambda'(a^{*\top} \cdot \Delta X)\, dP' = c \cdot \Lambda'(a^{*\top} \cdot \Delta X) \cdot \exp\{-\|\Delta X\|^2\}\ dP$$

[für gewisse Konstanten $\tilde{c}$, c].

Der Fall T ≥ 1, d ≥ 1.

Sei also wieder $Q_{t+1},\ldots,Q_T$ für $0 \le t < T$ konstruiert, $\Delta X := \Delta X_{t+1}$.
Mit (5.6) hat man für $A \in \mathfrak{F}_{t+1}$:

$$\begin{aligned} &Q_{t+1}[A \mid \mathfrak{F}_t] \\ &= E[\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{\Pi}_{m=t+2}^{T} \Lambda'(\xi_{m-1}^{\top} \cdot \Delta X_m) \cdot \exp\{-\textstyle\sum_{m=1}^{T} \|\Delta X_m\|^2\} \mid \mathfrak{F}_t] \,/\, E[\ldots \mid \mathfrak{F}_t] \\ &= E[\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{\Pi}_{m=t+2}^{T} \Lambda'(\xi_{m-1}^{\top} \cdot \Delta X_m) \cdot \exp\{-\textstyle\sum_{m=t+11}^{T} \|\Delta X_m\|^2\} \mid \mathfrak{F}_t] \,/\, E[\ldots \mid \mathfrak{F}_t] \\ &= E[\mathbf{1}_A \cdot \exp\{-\|\Delta X_{t+1}\|^2\} \cdot f_{t+1} \mid \mathfrak{F}_t] \,/\, E[\exp\{-\|\Delta X_{t+1}\|^2\} \cdot f_{t+1} \mid \mathfrak{F}_t] \end{aligned}$$

mit $f_{t+1} := E[\mathbf{\Pi}_{m=t+2}^{T} \Lambda'(\xi_{m-1}^{\top} \cdot \Delta X_m) \cdot \exp\{-\textstyle\sum_{m=t+2}^{T} \|\Delta X_m\|^2\} \mid \mathfrak{F}_{t+1}]$.

Also ergibt sich

(5.21) $$Q_{t+1}[A \mid \mathfrak{F}_t](\omega) = \int_A \exp\{-\|\Delta X_{t+1}\|^2\}\, dP_{t+1}(\cdot \mid \omega_t) \text{ , } A \in \mathfrak{F}_{t+1},$$

wobei $P_{t+1}(\cdot \mid \omega_t)$ bei festem ω_t als W–Maß auf $\mathfrak{F}_{t+1}$ definiert ist durch

$$P_{t+1}(A \mid \omega_t) := E[\mathbf{1}_A \cdot \exp\{-\|\Delta X_{t+1}\|^2\} \cdot f_{t+1} \mid \mathfrak{F}_t](\omega) / E[\exp\{-\|\Delta X_{t+1}\|^2\} \cdot f_{t+1} \mid \mathfrak{F}_t](\omega)$$

Somit hat man für festes ω_t die gleiche Situation wir im Fall T=1, jetzt mit $Q_{t+1}[\cdot \mid \mathfrak{F}_t](\omega)$ anstelle von P' und $P_{t+1}[\cdot \mid \mathfrak{F}_t](\omega_t)$ anstelle von P und wir können bei festem ω_t einige Ergebnisse für den Fall T=1 anwenden.

5.22 Definition. Sei $\mathfrak{L}_t = \mathfrak{L}_t(\omega)$ der kleinste lineare Teilraum in $\mathbb{R}^d$ mit $Q_{t+1}[\Delta X \in \mathfrak{L}_t \mid \mathfrak{F}_t](\omega) = 1$, Π_r die Menge aller Matrizen $\Gamma \in \mathbb{R}^{d \times d}$, die die Projektion auf einen r–dim. Teilraum von $\mathbb{R}^d$ beschreiben.

Ein linearer Teilraum $\mathfrak{L}$ soll durch die Matrix beschrieben werden, die die Projektion auf $\mathfrak{L}^{\perp}$ beschreibt.
Es gilt mit $\Pi_r \ni E_r := (e_{rij})$, $e_{rij} := 1$ für $i=j \le r$ und $= 0$ sonst:

$$\Pi_r = \{\, UE_rU^{\top};\ U \text{ ist orthogonale Matrix } \}.$$

Denn jeder r–dim. lin. Teilraum kann durch eine Koordinatentransformation, die durch eine orthogonale Matrix U beschrieben wird, mit $\mathbb{R}^r$ identifiziert werden.

5.23 Lemma. Π_r ist kompakt (in $\mathbb{R}^{d\times d}$).

Beweis: Da die Zeilenelemente von jedem U Einheitsvektoren sind, ist Π_r eine beschränkte Menge in $\mathbb{R}^{d\times d}$. Durch die Forderung, daß die Zeilenvektoren senkrecht aufeinander stehen, wird eine abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^{d\times d}$ ausgezeichnet.
Damit ist Π_r kompakt.

5.24 Lemma. Es existiert eine $\mathfrak{F}_t$–mb Abb. $\Gamma^* : \Omega \mapsto \cup_{r=0}^{d} \Pi_r$,

sodaß $\Gamma^*(\omega)$ die Projektion auf $\mathfrak{L}_t(\omega)^{\perp}$ ist.

Die Situation ist einfach, wenn $\mathfrak{L}_t(\omega) = \mathbb{R}^d$ und damit $\Gamma^* \equiv 0$ gilt. Der Beweis von 5.24 wird im Anhang von §5 gebracht. Sei nun

(5.25) $$\varphi(\omega,a) := E_{t+1}\left[\Lambda(a^{\top}\cdot\Delta X)\,|\,\mathfrak{F}_t\right](\omega) + \|\Gamma^*(\omega)a\|^2.$$

Dann folgt aus 5.18, daß $\varphi(\omega,\cdot)$ streng konvex ist. Wir haben nun

(5.26) $$A := \{\ \omega\ ;\ \lim_{t\to\infty} \inf\{\varphi(\omega;a);\ \|a\|\geq t\ ,(a\in\mathbb{Q}^d)\} = \infty\ \} \in \mathfrak{F}_t\ .$$

Mit 5.16 erhalten wir:

(5.27) $$A = \{\ \omega\ ;\ \inf \varphi(\omega;\cdot)\ \text{ wird angenommen}\}$$
$$= \{\ \omega\ ;\ \lim_{s\to\infty} \varphi(\omega;sa) = \infty\ \ \forall\ a\in S^{d-1}\} \in \mathfrak{F}_t.$$

Sei $a^*(\omega)$, $\omega\in A$, die (einzige) Minimumstelle von $\varphi(\omega;\cdot)$. Dann gilt gemäß 5.16 b für jede offene Kugel B in $\mathbb{R}^d$:

$\{\ a^*\in B\ \}\cap A = \{\omega\ ;\ \inf\{\ \varphi(\omega;a),\ a\in B,\ a\in\mathbb{Q}^d\} < \inf\{\ \varphi(\omega;a),\ a\notin \overline{B},\ a\in\mathbb{Q}^d\}\ \}$;

also ist $\{\ a^*\in B\ \}\cap A \in \mathfrak{F}_t$ und somit a^* eine $A\cap\mathfrak{F}_t$–mb Funktion.

Für $a\in S^{d-1}$ haben wir:

$\lim_{s\to\infty} \varphi(\cdot\,;sa) = \infty$

$\Leftrightarrow \Gamma^*(\cdot)a \neq 0$ oder $\lim_{s\to\infty} E_{t+1}\left[\Lambda(s\,a^{\top}\cdot\Delta X)\,|\,\mathfrak{F}_t\right] = \infty$

$\Leftrightarrow \Gamma^*(\cdot)a \neq 0$ oder $Q_{t+1}\left[\ a^{\top}\cdot\Delta X > 0\ \mid\ \mathfrak{F}_t\right] > 0$

Sei

(5.28) $$F(\omega) := \{\ a\in S^{d-1};\ \underline{\lim}_{s\to\infty}\ \varphi(\omega;sa) < \infty\ \}\ ;$$

dann haben wir also nach obiger Überlegung

(5.29) $A = \{ F = \emptyset \}$,

$F(\omega) = \{ a \in S^{d-1}; \|\Gamma^*(\omega)a\| = 0 , Q_{t+1}[a^\top \cdot \Delta X \le 0 \,|\, \mathfrak{F}_t](\omega) = 1 \}.$

Es soll nun gezeigt werden, daß $a \in F(\omega)$ eine Arbitragmöglichkeit bietet. Aus (NA) wird dann $F = \emptyset$ (f.s.) folgen, und man hat (f.s.) Minimustellen von $(\omega_t, \cdot)$. Der erste Schritt ist:

(5.30) Es existiert ein $\mathfrak{F}_t$–mb Abb. $\alpha_t : \Omega \mapsto S^{d-1}$ mit $\alpha_t(\omega) \in F(\omega)$ für $\omega \in A$.

Nun haben wir für $\omega \notin A$ gemäß (5.29): $Q_{t+1}[\alpha_t^\top \cdot \Delta X \le 0 \,|\, \mathfrak{F}_t](\omega) = 1$, $\Gamma^*(\omega\alpha_t(\omega) = 0$.
Aus (5.19) können wir schließen:

(5.31) $Q_{t+1}[a^\top \Delta X = 0 \,|\, \mathfrak{F}_t] = 1$ und $\Gamma^* a = 0 \Leftrightarrow a \perp \mathfrak{L}_t$, $a \in \mathfrak{L}_t \Leftrightarrow a = 0$.

Wäre also $Q_{t+1}[\alpha_t^\top \cdot \Delta X = 0 \,|\, \mathfrak{F}_t](\omega) = 1$, so folgte: $\xi_t(\omega) = 0$. [Wir können die $\mathfrak{F}_t$–mb Funktion α_t bei der Bildung von $Q_{t+1}[\alpha_t^\top \cdot \Delta X = 0 \,|\, \mathfrak{F}_t]$ als Konstante auffassen.]
Damit haben wir

$Q_{t+1}[\alpha_t^\top \cdot \Delta X < 0 \,|\, \mathfrak{F}_t](\omega) > 0$ bei $Q_{t+1}[\alpha_t^\top \cdot \Delta X \le 0 \,|\, \mathfrak{F}_t](\omega) = 1$ falls $\omega \notin A$.

Bei $Q_{t+1}[A^c] > 0$ $(\Leftrightarrow P[A^c] > 0)$ hätten wir also mit $\tilde{\xi}_t := -\mathbf{1}_{A^c} \cdot \alpha_t$:

$Q_{t+1}[\tilde{\xi}_t^\top \cdot \Delta X > 0] > 0$ bei $Q_{t+1}[\tilde{\xi}_t^\top \cdot \Delta X \ge 0] = 1$ und somit auch

$P[\tilde{\xi}_t^\top \cdot \Delta X > 0] > 0$ bei $P[\tilde{\xi}_t^\top \cdot \Delta X \ge 0] = 1$.

Dies aber eine Widerspruch zu (NA) gemäß 4.18. Somit können wir schließen: $Q_{t+1}[A] = 1$.

Wir setze nun $\xi_t = \begin{cases} a^* & \text{auf } A \\ 0 & \text{auf } A^c \end{cases}$.

Offenbar gilt $a^* \in \mathfrak{L}_t$ $(\Leftrightarrow \Gamma^* a^* = 0)$, sonst könnte man a^* durch $a^* - \Gamma^* a^*$ ersetzen .

Als Bedingung für das Vorliegen einer Minimumstelle erhalten wir wieder wie im Fall T=1 das Verschwinden der Richtungsableitungen:

(5.32) $0 = E_{t+1}[\Lambda'(a^{*\top} \cdot \Delta X)\, \Delta X \,|\, \mathfrak{F}_t] = E_{t+1}[\Lambda'(\xi_t^\top \cdot \Delta X)\, \Delta X \,|\, \mathfrak{F}_t]$.

Wir können also jetzt wie in (5.4) angekündigt Q_t definieren gemäß:

(5.33) $dQ_t = \tilde{c}_t \cdot \Lambda'(\xi_t^\top \cdot \Delta X)\, dQ_{t+1} = c_t' \cdot \prod_{m=t+1}^{T} \Lambda'(\xi_{m-1}^\top \cdot \Delta X_m)\, dP' = q_t\, dP$

[für gewisse Konstanten $\tilde{c}_t$, c_t'].

Dann gilt mit der Bayes–Formel:

$E_t[\Delta X \,|\, \mathfrak{F}_t] = (1/E_{t+1}[\Lambda'(\xi_t^\top \cdot \Delta X) \,|\, \mathfrak{F}_t]) \cdot E_{t+1}[\Lambda'(\xi_t^\top \cdot \Delta X)\, \Delta X \,|\, \mathfrak{F}_t] = 0.$

Ferner hat man für $m > t+1$ auch:

$E_t[\Delta X_{m+1} \,|\, \mathfrak{F}_m] = (1/E_{t+1}[\Lambda'(\xi_t^\top \cdot \Delta X) \,|\, \mathfrak{F}_m]) \cdot E_{t+1}[\Lambda'(\xi_t^\top \cdot \Delta X)\, \Delta X_{m+1} \,|\, \mathfrak{F}_m]$
$= (1/\Lambda'(\xi_t^\top \cdot \Delta X)) \cdot \Lambda'(\xi_t^\top \cdot \Delta X)\, E_{t+1}[\Delta X_{m+1} \,|\, \mathfrak{F}_m] = E_{t+1}[\Delta X_{m+1} \,|\, \mathfrak{F}_m] = 0$

nach Induktionsvoraussetzung. Also ist die Induktionsbehauptung für t gezeigt.
Das gesucht Martingalmaß ist Q_0 mit:

(5.34) $$dQ_0 = c_0 \cdot \prod_{t=1}^{T} \left[\Lambda'(\xi_{t-1}^{\top} \cdot \Delta X_t) \cdot \exp\{ - \|\Delta X_t\|^2 \} \right] dP .$$

Anhang:

Für $A \subset \mathbb{R}^d$ sei

(5.35) $$\mathfrak{U}_t(A) := \{ u : \Omega \times A \mapsto \mathbb{R} ; u(\omega, \cdot) \text{ ist stetig } \forall\, \omega,\ u(\cdot, a) \text{ ist } \mathfrak{F}_t\text{–mb } \forall\, a \in A \},$$
$$\hat{\mathfrak{U}}_t(A) := \{ u : \Omega \times A \mapsto \mathbb{R} ; \exists\, u_n \in \mathfrak{U}_t(A) \text{ mit } u_n \downarrow u \} \supset \mathfrak{U}_t(A).$$

5.36 Selektionssatz. Ist $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt, so existiert zu $u \in \hat{\mathfrak{U}}_t(A)$ eine $\mathfrak{F}_t$–mb Abb. $a^* : \Omega \mapsto A$ mit: $u(\omega, a^*(\omega)) = \max_{a \in A} u(\omega, a) =: u^*(\omega)$, und u^* ist mb.

Für den Beweis verwenden wir:

5.37 Lemma. Sei $(\Omega, \mathfrak{F})$ ein Meßraum, $\{f_n\}$ eine Folge von mb Abbildungen $f_n : \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$,

sodaß $\{f_n(\omega)\}$ beschränkt ist $\forall\ \omega \in \Omega$. Dann existiert ein mb Abb. $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$, sodaß $f(\omega)$ ein Häufungspunkt von $\{f_n(\omega)\}$ ist $\forall\ \omega \in \Omega$.

Beweis. Im Fall d=1 kann man $f = \overline{\lim}\, f_n$ setzen. Für d>1 schreiben wir $f_n = (f_n^1, \ldots, f_n^d)$ und definieren f^k induktiv. Sei $f^1 := \overline{\lim}\, f_n^1$. Sei nun f^i definiert für $1 \le i < k$. Dann setzen wir

$$\Delta_{km}(\omega) := \{ n \ge m;\ f_n^i(\omega) > f^i(\omega) - \frac{1}{m} ,\ 1 \le i < k \} ,$$
$$g_m^k(\omega) = \sup_{n \in \Delta_{km}(\omega)} f_m^k(\omega) ,\ m \in \mathbb{N},\ \omega \in \Omega.$$

Dann hat man $\Delta_{km} \supset \Delta_{k,m+1}$ und somit $g_m^k \ge g_{m+1}^k$. Dann leistet $f^k := \lim g_m^k$ das Verlangte. □

Beweis von 5.36. Sei $A \subset \mathbb{R}^d$, A' eine abzählbare separierende Menge von A, $u \in \mathfrak{U}_t(A)$. Dann ist $u^* := \sup_{a \in A} u(\cdot .a) = \sup_{a \in A'} u(\cdot, a)$ eine mb Funktion.
Wir konstruieren eine $\mathfrak{F}_t$–mb Abb $f_n : \Omega \mapsto A'$ mit

(5.38) $$u(\omega, f_n(\omega)) > u^*(\omega) - \frac{1}{n}.$$

Sei dazu $A' = \{a_1, a_2, \ldots\}$ und $N(\omega) := \inf \{ m \in \mathbb{N},\ u(\omega, a) > u^*(\omega) - \frac{1}{n} \}$.
Dann ist $N(\cdot) : \Omega \mapsto \mathbb{N}$ eine mb Abb. und wir können $f_n = a_N$ setzen.
Zu $\{f_n\}$ wählen wir nun f gemäß 5.37; dann folgt aus (5.38) unmittelbar:

$$u(\omega, f(\omega)) \ge u^*(\omega).$$

Sei nun $u \in \hat{\mathfrak{U}}_t(A)$ und $u_n \in \mathfrak{U}_t(A)$ mit $u_n \downarrow u$. Wie dann gerade gezeigt wurde, existieren mb Abb $f_n^* : \Omega \mapsto A$ mit $u_n(\omega, f_n^*(\omega)) = u_n^*(\omega)\ \forall\, n\ \forall\, \omega$. Zu $\{f_n^*\}$ wählen wir wieder f^* gemäß 5.37. Setze $u_\infty := \inf u_n^* = \lim u_n^*$. Dann gilt offenbar $u_\infty \geq u^*$ und ferner:

$$u_m(\omega, f_n^*(\omega)) \geq u_n(\omega, f_n^*(\omega)) = u_n^*(\omega) \geq u_\infty(\omega) \quad \forall\, m \leq n.$$
$$\Rightarrow u_m(\omega.f^*(\omega)) \geq u_\infty(\omega)$$
$$\Rightarrow u(\omega.f^*(\omega)) \geq u_\infty(\omega) \geq u^*(\omega).$$

Also ist $a^* = f^*$ die gesuchte mb Auswahlfunktion, und es ist $u^* = \lim u^*$ mb. $[\,]$

Beweis von 5.24. Es ist

$$g_r(\omega,\Gamma) := E_{t+1}\left[\, \|\Gamma\Delta X\|^2 \,|\, \mathfrak{F}_t\right](\omega)$$

wegen maj. Konvergenz stetig in $\Gamma \in \Pi_r$; sei

$$g_r^*(\omega) := \inf\{\, g(\omega,\Gamma)\,;\, \Gamma \in \Pi_r \,\}\,,.$$
$$\nu := \sup\{\, r\,;\, g_r = 0\,\}\,.$$

Dann existiert genau eine Minimumstelle $\Gamma^*(\omega)$, d.h. Nullstelle, von $g_{\nu(\omega)}(\omega,\cdot)$, weil $\mathfrak{L}_t$ wohldefiniert ist.

[Denn sind $\Gamma_i \in \Pi_\nu$ Projektionen auf L_i mit $g_\nu(\cdot,\Gamma_1) = g_\nu(\cdot,\Gamma_2) = 0$, d.h. $Q_{t+1}[\Gamma_i\Delta X = 0\,|\,\mathfrak{F}_t] = 1$, d.h. $Q_{t+1}[\Delta X \in L_i\,|\,\mathfrak{F}_t] = 1$, so folgt: $Q_{t+1}[\Delta X \in L_1 \cap L_2\,|\,\mathfrak{F}_t] = 1$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Def. von ν, wenn $L_1 \neq L_2$ gilt.]

Nach dem Selektionssatz 5.36 existieren mb Abbildungen $\Gamma_r^* : \Omega \mapsto \Pi_r$ mit $g_r^* = g(\cdot,\Gamma_r^*)$ und g_r^* ist mb. Damit sind auch ν mb und schließlich $\Gamma^* = \Gamma_\nu^*$ mb . $[\,]$

Beweis von (5.30). Wir setzen

$$u(\omega,a) := Q_{t+1}\left[\, a^\top \cdot \Delta X \leq 0 \,|\, \mathfrak{F}_t\right](\omega) - \|\Gamma^*(\omega)a\|$$

und wollen zeigen: $u \in \hat{\mathfrak{U}}_t(S^{d-1})$. Eine approximierende Folge (u_n) für u erhält man über stetige beschränkte Funktionen f_n mit $f_n \downarrow \mathbf{1}_{(-\infty,0]}$. Mit

$$u_n(\omega_t,a) := E_{t+1}\left[\, f_n(a^\top \cdot \Delta X) \,|\, \mathfrak{F}_t\right](\omega_t) - \|\Gamma^*(\omega_t)a\|$$

folgt: $u_n \geq u$, u_n ist $\mathfrak{F}_t$–mb in ω und stetig in a, also $u_n \in \mathfrak{U}_t(S^{d-1})$.

Nach dem Selektionssatz 5.36 existiert nun eine $\mathfrak{F}_t$–mb Abbildung $\alpha_t : \Omega \mapsto S^{d-1}$ mit

$$u(\omega,\alpha_t(\omega)) = \max_{a \in S^{d-1}} u(\omega,a) =: u^*(\omega).$$

Nun gilt nach (5.29): $u \leq 1$ und $u(\omega,a) = 1 \Leftrightarrow a \in F(\omega)$. Somit gilt (5.30). $[\,]$

§6 Risikominimierung bei unvollständigen Märkten.

In diesem §6 wird generell d=1, p=2 (p wie in 3.2) und o.E. r=0 vorausgesetzt.
Es soll zunächst etwas stochastische Analysis in vorliegenden zeitdiskreten Rahmen erläutert und die Girsanov– Transformation aus Beispiel 6.9 in einen allgemeinen Rahmen gestellt werden. Wir betrachten die **Semimartingalzerlegung von X_t**. Es gilt:

(6.1) $X_t = X_0 + M_t + A_t$ mit $M_t := \sum_{m=1}^{t} [\Delta X_m - \mu_{m-1}]$, $A_t := \sum_{m=0}^{t-1} \mu_m$,

dabei ist $\{M_t\}$ nach Konstruktion ein Martingal und A_t jeweils $\mathfrak{F}_{t-1}$–mb, d.h. $\{A_t\}$ ist ein **vorhersehbarer Prozeß**. Ferner heißt der vorhersehbare Prozeß

(6.2) $<M>_t := \sum_{m=0}^{t-1} \sigma_m^2$ der **Varianzenprozeß** zu $\{M_t\}$.

Man hat also unter der Voraussetzung:

(6.3) $\alpha_t := \mu_t/\sigma_t^2$ existiert als reeller Prozeß

die folgende Beziehung:

(6.4) $\Delta A_t = \alpha_{t-1} \Delta<M>_t$.

Diese Eigenschaft erlaubt es gerade, daß man den Anteil A_t durch einen Maßwechsel wegtransformieren kann. Wir definieren dazu nun den

(6.5) **Girsanov–Dichteprozeß** $Z_0 = 1$, $\Delta Z_t = -\alpha_{t-1} \cdot Z_{t-1} \cdot \Delta M_t$, d.h.

$Z_t := 1 - \sum_{m=1}^{t} \alpha_{m-1} \cdot Z_{m-1} \Delta M_m$.

Da ΔZ_t "proportional" zu Z_{t-1} ist, heißt $\{Z_t\}$ **exponentientelles Martingal** $\mathcal{E}(-\alpha.M)$ [**von Doléans–Dade**]. Allein aus der Darstellung (6.5) von $Z_t - 1$ als stochastisches Integral $-\alpha Z.M$ mit dem Martingal $\{M_t\}$ als Integrator und dem vorhersagbaren Prozeß $Y_t = -\alpha_{t-1} \cdot Z_{t-1}$ als Integrand, ergibt sich, daß Z_t unter geeigneten Integrierbarkeitsannahmen wieder ein Martingal ist (vgl. auch 4.6, (4.7c)).

6.6 Lemma. $Z_t = \prod_{m=1}^{t} L_m$, wobei $L_m := 1 - \alpha_{m-1} \cdot \Delta M_m$ wie in Beispiel 4.9 definiert ist.

Beweis. Es ist $\Delta Z_t = (L_t - 1) \cdot Z_{t-1} = -\alpha_{t-1} \cdot Z_{t-1} \cdot \Delta M_t$. [].

Der Maßwechsel von P zu dem Maß $\hat{P}$ mit $d\hat{P} = Z_T \, dP$ wird auch als **verallgemeinerte Girsanov–Transformation** bezeichnet, sofern gilt:

6.7 Voraussetzung. $L_t > 0$, $\sigma_{t-1}^2 > 0$ für t=1,...,T.

Ist X bereits ein P–Martingal, gilt also X = M , so ist auch $\hat{P} = P$.
Offenbar ist 6.7 gleichbedeutend mit

(6.7)* $\Delta X_t \cdot E[\Delta X_t \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}] < E[\{\Delta X_t\}^2 \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}]$.

Integriert man (6.7)* bzgl. $P[\,\cdot\,|\,\mathfrak{F}_{t-1}]$, so gilt die resultierende Ungleichung immer. In diesem

§6 sei ab jetzt 6.7 immer vorausgesetzt. In einem "Trinomialmodell" ist 6.7 stets erfüllt:

6.8 Lemma. Existieren $\mathfrak{F}_{t-1}$–mb Funktionen $0 < d_{t-1} < 1 < u_{t-1} < \infty$, mit
$q_{t-1} := P[X_t = d_{t-1} \cdot X_{t-1} \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}] > 0$, $p_{t-1} := P[X_t = u_{t-1} \cdot X_{t-1} \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}] > 0$,
$q_{t-1} + p_{t-1} + P[\Delta X_t = 0 \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}] = 1$, so ist (6.7) erfüllt.

Beweis. Wir setzen $D_t := (d_t - 1) \cdot X_t < 0 < (u_t - 1) \cdot X_t =: U_t$. (6.7)* folgt dann aus $E[\Delta X_t \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}]$ $= q_{t-1} D_{t-1} + p_{t-1} U_{t-1}$, $E[\{\Delta X_t\}^2 \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}] = q_{t-1} D_{t-1}^2 + p_{t-1} U_{t-1}^2$. []

Damit die Dichte Z_T eine L^2–Bedingung erfüllt machen wir eine weitere Voraussetzung:

6.9 Voraussetzung. μ_m^2/σ_m^2 ist beschränkt (durch $\|\mu_m^2/\sigma_m^2\|_\infty$) für m = 0,...,T–1.

Wir geben eine Bedingung für 6.9 an.

6.10 Lemma. Genügt $\{X_t\}$ der Differenzengleichung $\Delta X_t = D_{t-1} \cdot Y_t$, wobei D_{t-1} $\mathfrak{F}_{t-1}$–mb ist und $\|E[Y_t \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}]^2 / \operatorname{Var}[Y_t \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}]\|_\infty < \infty$ gilt, so gilt 6.9.

In vielen Modellen ist der Faktor Y_t unabhängig von $\mathfrak{F}_{t-1}$; dann ist
$E[Y_t \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}]^2 / \operatorname{Var}[Y_t \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}] = E[Y_t]^2 / \operatorname{Var}[Y_t]$ sogar deterministisch.

Beweis von 6.10**:** Es ist $\mu_{t-1} = E[\Delta X_t \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}] = D_{t-1} \cdot E[Y_t \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}]$,
$E[\Delta X_t^2 \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}] = D_{t-1}^2 \cdot E[Y_t^2 \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}]$ und $\sigma_{t-1}^2 = D_{t-1}^2 \cdot \operatorname{Var}[Y_t \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}]$. Wegen $\sigma_{t-1}^2 > 0$ gilt auch $D_{t-1}^2 > 0$. []

6.11 Lemma. (a) $\| E[L_t^2 \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}] \|_\infty < \infty \;\; \forall\, t$;

(b) $Z_T \in L^2$.

Beweis: a) Es ist $L_t - 1 = -(\mu_{t-1}/\sigma_{t-1}) \cdot \Delta W_t$ mit $\Delta W_t = (\Delta X_t - \mu_{t-1})/\sigma_{t-1}$.
Dann folgt $E[\{L_t - 1\}^2 \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}] \le \|\mu_{t-1}^2/\sigma_{t-1}^2\|_\infty$ wegen $E[\{\Delta W_t\}^2 \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}] = 1$.
b) Die Aussage folgt mit Induktion aus

$$E[Z_t^2] = E[E[Z_{t-1}^2 \cdot L_t^2 \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}]] = E[Z_{t-1}^2 \cdot E[L_t^2 \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}]] \le \|E[L_t^2 \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}]\|_\infty \cdot E[Z_{t-1}^2]. \; []$$

6.12 Bemerkung. Die beiden Voraussetzungen 6.7 und 6.9 sind (zusammen) eine Verschärfung von (NA), denn sie implizieren die Existenz des Martingalmaßes $\hat{P}$.

Nun soll für jede Zva H in L^2, die etwa eine Zahlungsforderung darstellt, eine Darstellung

H = Angangskapital + Gewinn unter einem Plan + Rest

gefunden werden, wobei der Rest bei der Absicherung ein Restrisiko beinhaltet.

Wir begi nen mit dem Fall T = 1. Wir lassen dabei die Zeitindizes weg; also sei etwas $\Delta M = \Delta X - \mu$. Dann gilt offenbar die folgende einfache Version der **Kunita–Watanabe Zerlegung**:

(6.13) $H =: E[H] + \hat{\xi}\cdot\Delta M + \Delta N$ mit $\hat{\xi} := Cov[H,\Delta X]/\sigma^2$;

dabei ist ΔN durch (6.13) definiert. Dann gilt:

(6.14) $E[\Delta M] = 0,\ E[\Delta N] = 0\ ,\ E[\Delta M\cdot\Delta N] = 0\ .$

So ist nämlich $E[\Delta M\cdot\Delta N] = E[\Delta M\cdot(H - E[H] - \hat{\xi}\cdot\Delta M)]$

$= E[\Delta M\cdot(H - E[H])] - \hat{\xi}\cdot E[\{\Delta M\}^2] = 0.$

Dies führt zu der Zerlegung

(6.15) $H = H_{-1} + \hat{\xi}\cdot\Delta X + \Delta N$ mit $H_{-1} := E[H] - \hat{\xi}\cdot\mu$;

dabei sind $H_{-1} + \hat{\xi}\cdot\Delta X$ und ΔN unkorreliert, sind also im L^2 orthogonal zueinander.

Jetzt liege wieder der allgemeine Fall $T \in \mathbb{N}$ vor. Wir werden nun das obige Verfahren sukzessiv anwenden. Dabei sei die bedingte Kovarianz folgendermaßen erklärt:

$Cov[Y,\Delta X_{t+1}\,|\,\mathfrak{F}_t] := E[Y\cdot(\Delta X_{t+1}-\mu_t)\,|\,\mathfrak{F}_t]\ .$

Wir definieren nun mit absteigender Induktion

(6.16) $H_T = H,\quad \hat{\xi}_t := Cov[H_{t+1},\Delta X_{t+1}\,|\,\mathfrak{F}_t]/\sigma_t^2\ ,$

$H_t := E[H_{t+1}\,|\,\mathfrak{F}_t] - \hat{\xi}_t\cdot\mu_t$ für $0 \le t < T.$

6.17 Lemma. Es gilt: $\hat{\xi}_t\cdot\Delta X_{t+1} \in L^2$, $\hat{\xi}_t\cdot\Delta M_{t+1} \in L^2\ \forall\, t$; also $\hat{\xi} := (\hat{\xi}_0,...,\hat{\xi}_{T-1}) \in \Xi^2$. **Beweis:** Es ist $E[\{\hat{\xi}_t\cdot\Delta X_{t+1}\}^2] = E[\hat{\xi}_t^{\,2}\cdot E[\{\Delta X_{t+1}\}^2\,|\,\mathfrak{F}_{t-1}]] = E[\hat{\xi}_t^{\,2}\cdot(\sigma_t^2+\mu_t^2)]$.

Wir zeigen nun mit absteigender Induktion :

(6.18) $H_t \in L^2,\ \hat{\xi}_t\cdot\sigma_t \in L^2,\ \hat{\xi}_t\cdot\mu_t \in L^2.$

Der Fall t = T ist klar. Für den Schluß "t+1 → t" notieren wir zunächst $E[H_{t+1}\,|\,\mathfrak{F}_t] \in L^2$ auf Grund der Schwarzschen Ungleichung; aus dieser folgt auch

$Cov[H_{t+1},\Delta X_{t+1}\,|\,\mathfrak{F}_t]^2 \le E[H_{t+1}^2\,|\,\mathfrak{F}_t]\cdot\sigma_t^2$ und somit $E[\hat{\xi}_t^{\,2}\cdot\sigma_t^2] \le E[H_{t+1}^2]$.

Ferner haben wir $E[\hat{\xi}_t^{\,2}\cdot\mu_t^2] \le \|\mu_t^2/\sigma_t^2\|_\infty\cdot E[\hat{\xi}_t^{\,2}\cdot\sigma_t^2]$; damit ist auch $H_t \in L^2$ klar. []

Nun definieren wir einen Prozeß $\{N_t\}$ durch

(6.19) $N_0 = 0,\ \Delta N_t = H_t - E[H_t\,|\,\mathfrak{F}_{t-1}] - \hat{\xi}_{t-1}\cdot\Delta M_t$ für $0 < t \le T.$

Dann zeigt man wie in (**6**.14):

(6.20) $\{N_t\}$ ein Martingal mit $N_t \in L^2$ und $E[\Delta M_{t+1}\cdot\Delta N_{t+1}\,|\,\mathfrak{F}_t] = 0 \quad 0 \le t < T.$

In der Situation (6.20) sagt man, die Martingale $\{M_t\}$ und $\{L_t\}$ sind **orthogonal**.
Aus (6.16) und (6.19) erhält man:

$\Delta H_t = H_t - E[H_t|\mathfrak{F}_{t-1}] + E[H_t|\mathfrak{F}_{t-1}] - H_{t-1} = \Delta L_t + \hat{\xi}_{t-1}\cdot\Delta M_t + \hat{\xi}_{t-1}\cdot\mu_{t-1}$, also:

(6.21) $\Delta H_t = \Delta N_t + \hat{\xi}_{t-1}\cdot\Delta X_t$.

Offenbar folgt aus (6.21) unmittelbar:

6.22 Föllmer–Schweizer–Zerlegung. $H = H_0 + G_T(\hat{\xi}) + N_T$.

Diese Zerlegung ist eindeutig im folgenden Sinne: Hat man $H = V_0 + G_T(\xi) + N$ für einen selbstfinanzierenden Plan (V_0,ξ) und ein $N' \in L^2$, sodaß die Martingale $\{M_t\}$ und $\{E[N'|\mathfrak{F}_t]\}$ orthogonal sind, dann gilt: $V_0 = H_0$, $N' = N_T$ f.s. und $\xi_t = \hat{\xi}_t$ f.s. $\forall$ t.

Beweis: Die Existenz ist klar. Zur Eindeutigkeit genügt es den Fall $H = 0$ und damit $M_t = N_t = 0$ $\forall$ t zu betrachten. Sei also $0 = V_0 + G_T(\xi) + N'$; dann folgt mit
$W_{T-1} := V_0 + G_{T-1}(\xi) + N_{T-1} + \xi_{T-1}\cdot\mu_{T-1}$: $0 = W_{T-1} + \xi_{T-1}\cdot\Delta M_T + \Delta N_T$.
Durch Bildung von $E[...|\mathfrak{F}_{T-1}]$ erhält man $W_{T-1} = 0$ und wir haben
$0 = [\xi_{T-1}\cdot\Delta M_T + \Delta N_T]\cdot\Delta M_T$. Bildet man wieder $E[...|\mathfrak{F}_{T-1}]$, so führt das zu $\xi_{T-1}\cdot\sigma^2_{T-1} = 0$; wegen $\sigma^2_{T-1} > 0$ hat man also $\xi_{T-1} = 0$ sowie $\Delta N_T = 0$ und
$0 = W_{T-1} = V_0 + G_{T-1}(\xi) + N_{T-1}$. Durch Induktion folgt jetzt die Behauptung. []

6.23 Korollar. Ist H erreichbar, gilt also $H = V_0 + G_T(\xi)$ für einen Plan (V_0,ξ), so folgt:

$V_0 = H_0$, $\xi_t = \hat{\xi}_t$ $\forall$ t.

Nun soll ein Zusammenhang zwischen der Girsanov–Transformation und der Föllmer–Schweizer–Zerlegung hergestellt werden. Dazu setzen wir wie oben:

(6.24) $\hat{P} \in \mathbb{P}^*(P)$ ist das Martingalmaß mit $d\hat{P} := Z_T\, dP$, $\hat{E}[...] := \int ...d\hat{P}$.

6.25 Proposition. Es gilt: $H_t = \hat{E}[H|\mathfrak{F}_t]$ $\forall$ t, insbesondere $H_0 = \hat{E}[H]$.

Die Zuordnung $H \mapsto H_0$ ist somit nach 4.5 ein konsistentes Preissystem.

Beweis von 6.25. Mit $H_T := H$ ist die Behauptung richtig für T. Man hat nun
$H_{t-1} = E[H_t\cdot L_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}]$, wie leicht nachzurechnen ist. Nach der Bayesformel gilt somit:

$H_{t-1} = \hat{E}[H_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}]$.

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt schließlich

$H_{t-1} = \hat{E}[\hat{E}[H|\mathfrak{F}_t] \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = \hat{E}[H \mid \mathfrak{F}_{t-1}]$. []

Es heißt der vorhersehbare Prozeß

(6.26) $\langle H,X\rangle_t := \sum_{m=0}^{t-1} \mathrm{Cov}\left[H_{m+1},X_{m+1} \mid \mathfrak{F}_m\right]$ der **Kovarianzenprozeß** zu den Prozessen $\{H_t\}$ und $\{X_t\}$.

Dann gilt offenbar $\langle X,X\rangle_t = \langle M,M\rangle_t = \langle M\rangle_t$ und man die Darstellung:

(6.27) $\hat{\xi}_t := \Delta\langle H,X\rangle_t / \Delta\langle X,X\rangle_t$ mit $H_t = \hat{E}\left[H \mid \mathfrak{F}_t\right] \ \forall\, t.$

Wir interessieren uns nun das H_0 aus der Föllmer–Schweizer–Zerlegung und wollen zeigen: H_0 ist das Startkapital, mit dem man H am besten approximieren kann.
Zunächst betrachten wir wieder den Fall T = 1 und lassen die Zeitindizes weg.
Das folgende Lemma ist einfach zu zeigen; darin finden wir eine optimale L^2–Approximation für H durch ein Anfangskapital plus Gewinn unter einem Plan.

6.28 Lemma. $\min_{a,b\in\mathbb{R}} E\left[\{H - b - a\cdot\Delta X\}^2\right] = E\left[\{H - H_{-1} - \hat{\xi}\cdot\Delta X\}^2\right] = E\left[\{\Delta N\}^2\right]$

mit $\hat{\xi}$, H_{-1} und ΔN wie in (6.13) und (6.15). Dabei ist die Minimumstelle eindeutig bestimmt im Falle $P\left[\Delta X \neq 0\right] > 0$, also insbesondere im Falle $\sigma^2 > 0$..

Wählt man das optimale $b = H_{-1}$ als Prämie für den Käufer und als Startkapital zur Absicherung durch den Verkäufer des Derivats, so ist H_{-1} also das Startkapital, mit dem H am besten duplizieren kann. Im Gegensatz zum Begriff der oberen Arbitragschranke, werden hier positive und negative Differenzbeträge $H - b - a\cdot\Delta X$ gleichbewertet, was man als Fairness gegenüber dem Käufer interpretieren kann.

Im allgemeinen Fall $T \in \mathbb{N}$ ist es zunächst nicht klar, wie die Situation in 6.28 zu verallgemeinern ist. Wir betrachten dazu beliebige, nicht notwendig selbstfinanzierende Portfoliopläne $\vartheta = \{(\xi_t,\eta_t),\ 0\le t<T,\ V_T\}$. Wegen $V_t = \eta_t + \xi_t\cdot X_t$ (wir betrachten ja den Fall $B_t = 1$, $S_t = X_t\ \forall\, t$), kann ein Plan auch durch $\{(V_t,\xi_t),\ 0\le t<T, V_T\}$ beschrieben werden, wobei V_t der Wertprozeß ist. Der Zahlungsanspruch H muß in T erfüllt werden; somit haben wir $V_T = H$.
Wir versetzen uns zunächst in die Situation t = T–1. Es ist nur noch eine Investition ξ_{T-1} vorzunehmen und das Sparkonto kann so aufgefüllt werden, daß unser Portfolios einen beliebigen Wert $V_{T-1} = \eta_{T-1} + \xi_{T-1}\cdot X_{T-1}$ hat. Damit ergibt sich als Konsum in T gerade

$$\Delta C_T(\vartheta) = \eta_{T-1} + \xi_{T-1}\cdot X_T - H = V_{T-1} + \xi_{T-1}\cdot\Delta X_T - H.$$

Ist $\Delta C_T < 0$, so stellt $|C_T|$ Kosten dar. Eine genaue Absicherung von H ist i.a. nicht möglich. Als eine möglichst gute Duplizierung kann nun die Wahl von V^*_{T-1}, ξ^*_{T-1} angesehen werden mit

(6.29) $E\left[\{V^*_{T-1} + \xi^*_{T-1}\cdot\Delta X_T - H\}^2 \mid \mathfrak{F}_{T-1}\right] = \min_{a,b\in\mathbb{R}} E\left[\{a + b\cdot\Delta X_T - H\}^2 \mid \mathfrak{F}_{T-1}\right].$

Indem man anstelle des Erwartungswerts den bedingten Erwartungswert nimmt, erhält man mit 6.25 und 6.28:

(6.29)* $V^*_{T-1} = \hat{V}_{T-1} = H_{T-1} = \hat{E}[H \mid \mathfrak{F}_{T-1}]$, $\xi^*_{T-1} = \hat{\xi}_{T-1}$ ist Lösung von 6.29;

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}} E[\{a + b\cdot\Delta X_T - H\}^2 \mid \mathfrak{F}_{T-1}] = E[\{\Delta N_T\}^2 \mid \mathfrak{F}_{T-1}].$$

Zur Zeit T–2 sind V_{T-2}, ξ_{T-2}, V_{T-1}, ξ_{T-1} zu wählen. Der Konsum in T ist wieder $\Delta C(\vartheta)_T := V_{T-1} + \xi_{T-1}\cdot\Delta X_T - H$, dazu kommt der Konsum in T–1:

$$\Delta C(\vartheta)_{T-1} := V_{T-2} + \xi_{T-2}\cdot\Delta X_{T-1} - V_{T-1}.$$

Als Optimierungsaufgabe bietet sich also zunächst die folgende an:

$$E[\{\Delta C(\vartheta)_{T-1} + \Delta C(\vartheta)_T\}^2 \mid \mathfrak{F}_{T-2}]$$
$$= E[\{V_{T-2} + \xi_{T-2}\cdot\Delta X_{T-1} + \xi_{T-1}\cdot\Delta X_T - H\}^2 \mid \mathfrak{F}_{T-2}] = \min !$$

Man kann aber davon ausgehen, daß man sich z.Zt. T–1 gemäß (6.29) entscheidet, denn dann braucht keine Rücksicht mehr auf die Approximation in t = T–2 genommen zu werden. Also sollte man die folgende Minimierungsaufgabe lösen für t = T–2:

(6.30) $$\min_{a,b\,\in\,\mathbb{R}} E[\{a + b\cdot\Delta X_{t+1} + \hat{\xi}_{t+1}\cdot\Delta X_{t+2} + ... + \hat{\xi}_{T-1}\cdot\Delta X_T - H\}^2 \mid \mathfrak{F}_t]$$
$$=: \min_{a,b\,\in\,\mathbb{R}} E[J^2(t,a,b) \mid \mathfrak{F}_t] .$$

Dies entspricht der Idee des **Bellmanschen Optimalitätsprinzips**, die allerdings auf eine Situation angewandt wurde, die nicht der klassischen dynamischen Optimierung entspricht.

Nun haben wir nach (**6**.21)

$$J(t,a,b) = a + b\cdot\Delta X_{t+1} + [\Delta H_{t+2} - \Delta N_{t+2} + ... + \Delta H_T - \Delta N_T] - H$$
$$= a + b\cdot\Delta X_{t+1} + [H - H_{t+1} - (N_T - N_{t+1})] - H$$
$$= a + b\cdot\Delta X_{t+1} - (N_T - N_{t+1}) - H_{t+1}.$$

Da $\{N_t\}$ ein Martingal ist, hat man $E[N_T - N_{t+1} \mid \mathfrak{F}_{t+1}] = 0$. Somit folgt:

(6.31) $$E[J^2(t,a,b) \mid \mathfrak{F}_t] = E[\{a + b\cdot\Delta X_{t+1} - H_{t+1}\}^2 \mid \mathfrak{F}_t] + E[\{N_T - N_{t+1}\}^2 \mid \mathfrak{F}_t] .$$

Wir können nun wieder eine Lösung von (6.30) aus 6.28 erhalten mit 6.25, nämlich:

(6.32) $$E[J^2(t,V^*_t,\xi^*_t) \mid \mathfrak{F}_t] = \min_{a,b\,\in\,\mathbb{R}} E[J^2(t,a,b) \mid \mathfrak{F}_t]$$

mit $V^*_t = \hat{V}_t = H_t = \hat{E}[H \mid \mathfrak{F}_t]$, $\xi^*_t = \hat{\xi}_t$ wie in (6.16),

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}} E[J^2(t,a,b) \mid \mathfrak{F}_t] = E[\{N_T - N_t\}^2 \mid \mathfrak{F}_t] ,$$

wegen $$E[\{N_T - N_t\}^2 \mid \mathfrak{F}_t] = E[\{\Delta N_{t+1}\}^2 \mid \mathfrak{F}_t] + E[\{N_T - N_{t+1}\}^2 \mid \mathfrak{F}_t] .$$

Der so erhaltene Plan $\hat{\vartheta} = \{(\hat{V}_t,\hat{\xi}_t),\ 0\le t<T,H\}$ ist nicht mehr selbstfinanzierend, man wird bei diesem Plan in jedem Zeitpunkt t folgenden Betrag konsumieren bzw. zuschießen:

(6.33a) $\Delta C_t(\hat{\vartheta}) = \hat{V}_{t-1} + \hat{\xi}_{t-1} \cdot \Delta X_t - \hat{V}_t = -\Delta N_t$

Der Gesamtkonsum

(6.33b) $C_T(\hat{\vartheta}) = \hat{V}_0 + G_T(\hat{\xi}) - H = -N_T$

ist dabei aufgelöst worden in einen Kosumstrom $\{\Delta C_t(\hat{\vartheta})\}$ (bzw.Zahlungsstrom $\{\Delta N_t\}$). Wie beim Futuregeschäft können auf Grund dieses Zahlungsstroms die Verluste nicht still auflaufen. Bei der Absicherung ist man in einer sogenannten "marked to market"–Position.

Der Plan ist aber **im Mittel selbstfinanzierend** in dem Sinne, daß $E[\Delta C_t(\hat{\vartheta}) \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = 0$ gilt auf Grund der Martingaleigenschaft von $\{N_t\}$.

Als nächstes Problem sollen die Vorzeichen von $\hat{\xi}_t$ und $\hat{\eta}_t$ mit

$$\hat{V}_t =: \hat{\eta}_t + \hat{\xi}_t \cdot X_t$$

untersucht werden. Dazu machen wir die folgenden Voraussetzungen:

6.34 Voraussetzung. $\{X_t\}$ genügt der Differenzengleichung $\Delta X_t = D_{t-1} \cdot Y_t$, wobei D_{t-1} $\mathfrak{F}_{t-1}$–mb ist und $Y_t > 0$ und unabhängig von $\mathfrak{F}_{t-1}$ ist.

Ein typische Situation ist die folgende:

(6.35) $X_t = X_0 \cdot \exp\{\sum_{m=1}^{t} I_m\}$ wie in 3.10, P ist ein Produktmaß wie in 3.4.

In der Situation (6.35) ist 6.34 offenbar erfüllt mit $D_{t-1} = X_{t-1}$, $Y_t = \exp\{Z_t\} - 1$ und $\mathfrak{F}_{t-1} = \sigma(Z_1,...,Z_{t-1})$. Gemäß 6.10 ist auch Voraussetzung 6.9 erfüllt.

6.36 Voraussetzung. $H = h(X_T)$, wobei $h : (0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ isoton und $x \mapsto h(x)/x$ isoton sind.

6.37 Beispiel. Bei einer europäischen Kaufoption gilt $h(x) = (x-K_0)^+$ und $h(x)/x = (1 - \frac{1}{x} \cdot K_0)^+$ mit $K_0 > 0$. Dann ist offenbar 6.36 erfüllt. []

6.38 Lemma. Ist h eine isotone Funktion, X eine Zva mit X, $h(X) \in L^2(P)$, dann gilt:

$$\mathrm{Cov}[h(X),X] \geq 0.$$

Beweis: Sei $m := E[X]$, dann hat man:

$\mathrm{Cov}[h(X),X] = E[h(X) \cdot (X-m)] = \int_{\{X \geq m\}} h(X) \cdot (X-m)\, dP + \int_{\{X<m\}} h(X) \cdot (X-m)\, dP$

$\geq \int_{\{X \geq m\}} h(m) \cdot (X-m)\, dP + \int_{\{X<m\}} h(m) \cdot (X-m)\, dP = h(m) \cdot (E[X] - m) = 0.$ []

6.39 Satz. Unter den Voraussetzungen 6.34 und 6.36 gilt: $\hat{\xi}_t \geq 0$, $\hat{\eta}_t \leq 0$, $0 \leq t < T$.

Die Aussage von 6.39 besagt gerade: Man nimmt also immer Geld auf, um eine nichtnegative Anzahl von Anteilen am risikobehafteten Wertpapier zu halten.

6.40 Beispiel. Es liege das **Binomialmodell** aus §2 vor. Wir versehen mit Ω mit dem Martingalmaß P = P*. Dann muß P* auf Grund der Eindeutigkeit, wie sie in 2.6 festgestellt wurde, mit dem in (6.24) definierten W–Maß übereinstimmen; denn gemäß 6.8 gilt (6.7).

Sei $H/B_T = [X_T - K_0]^+$, $(\hat{V}_0,\hat{\xi})$ der wie oben definierte Plan, V_t der zugehörige Wertprozeß $V_t =: \hat{\eta}_t \cdot B_t + \hat{\xi}_t \cdot S_t$, also $V_0 = \hat{V}_0$ und $V_t/B_t = \hat{\eta}_t + \hat{\xi}_t \cdot X_t$.
Nach 2.4 existiert ein Plan (V_0',ξ') mit

$$[X_T - K_0]^+ = V_0' + \sum_{m=1}^{T} \xi_{m-1}' \cdot \Delta X_m.$$

Dies ist eine Föllmer–Schweizer–Zerlegung, die hier auch eine Kunita–Watanabe–Zerlegung ist, da das Martingalmaß $\hat{P}$ zugrundegelegt wurde. Auf Grund der Eindeutigkeit dieser Darstellung gemäß 6.22 erhalten wir $V_0' = \hat{V}_0$, $\xi' = \hat{\xi}$, also:

$$[X_T - K_0]^+ = \hat{V}_0 + \sum_{m=1}^{T} \hat{\xi}_{m-1} \cdot \Delta X_m = V_{T-}/B_T .$$

Die Zahlungsforderung aus der europäischen Kaufoption kann also durch den Plan $(\hat{V}_0,\hat{\xi})$ abgesichert und sogar dupliziert werden. Nach Beispiel 6.37 ist die Voraussetzung 8.36 erfüllt. Gemäß ist 2.6 ist unter P* auch (6.35) und somit 6.34 erfüllt. Somit besagt 6.39: $\hat{\xi}_t \geq 0$ und $\hat{\eta}_t \leq 0$ $\forall$ t. Ferner ist

$$\hat{V}_t = H_t = \hat{E}[(X_T - K_0)^+ \mid \mathfrak{F}_t] = \hat{V}_0 + \sum_{m=1}^{t} \hat{\xi}_{m-1} \cdot \Delta X_m = V_t/B_t \,. \; []$$

Beweis von 6.39 für den Fall T = 1**.**

Es ist $\hat{\xi} = \mathrm{Cov}[H,\Delta X]/\sigma^2 = \mathrm{Cov}[h(X_1),X_1]/\sigma^2 \geq 0$ nach 6.38. Ferner ist

$$\hat{\eta} = \hat{V}_0 - \hat{\xi} \cdot X_0 = H_{-1} - \hat{\xi} \cdot X_0 = E[H] - \hat{\xi} \cdot \mu - \hat{\xi} \cdot X_0 = E[H] - \hat{\xi} \cdot E[X_1]$$
$$= E[H] - E[X_1] \cdot \mathrm{Cov}[H,X_1]/\sigma^2 = E[H] - E[X_1] \cdot E[H \cdot (X_1 - E[X_1])]/\sigma^2$$
$$= E[H \cdot \{\mathrm{Var}[X_1]] - X_1 \cdot E[X_1] + E[X_1]^2\}])/\mathrm{Var}[X_1]$$
$$= E[H \cdot \{E[X_1^2] - X_1 \cdot E[X_1]\}]/\mathrm{Var}[X_1] \,.$$

Setzen $\tilde{E}[Y] := E[Y \cdot X_1]/E[X_1]$, so erhalten wir:

$$E[H \cdot \{E[X_1^2] - X_1 \cdot E[X_1]\}] \leq 0 \;\Leftrightarrow E[H] \cdot E[X_1^2] - E[H \cdot X_1] \cdot E[X_1] \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \tilde{E}[H/X_1] \cdot \tilde{E}[X_1] \leq \tilde{E}[X_1 \cdot H/X_1] \,.$$

Nach 8.38 gilt aber mit g(x) = h(x)/x:

$$0 \leq \tilde{C}\mathrm{ov}[g(X_1),X_1] = \tilde{E}[g(X_1) \cdot X_1] - \tilde{E}[g(X_1)] \cdot \tilde{E}[X_1]. \; []$$

Beweis von 6.39 für den Fall T ≥ 1**.** Es ist wie im Beweis für T=1:

$\hat{\xi}_{T-1} = \mathrm{Cov}[h(X_T),X_T \mid \mathfrak{F}_{T-1}]/\sigma^2_{T-1}$ und

$\hat{\eta}_{T-1} = E\left[H \cdot \{E[X_T^2 \mid \mathfrak{F}_{T-1}] - X_T \cdot E[X_T \mid \mathfrak{F}_{T-1}]\} \mid \mathfrak{F}_{T-1}\right] / \sigma_{T-1}^2$.

Indem man den Erwartungswert durch den bedingten ersetzt, folgt wie für T=1: $\hat{\xi}_{T-1} \geq 0$, $\hat{\eta}_{T-1} \leq 0$. Wie in der Darstellung für $\hat{\eta}_{T-1}$ oder in (6.7)* hat man ferner:

$H_{T-1} = E[H \cdot L_T \mid \mathfrak{F}_{T-1}]$ mit $\sigma_{T-1}^2 \cdot L_T = E[\{\Delta X_T\}^2 \mid \mathfrak{F}_{T-1}] - \Delta X_T \cdot \mu_{T-1}$.

Nun folgt ebenso wie im Beweis von 6.10 : $\sigma_{T-1}^2 = D_{T-1}^2 \cdot \mathrm{Var}[Y_T]$ und

$0 < \sigma_{T-1}^2 \cdot L_T = E[\Delta X_T^2 \mid \mathfrak{F}_{T-1}] - \Delta X_T \cdot \mu_{T-1} = D_{T-1}^2 \cdot E[Y_T^2] - D_{T-1} \cdot Y_T \cdot D_{T-1} \cdot E[Y_T]$

$= D_{T-1}^2 \cdot (E[Y_T^2] - Y_T \cdot E[Y_T])$. Daraus ergibt sich $E[Y_T^2] - Y_T \cdot E[Y_T] > 0$ und

$H_{T-1} = E[h(X_{T-1} \cdot Y_T) \cdot \{E[\{Y_T\}^2] - Y_T \cdot E[Y_T]\} \mid \mathfrak{F}_{T-1}] / \mathrm{Var}[Y_T] = h'(X_{T-1})$ mit

$h'(x) := E[h(x \cdot Y_T) \cdot \{E[\{Y_T\}^2] - Y_T \cdot E[Y_T]\}] / \mathrm{Var}[Y_T]$.

Wegen $Y_T > 0$ und $E[\{Y_T\}^2] - Y_T \cdot E[Y_T] > 0$ ist offenbar h' isoton.

Ebenso ist $\frac{1}{x} \cdot h'(x) = E[\frac{1}{x \cdot Y_T} \cdot h(x \cdot Y_T) \cdot Y_T \cdot \{E[\{Y_T\}^2] - Y_T \cdot E[Y_T]\}] / \mathrm{Var}[Y_T]$ isoton.

Mit vollständiger Induktion folgt nun die Behauptung. []

Es soll nun eine weitere Charakterisierung von $\hat{P}$ gegeben werden.

6.41 Definition. $P^* \in \mathbb{P}^{*2}(P)$ heißt **minimales Martingalmaß**, wenn gilt:

Ist M' ein P–Martingal mit $M'_t \in L^2(P)$, $1 \leq t \leq T$, das orthogonal zu $M = \{M_t\}$ ist, d.h.

$E[\Delta M_{t+1} \cdot \Delta M'_{t+1} \mid \mathfrak{F}_t] = 0 \quad 0 \leq t < T$,

so ist M' auch ein P*–Martingal.

6.42 Satz. $\hat{P}$ ist das einzige minimale Martingalmaß.

Beweis. a) "$\hat{P}$ ist ein minimales Martingalmaß".

Wir verwenden den Dichteprozeß $\{Z_t\}$ von $\hat{P}$; dann haben wir wegen (6.5) und 6.11:

(6.43) $\Delta Z_t = -\alpha_{t-1} \cdot Z_{t-1} \Delta M_t \in L^2$.

Sei M' wie in 6.41. Dann folgt:

$E[\Delta Z_t \cdot \Delta M'_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = -\alpha_{t-1} \cdot Z_{t-1} E[\Delta M_t \cdot \Delta M'_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = 0.$

Ferner gilt, da M'ein Martingal ist:

$E[Z_{t-1} \cdot \Delta M'_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = Z_{t-1} \cdot E[\Delta M'_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = 0.$

Es folgt somit:

$E[\Delta Z_t \cdot \Delta M'_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = 0.$

Mit den Bayes–Formel hat man also auch

$$\hat{E}\left[\Delta M'_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right] = 0 .$$

b) "Eindeutigkeit"

Sei $P^* \in \mathbb{P}^{*2}(P)$ und $Z^*_t := E\left[\frac{dP^*}{dP} \mid \mathfrak{F}_t\right] \in L^2$ der Dichteprozeß zu P*.
Wir verwenden jetzt die Kunita–Watanabe–Zerlegung von Z^*_T :

$$Z^*_T = \sum_{m=1}^{T} \beta_{m-1} \cdot \Delta M_m + N^*_T .$$

Da die Föllmer–Schweizer–Zerlegung eine Verallgemeinerung ist, haben wir die Existenz bereits gezeigt jetzt mit $\{M_t\}$ statt $\{X_t\}$. Die gemachten Voraussetzungen sind im Martingalfall stets erfüllt. Es folgt, da $\{\sum_{m=1}^{t} \beta_{m-1} \cdot \Delta M_m\}$ ein Martingal ist:

(6.44) $$Z^*_t = \sum_{m=1}^{t} \beta_{m-1} \cdot \Delta M_m + N^*_t \text{ mit } N^*_t = E\left[N^*_T \mid \mathfrak{F}\right].$$

Das Martingal $N^* = \{N^*_t\}$ ist wieder orthogonal zu M. Wir haben nun die folgende Semimartingalzerlegung von M jetzt bzgl. P*:

$$M_t = \sum_{m=1}^{t} (\Delta M_m - E^*\left[\Delta M_m \mid \mathfrak{F}_{m-1}\right]) + \sum_{m=1}^{t} E^*\left[\Delta M_m \mid \mathfrak{F}_{m-1}\right] \text{ mit}$$
$$E^*\left[\Delta M_m \mid \mathfrak{F}_{m-1}\right] = E\left[Z^*_m \cdot \Delta M_m \mid \mathfrak{F}_{m-1}\right] / Z^*_{m-1}$$

nach der Bayesformel. Nun ist wieder $E\left[Z^*_{m-1} \cdot \Delta M_m \mid \mathfrak{F}_{m-1}\right] = Z^*_{m-1} \cdot E\left[\Delta M_m \mid \mathfrak{F}_{m-1}\right] = 0$ und somit

$$E\left[Z^*_m \cdot \Delta M_m \mid \mathfrak{F}_{m-1}\right] = E\left[\Delta Z^*_m \cdot \Delta M_m \mid \mathfrak{F}_{m-1}\right]$$
$$= \beta_{m-1} \cdot E\left[\{\Delta M\}^2 \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right] + E\left[\Delta N^*_m \cdot \Delta M_m \mid \mathfrak{F}_{m-1}\right] , \text{ also}$$
$$E^*\left[\Delta M_m \mid \mathfrak{F}_{m-1}\right] = \beta_{m-1} \cdot \sigma^2_{m-1} / Z^*_{m-1}.$$

Andererseits haben wir nach (6.1) auch die folgende Semimartingalzerlegung von M bzgl. P*, da $\{X_t - X_0\}$ unter P* ein Martingal ist:

$$M_t = (X_t - X_0) - A_t.$$

Nun ist leicht zu sehen, daß die Semimartingalzerlegunge eindeutig ist. Es ergibt sich:

$\Delta A_t = \mu_{t-1} = \alpha_{t-1} \cdot \sigma^2_{t-1} = -\beta_{t-1} \cdot \sigma^2_{t-1} / Z^*_{t-1}$ und somit:

(6.45) $$\beta_t = -\alpha_{t-1} \cdot Z^*_{t-1} .$$

Wir nutzen nun aus, daß P* minimal ist; dann muß nämlich N* auch unter P* ein Martingal sein. Dann haben wir nach der Bayes–Formel: $E\left[Z^*_t \cdot \Delta N^*_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right] = 0$. Es folgt wie oben:

$$0 = E\left[\Delta Z^*_t \cdot \Delta N^*_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right] = \beta_{t-1} \cdot E\left[\Delta M_t \cdot \Delta N^*_t \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right] + E\left[\{\Delta N^*_t\}^2 \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right]$$
$$= E\left[\{\Delta N^*_t\}^2 \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right] .$$

Es folgt $E\left[\sum_{t=1}^{T} \{\Delta N^*_t\}^2\right] = 0$ und damit $N_t = 0$ f.s. $\forall$ t. Damit liefern (6.44) und (6.45):

$$Z^*_t = \sum_{m=1}^{t} \beta_{m-1} \cdot \Delta M_m = -\sum_{m=1}^{t} -\alpha_{t-1} \cdot Z^*_{t-1} \cdot \Delta M_m .$$

Dies ist aber die Rekursionsgleichung für den Dichteprozeß $\{Z_t\}$ von $\hat{P}$. Wegen
$Z_0^* = E[Z_T^* | \mathfrak{F}_0] = E[Z_T^*] = 1 = Z_0$ erhalten wir schließlich
$Z_t^* = Z_t \ \forall\, t.$ []

Eine Eigenschaft, die für zeitstetige Modell mit stetigen Pfaden gilt, überträgt sich allerdings nicht.

6.46 Bemerkung. Das minimale Martingalmaß $\hat{P}$ erhält nicht notwendig die Orthogonalität, d.h. ist M' ein P–Martingal mit $M'_t \in L^2(P)$, $1 \le t \le T$, das orthogonal zu $M = \{M_t\}$ ist, so ist M' nicht notwendig orthogonal zu M unter $\hat{P}$.
Wir haben nämlich: $E[Z_t \cdot \Delta M'_t \cdot \Delta M_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = E[\Delta Z_t \cdot \Delta M'_t \cdot \Delta M_t | \mathfrak{F}_{t-1}]$ wegen $E[Z_{t-1} \cdot \Delta M'_t \cdot \Delta M_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = Z_{t-1} \cdot E[\Delta M'_t \cdot \Delta M_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = 0$. Nun gilt aber
$E[\Delta Z_t \cdot \Delta M'_t \cdot \Delta M_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = -\alpha_{t-1} \cdot Z_{t-1} \cdot E[\Delta M'_t \cdot \{\Delta M_t\}^2 | \mathfrak{F}_{t-1}]$. []

Nach 4.6 und 4.8 läßt sich der Dichteprozeß $\{Z_t^*\}$ eines Martingalmaßes $P^* \in \mathbb{P}^{*1}(P)$ schreiben als $Z_t^* = \mathbf{\Pi}_{m=1}^t L_m^*$ und $L_0^* := 1$, wobei für $1 \le t \le T$ gilt:

$L_t^* > 0$, L_t^* ist $\mathfrak{F}_t$–mb., $E[L_t^* | \mathfrak{F}_{t-1}] = \mathbf{1}$, $E[L_t^* \cdot X_t | \mathfrak{F}_{t-1}] = X_{t-1}$ f. s. .

Der Dichteprozeß $\{Z_t\}$ zu $\hat{P}$ hat nach 6.6 die Darstellung:

$Z_t = \mathbf{\Pi}_{m=1}^t L_m$ mit $L_m := 1 - \alpha_{m-1} \cdot \Delta M_m$
Der Dichteprozeß von P ist natürlich $Z'_t \equiv 1$, also auch $L'_t \equiv 1$.
Wir wollen nun zeigen, daß L_t unter allen Konkurrenten L_t^* in einem gewissen Sinne am nächsten an der entsprechenden Größe des Originalmaßes $L'_t \equiv 1$ liegt. Wir haben nämlich:

$E[(L_t^* - 1)^2 | \mathfrak{F}_{t-1}] = E[\{(L_t^* - L_t) + L_t - 1\}^2 | \mathfrak{F}_{t-1}]$
$= E[(L_t^* - L_t)^2 + (L_t - 1)^2 + 2(L_t^* - L_t)(L_t - 1) | \mathfrak{F}_{t-1}]$
$= E[(L_t^* - L_t)^2 + (L_t - 1)^2 - 2 \cdot \alpha_{t-1} (L_t^* - L_t) \cdot \Delta M_t | \mathfrak{F}_{t-1}]$

Nach Voraussetzung existiert $E[L_t^* \cdot X_t | \mathfrak{F}_{t-1}]$ und natürlich $E[L_t \cdot X_t | \mathfrak{F}_{t-1}]$; somit existiert auch $E[(L_t^* - L_t) \cdot \Delta M_t | \mathfrak{F}_{t-1}]$ f.s.; insbesondere gilt $E[\{(L_t^* - L_t) \cdot \Delta M_t\}^- | \mathfrak{F}_{t-1}] < \infty$ f.s. .
Wir können also schreiben:

$E[(L_t^* - 1)^2 | \mathfrak{F}_{t-1}]$
$= E[(L_t^* - L_t)^2 | \mathfrak{F}_{t-1}] + E[(L_t - 1)^2 | \mathfrak{F}_{t-1}] - 2 \cdot \alpha_{t-1} \cdot E[(L_t^* - L_t) \cdot \Delta M_t | \mathfrak{F}_{t-1}]$.

Nun gilt aber

$$E\left[(L_t^* - L_t)\cdot \Delta M_t \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}\right] = E\left[(L_t^* - L_t)\cdot(\Delta X_t - \mu_{t-1}) \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}\right]$$
$$= E\left[\, L_t^*\cdot \Delta X_t \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}\right] - E\left[\, L_t^*\cdot \mu_{t-1} \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}\right]$$
$$- E\left[L_t\cdot \Delta X_t \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}\right] + E\left[\, L_t\cdot \mu_{t-1} \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}\right]$$
$$= -\mu_{t-1} + \mu_{t-1} = 0\,.$$

Wir haben also

$$E\left[(L_t^* - 1)^2 \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}\right] = E\left[(L_t^* - L_t)^2 \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}\right] + E\left[(L_t - 1)^2 \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}\right]$$
$$\geq E\left[(L_t - 1)^2 \,|\, \mathfrak{F}_{t-1}\right]\,.$$

§7 Werterhaltende Portfoliopläne, Markt–Numeraire.

Erinnerung: Ein **Portfolioplan** ist gegeben durch $\vartheta = \{\vartheta_0,...,\vartheta_{T-1},V_T(\vartheta)\}$ mit

$\vartheta_t = (\vartheta_t^0,...,\vartheta_t^d)^\top = (\eta_t,\xi_t^1,...,\xi_t^d)^\top$, und $\vartheta_t(\omega) = \vartheta_t(\omega_t) \in \mathbb{R}^{1+d}$ (ω_0 = const).

$V_T(\vartheta) = V_T(\vartheta)(\cdot)$ ist der **Terminalwert** und ist eine reelle mb Funktion auf Ω; wir schreiben dann $\vartheta \in \Theta$.

$\{V_t(\vartheta)\ ,\ 0\le t\le T\}$ ist der **Wertprozeß** mit $V_t(\vartheta) := \vartheta_t^\top \cdot S_t$, $0 \le t < T$.

$\Delta C_t(\vartheta) := \vartheta_{t-1}^\top \cdot S_t - V_t(\vartheta)$ ist der **Konsum** in $1\le t\le T$.

Dan hat man mit 1.13:

(7.1) $$\Delta C_t(\vartheta) = V_{t-1}(\vartheta) - V_t(\vartheta) + \vartheta_{t-1}^\top \cdot \Delta S_t\ ,$$
$$\Delta C_t(\vartheta)/B_t := \vartheta_{t-1}^\top \cdot X_t - \check{V}_t(\vartheta) = \check{V}_{t-1}(\vartheta) - \check{V}_t(\vartheta) + \xi_{t-1}^\top \cdot \Delta X_t\ ,\ 1\le t\le T.$$

7.2 Definition. Wir schreiben $\vartheta \in \Theta^p$, wenn gilt: $\xi \in \Xi^p$ und $\Delta C_t(\vartheta)/B_t \in L^p(P)$.

Aus (7.1) ergibt sich sofort mit Induktion:

7.3 Lemma. Für $\vartheta \in \Theta^p$ gilt: $\check{V}_t(\vartheta) \in L^p(P)$.

Es folgt eine Variante der

7.4 Bayesformel. Sei $Q \in \mathbb{P}^{*1}$ mit $\frac{dQ}{dP} = \prod_{n=1}^T L_n$ gemäß (4.7a) und H_m eine beschränkte $\mathfrak{F}_m$–mb Zva, $m>t\ge 0$. Dann gilt:

$$E_Q[H_m \mid \mathfrak{F}_t] = E[H\cdot L_{t+1}\cdot ... \cdot L_m \mid \mathfrak{F}_t]\ .$$

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus der Bayes–Formel 3.21

$E_Q[H_m \mid \mathfrak{F}_t] = E[H_m \cdot \frac{dQ}{dP} \mid \mathfrak{F}_t] \,/\, E[\frac{dQ}{dP} \mid \mathfrak{F}_t]$ und $E[L_{m+1}\cdot ... \cdot L_T \mid \mathfrak{F}_m] = 1$. $[]$

Aus (7.1) folgt:

(7.5) $$\check{V}_t(\vartheta) = \sum_{m=t+1}^T \Delta C_m(\vartheta)/B_m + \check{V}_T - \sum_{m=t+1}^T \xi_{m-1}^\top \cdot \Delta X_m\ .$$

7.6 Lemma Sei $\vartheta \in \Theta^p$, $Q \in \mathbb{P}^{*q}$ mit $\frac{dQ}{dP} = \prod_{m=1}^T L_m^Q$ gemäß (4.7a), $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; dann gilt:

(a) $\check{V}_t(\vartheta) = E_Q[\ \sum_{m=t+1}^T \Delta C_m(\vartheta)/B_m + \check{V}_T \mid \mathfrak{F}_t]$, $0\le t<T$.

(b) $V_t(\vartheta) = \sum_{m=t+1}^T E[\ (\prod_{n=t+1}^m L_n/(1+r_n))\cdot(\Delta C_m + \delta_{mT}\cdot V_T(\vartheta)) \mid \mathfrak{F}_t]$.

Beweis. Es folgt (a) aus (7.5) wegen

$$E_Q[\sum_{m=t+1}^T \xi_{m-1}^\top \cdot \Delta X_m \mid \mathfrak{F}_t] = E_Q[G_T(\xi) - G_t(\xi) \mid \mathfrak{F}_t] = 0 \text{ gemäß 3.16.}$$

Nun folgt (b) mit der Bayes–Formel 7.4. $[]$

Die Darstellung von $\check{V}_t(\vartheta)$ als bedingten Erwartungswert unter einem Martingalmaß spielt eine wichtige Rolle. Gemäß 7.6(b) kann man die Berechnung unter einem Martingalmaß als eine Modifikation der Diskontierung ansehen:

7.7 Definition. Für $\frac{dQ}{dP} = \Pi_{m=1}^{T} L_m$ sei $1 + r_t^Q := (1 + r_t)/L_t^Q$. Man kann r_t^Q als den an (die Berechnung unter) Q angepaßten Zinssatz bezeichnen.

Es gilt $1 + r_t^Q > 0$, aber nicht notwendig $r_t^Q > 0$. Nach 7.6 hat man also:

(7.8) $$V_t(\vartheta) = \sum_{m=t+1}^{T} E\left[(\Delta C_m(\vartheta) + \delta_{mT} \cdot V_T(\vartheta)) / \Pi_{n=t+1}^{m} (1+r_n^Q) \mid \mathfrak{F}_t \right]$$
$$v_0 = V_0(\vartheta) = \sum_{m=1}^{T} E\left[(\Delta C_m(\vartheta) + \delta_{mT} \cdot V_T(\vartheta)) / \Pi_{n=1}^{m} 1/(1+r_n^Q) \right].$$

7.9 Definition. Ein Plan $\vartheta \in \Theta^p$ heißt **wertkonservierend**, wenn ein $Q \in \mathbb{P}^{*q}$ existiert mit

(7.10) $$\Delta C_t(\vartheta) = r_t^Q \cdot v_0 \text{ for } 1 \le t \le T \text{ und } V_T(\vartheta) = v_0.$$

7.11 Definition. $V_t^Q(\vartheta) := \sum_{m=t+1}^{T} (\Delta C_m(\vartheta) + \delta_{mT} \cdot V_T(\vartheta)) / \Pi_{n=t+1}^{m} 1/(1+r_n^Q)$, $t < T$,
$V_T^Q(\vartheta) := V_T(\vartheta)$.

Dann ergibt sich also

(7.12) $$V_t(\vartheta) = E\left[V_t^Q(\vartheta) \mid \mathfrak{F}_t\right] ,$$

(7.13) $$V_t^Q(\vartheta) = \left[\Delta C_{t+1}(\vartheta) + V_{t+1}^Q(\vartheta)\right]/(1+r_{t+1}^Q) \text{ , } 0 \le t < T.$$

7.14 Lemma. Ein Plan $\vartheta \in \Theta^p$ ist genau dann wertkonservierend, wenn ein $Q \in \mathbb{P}^{*q}$ existiert mit $V_t^Q(\vartheta) = v_0 \quad 0 \le t \le T$.

Beweis. Es gelte (7.10). Dann kann man mit (7.13) folgern:

Wenn $V_{t+1}^Q(\vartheta) = v_0$ gilt, dann ergibt sich

$V_t^Q(\vartheta) = \left[\Delta C_{t+1}(\vartheta) + V_{t+1}^Q(\vartheta)\right]/(1+r_{t+1}^Q) = \left[\Delta C_{t+1}(\vartheta) + v_0\right]/(1+r_{t+1}^Q)$
$= \left[r_t^Q \cdot v_0 + v_0\right]/(1+r_{t+1}^Q) = v_0.$

Es gelte nun $V_t^Q(\vartheta) = v_0$ t; dann folgt mit (7.13):

$v_0 = \left[\Delta C_t(\vartheta) + v_0\right]/(1+r_t^Q)$ for $t \le T$, also (7.10). $[]$

7.15 Definition. Ein Plan ϑ is **schwach wertkonservierend**, wenn gilt: $V_t(\vartheta) = v_0$, $1 \le t \le T$.

Ein Plan $\vartheta \in \Theta^p$ heißt **zinssatzorientiert**, wenn für ein $Q \in \mathbb{P}^{*q}$ gilt:

$\vartheta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta S_t = r_t^Q \cdot V_{t-1}(\vartheta)$, $1 \le t \le T$.

Dabei kann ist $\vartheta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta S_t / V_{t-1}(\vartheta)$ der Gewinn aus dem Plan ϑ in t im Verhältnis zum Wert in t–1 und kann als **Rendite** des Planes ϑ bezeichnet werden.

7.16 Lemma. Ein Plan ϑ ist genau dann schwach wertkonservierend, wenn gilt:

(7.17) $\Delta C_t(\vartheta) = \vartheta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta S_t$.

Beweis. Die Aussage ergibt sich aus (7.1): $\Delta C_t(\vartheta) = V_{t-1}(\vartheta) - V_t(\vartheta) + \vartheta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta S_t$. []

7.18 Satz. Ein Plan ϑ ist genau dann wertkonservierend, wenn er schwach wertkonservierend und zinssatzorientiert ist..

Beweis. Wenn ϑ schwach wertkonservierend ist, so gilt (7.17). Ist ϑ auch zinssatzorientiert, so hat man $\Delta C_t(\vartheta) = \vartheta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta S_t = r_t^Q \cdot V_{t-1}(\vartheta)$; wegen $V_{t-1}(\vartheta) = v_0$ folgt (7.10).
Wenn ϑ wertkonservierend ist, dann ist ϑ auch schwach wertkonservierend gemäß: $V_t(\vartheta) = E\left[V_t^Q(\vartheta) \,|\, \mathfrak{F}_t\right]$ (vgl. (7.12). Es folgt nun mit (7.10) und (7.17) :
$r_t^Q \cdot V_{t-1}(\vartheta) = r_t^Q \cdot v_0 = \Delta C_t(\vartheta) = \vartheta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta S_t$. []
Wegen (7.1) hat man :

$V_{t-1}(\vartheta) + \vartheta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta S_t = \Delta C_t(\vartheta) + V_t(\vartheta) = B_t \cdot \left[\Delta C_t(\vartheta)/B_t + \breve{V}_t(\vartheta)\right]$ und
$\Delta C_t(\vartheta)/B_t + \breve{V}_t(\vartheta) = \breve{V}_{t-1}(\vartheta) + \xi_{t-1}^{\top} \cdot \Delta X_t$, $1 \le t \le T$. Es folgt also:

(7.19) $V_{t-1}(\vartheta) + \vartheta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta S_t = B_t \cdot \left[\breve{V}_{t-1}(\vartheta) + \xi_{t-1}^{\top} \cdot \Delta X_t\right]$

7.20 Propositon. Sei $Q \in \mathbb{P}^*(q)$, $\frac{dQ}{dP} = \prod_{m=1}^{T} L_m^Q$; dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
(i) ϑ ist zinsratenorientiert mit zugehörigem Q;
(ii) $L_t^Q \cdot \left[V_{t-1}(\vartheta) + B_{t-1} \cdot \vartheta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta X_t\right] = V_{t-1}(\vartheta)$, $1 \le t \le T$.

Beweis. Aus (7.19) erhält man:

$r_t^Q \cdot V_{t-1}(\vartheta) = \vartheta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta S_t$
$\Leftrightarrow \quad (1 + r_t^Q) \cdot V_{t-1}(\vartheta) = V_{t-1}(\vartheta) + \vartheta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta S_t = B_t \cdot \left[\breve{V}_{t-1}(\vartheta) + \vartheta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta X_t\right]$
$\Leftrightarrow \quad (1 + r_t^Q) \cdot V_{t-1}(\vartheta) = V_{t-1}(\vartheta) \cdot (1 + r_t)/L_t^Q = B_t \cdot \left[\breve{V}_{t-1}(\vartheta) + \vartheta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta X_t\right]$
$\Leftrightarrow \quad V_{t-1}(\vartheta)/L_t^Q = B_t \cdot \left[\breve{V}_{t-1}(\vartheta) + \vartheta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta X_t\right]/(1 + r_t)$
$= V_{t-1}(\vartheta) + B_{t-1} \cdot \vartheta_{t-1}^{\top} \cdot \Delta X_t$. []

Bei $V_{t-1} > 0$ können wir in 7.20(ii) kürzen:

7.21 Korollar. Sei $Q \in \mathbb{P}^{*q}$, $\frac{dQ}{dP} = \prod_{m=1}^{T} L_m^Q$; dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) ϑ ist zinsratenorientiert mit zugehörigem Q, $V_t(\vartheta)>0$, $0 \le t < T$;

(ii) $L_{t+1}^Q = \dfrac{1}{1 + \varphi_t^\top \cdot \Delta X_{t+1}}$ mit $\varphi_t \in \Xi$, $\varphi_t^k = (B_t/V_t(\vartheta))\vartheta_t^k$, $1 \le k \le d$, $V_t(\vartheta)>0$, $0 \le t < T$.

Es kann nun mit 7.21 eine Konstruktionshilfe für einen zinssatzorientierten und schwach werterhaltenden Portfolioplan gegeben werden.

7.22 Lemma. Sei $\varphi \in \Xi$, sodaß $L_t^Q := 1/(1 + \varphi_{t-1}^\top \cdot \Delta X_t)$, $1 \le t \le T$, gemäß (4.7a) ein $Q \in \mathbb{P}^{*1}$ definiert und seien V_t positive $\mathfrak{F}_t$–mb Zva, $0 \le t < T$.

Definiert man dann $(\vartheta_t^1,...,\vartheta_t^d) := (V_t/B_t) \cdot \varphi_t$, und ϑ_t^0 über

$$V_t = \vartheta_t^0 \cdot B_t + \sum_1^d \vartheta_t^k \cdot S_t^k , \quad 0 \le t < T,$$

so ist ϑ bei beliebiger Wahl des Terminalwertes $V_T(\vartheta)$ ein zinssatzorientierter Portfolioplan mit $V_t(\vartheta) = V_t$, $0 \le t < T$.

Beweis. Nach Definition von ϑ_t^0 haben wir $V_t(\vartheta) = V_t > 0$, $0 \le t < T$; somit ergibt sich aus der Voraussetzung: $L_t = 1/[1 + \varphi_{t-1}^\top \cdot \Delta X_t] = 1/[1 + (B_{t-1}/V_{t-1}(\vartheta)) \cdot \vartheta_{t-1}^\top \cdot \Delta X_t]$.
Nach 7.21 folgt, daß ϑ zinssatzorinetiert ist. []

7.23 Lemma. Ist Y eine positive Zva mit $E[Y] = E[\frac{1}{Y}] = 1$, so folgt: $Y \equiv 1$ f.s. .

Beweis. Aus $(y-1)^2>0$ für $y \ne 1$, folgt $\frac{1}{y} - 2 + y > 0$ für $y>0$, $y \ne 1$. Wäre $P[Y \ne 1]>0$, so ergäbe sich $E[\frac{1}{Y} - 2 + Y] > 0$, d.h. $E[\frac{1}{Y}] + E[Y] > 2$.
Es ist $g(y) = 2 - y$ die Tangente an $f(y) = \frac{1}{y}$ in $y = 1$. Es wurde im Grunde ausgenutzt, daß für strikt konvexe Funktionen wie $f(y) = \frac{1}{y}$ die strikte Jensensche Ungleichung gilt. []
Der Einfachheit formulieren wir den nächsten Satz nur für den interessierenden Fall, daß die X_t beschränkte Zva sind.

7.24 Proposition (Eindeutigkeit). Sei $p=\infty$, $q=1$. Seien $\varphi_i \in \Xi$, $i = a,b$, sodaß für $i=a,b$

$L_{it} := 1/(1 + \varphi_{i,t-1}^\top \cdot \Delta X_t)$, $1 \le t \le T$, gemäß (4.7a) ein $Q_i \in \mathbb{P}^{*1}$ definiert.

Dann gilt: $L_{at} = L_{bt}$ f.s. $1 \le t \le T$, d.h. $\varphi_{a,t-1}^\top \cdot \Delta X_t = \varphi_{b,t-1}^\top \cdot \Delta X_t$ f.s. ,$1 \le t \le T$.

Beweis: Seien $\varphi_i = \varphi_{i,t-1}$, $i = a,b$ gegeben, $L_i := (1 + \varphi_i^\top \cdot \Delta X_t)^{-1}$ mit

(i) φ_i $\mathfrak{F}_{t-1}$–mb, (ii) $0 < 1 + \varphi_i^\top \cdot \Delta X_t < \infty$,

(iii) $E[L_i \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = 1$, $E[L_i \cdot \Delta X_t^k \mid \mathfrak{F}_{t-1}] = 0$, $1 \le k \le d$, f.s. .

Wir setzen $A_n := \{ |\varphi_a^k| \le n\} \in \mathfrak{F}_{t-1}$; dann gilt $A_n \uparrow \Omega$. Dann gilt:
$E[L_b/L_a] = \lim_{n\to\infty} E[\mathbf{1}_{A_n} \cdot L_b/L_a]$ mit

$$E[\mathbf{1}_{A_n} \cdot L_b/L_a] = E[\mathbf{1}_{A_n} \cdot E[L_b \cdot (1 + \varphi_a^\top \cdot \Delta X_t) | \mathfrak{F}_{t-1}]]$$
$$= E[\mathbf{1}_{A_n} \cdot (E[L_b | \mathfrak{F}_{t-1}] + \varphi_a^\top \cdot E[L_b \cdot \Delta X_t | \mathfrak{F}_{t-1}])] = P[A_n].$$

Also haben wir $E[L_b/L_a] = 1$; ebenso folgt $E[L_a/L_b] = 1$. Gemäß 7.23 folgt somit $L_b/L_a = 1$ f.s., d.h. $L_a = L_b$ f.s. . []

7.25 Notation. Sei q_t eine bedingte Verteilung von ΔX_t bzgl. $\mathfrak{F}_{t-1}$; insbedondere sei q_1 die Verteilung von ΔX_1.

7.26 Lemma. Für $\varphi \in \Xi$ mit $0 < L_t := 1/(1 + \varphi_{t-1}^\top \cdot \Delta X_t) < \infty$, $1 \le t \le T$, sind äquivalent:

(i) L_t, $1 \le t \le T$, definiert ein Martingalmaß $Q \in \mathbb{P}^*{}^1$ gemäß (4.7a);

(ii) $\int x^k/(1 + \varphi_{t-1}^\top(\omega_{t-1}) \cdot x)\, q_t(dx | \omega) = 0$ für f.a. $\omega \in \Omega$ [dabei sei $x=(x^1,...,x^d)$]
$1 \le k \le d$, $1 \le t \le T$.

Beweis. Nach Definition von q_t, bedeutet die Eigenschaft (ii) gerade
$E[L_t \cdot \Delta X_t^k | \mathfrak{F}_{t-1}] = 0$, $1 \le k \le d$, $1 \le t \le T$; also impliziert (i) damit (ii).
Nun haben wir $1 = L_t \cdot (1 + \varphi_{t-1}^\top \cdot \Delta X_t)$.
Wir setzen für $A \in \mathfrak{F}_{t-1}$: $A_n := \{ |\varphi^k| \le n\} \in \mathfrak{F}_{t-1}$; dann gilt $A_n \uparrow A$ und wir erhalten:
$P[A] = \lim_{n\to\infty} E[\mathbf{1}_{A_n} \cdot L_t \cdot (1 + \varphi_{t-1}^\top \cdot \Delta X_t)]$ mit

$$E[\mathbf{1}_{A_n} \cdot L_t \cdot (1 + \varphi_{t-1}^\top \cdot \Delta X_t)] = E[\mathbf{1}_{A_n} \cdot E[L_t \cdot (1 + \varphi_{t-1}^\top \cdot \Delta X_t) | \mathfrak{F}_{t-1}]]$$
$$= E[\mathbf{1}_{A_n} \cdot E[L_t \cdot (1 + \varphi_{t-1}^\top \cdot \Delta X_t) | \mathfrak{F}_{t-1}]]$$
$$= E[\mathbf{1}_{A_n} \cdot (E[L_t | \mathfrak{F}_{t-1}] + \varphi_{t-1}^\top \cdot E[L_t \cdot \Delta X_t | \mathfrak{F}_{t-1}])] = E[\mathbf{1}_{A_n} \cdot E[L_t | \mathfrak{F}_{t-1}]].$$

Es ergibt sich somit wegen monotoner Konvergenz:
$P[A] = \lim_{n\to\infty} E[\mathbf{1}_{A_n} \cdot E[L_t | \mathfrak{F}_{t-1}]] = E[\mathbf{1}_A \cdot E[L_t | \mathfrak{F}_{t-1}]]$, $A \in \mathfrak{F}_{t-1}$.
Es folgt somit $E[L_t | \mathfrak{F}_{t-1}]$. []

Für den Fall d=1 kann die Existenz eines Planes $\varphi \in \Xi$ mit 7.26(ii) vollständig geklärt werden.
Wir betrachten die folgende Situation und schreiben wieder $Z(\omega) = Z(\omega_t)$ für $\mathfrak{F}_t$– mb Abbildungen Z; dabei sei etwa $E^0 = \{0\}$:

(7.27) Es sei d=1. Zu $0 \le t < T$ existieren mb Funktionen $\alpha_t(\cdot)$ und $\beta_t(\cdot)$ auf E^t mit

(i) $-\infty < -\alpha_t(\omega_t) < 0 < \beta_t(\omega_t) < \infty$, $\omega_t \in E^t$,

(ii) $q_{t+1}([-\alpha_t(\omega_t),\beta_t(\omega_t)] \mid \omega_t) = 1$, d.h. $P[-\alpha_t(\omega_t) \le \Delta X_{t+1} \le \beta_t(\omega_t) \mid \mathfrak{F}_{t-1}](\omega_t) = 1$.

Sei $f_t(\omega_t,a) := \int \frac{z}{1 + a\cdot z}\, q_{t+1}[dz \mid \omega_t]$, $-\frac{1}{\beta_t(\omega_t)} \le a \le \frac{1}{\alpha_t(\omega_t)}$.

7.28 Beispiel. Ein wichtiges Beispiel ist durch Zahlen $0 < d < 1 < u$ gegeben gemäß:

$\alpha_t(\omega_t) = (d-1)\cdot X_t(\omega_t)$ und $\beta_t(\omega_t) = (u-1)\cdot X_t(\omega_t)$.

Dann hat man also $d\cdot X_t \le X_{t+1} \le u\cdot X_t$. Allgemeiner kann man $d = d_t(\omega_t)$, $u = u_t(\omega_t)$ ansetzen. []

7.29 Lemma In der Situation von (7.27) mit

(7.30) $f_t(\omega_t, -\frac{1}{\beta_t(\omega_t)} + 0) < 0 < f_t(\omega_t, \frac{1}{\alpha_t(\omega_t)} - 0)$.

existiert ein $\varphi = (\varphi_t) \in \Xi$ mit

$-\frac{1}{\beta_t(\omega_t)} < \varphi_t(\omega_t) < \frac{1}{\alpha_t(\omega_t)}$, and $f_t(\omega_t,\varphi_t(\omega_t)) = 0$.

Beweis. Sei $D_t(\cdot) := [-\frac{1}{\beta_t(\cdot)}, \frac{1}{\alpha_t(\cdot)}]$.

Mit dem Satz von der majorisierter Konvergenz kann man leicht zeigen, daß $f_t(\omega_t,\cdot)$ stetig im Innern von $D_t(\omega_t)$ ist. Nach dem Zwischenwertsatz und (7.30) existiert ein $a_t(\omega_t)$ mit $f_t(\omega_t,\varphi_t(\omega_t)) = 0$. Das Problem besteht in der mb Auswahl der Nullstelle.

Der Selektionssatz 5.36 kann leicht so verallgemeinert werden, daß er die Existenz einer mb Funktion $\varphi_t : E^t \mapsto \mathbb{R}$ sichert mit

$\varphi_t(\omega_t) \in D_t(\omega_t)$, $u(\omega_t,\varphi_t(\omega_t)) = \min_{a\in D_t(\omega_t)} u(\omega_t,a)$.

Nun gilt aber $0 \le \min_{a\in D_t(\omega_t)} u(\omega_t,a) \le u(\omega_t,a_t(\omega_t)) = 0$.

[Der Selektionssatz erfaßt nur den Fall, daß D_t nicht von ω_t abhängt. Hier ist aber $\{(\omega_t,a) \in E^t\times\mathbb{R};\ a \in D_t(\omega_t)\}$ eine mb Teilmenge von $E^t\times\mathbb{R}$. Weiter ist $\mathbb{Q}\cap D_t(\cdot)$ dicht in $D_t(\cdot)$. Ferner kann u zu einer Carathéodory–Funktion $\hat{u}$ auf $E^t\times\mathbb{R}$ (d.h. gemäß (5.35) $\hat{u} \in \mathfrak{Q}_t(\mathbb{R})$) fortgesetzt werden gemäß

$\hat{u}(\omega_t,a) := u(\omega_t,((-\frac{1}{\beta_t(\omega_t)})\vee a) \wedge \frac{1}{\alpha_t(\omega_t)})$]. []