

# Stochastische Finanzmärkte I

Manfred Schäl, Inst. f. Angewandte Mathematik, Univ. Bonn.

Wintersemester 1999/00.

## §1 Einführung.

Es werden zeitdiskrete Modelle zugrundegelegt mit einem endlichen **Zeithorizont**  $T \in \mathbb{N}$ . Der Markt wird durch die folgende **Situation** beschrieben:

Es bestehen  $1 + d$  Anlagemöglichkeiten jeweils zu den Zeitpunkten  $t = 0, 1, \dots, T$ :

Eine der Anlagemöglichkeiten ist das *Sparbuch (bond)*, das durch die *Zinssätze*  $r_t$  jeweils für die  $t$ -te Periode  $[t-1, t)$  beschrieben wird. Dabei wird angenommen, daß der gleiche Zinssatz  $r_t$  gilt, wenn man Geld anlegt und wenn man Geld leiht. Dies ist natürlich eine Modelleinschränkung. Eine Anlage von  $\eta$  Euro hat z.Zt.  $t$  den Wert  $\eta \cdot B_t$  mit

$$(1.1) \quad B_t := \prod_{m=1}^t (1+r_m), \quad B_0 \equiv 1.$$

Dabei ist  $r_m$  der Zinssatz für kurzfristige Anlagen (*kurzfristiger Zinssatz*). Er wird häufig als deterministisch vorausgesetzt; diese Annahme ist aber in weiten Teilen nicht nötig.

Die anderen Anlagemöglichkeiten sind  $d$  risikobehaftete *Wertpapiere (stocks)* [z.B. Aktien oder Devisen]; ihre Preise oder Kurse werden durch stochastische Prozesse beschrieben, die sogenannten *Preisprozesse*  $\{S_t^k, t=0, 1, \dots, T\}$ . Eine Anlage von  $\xi^k \in \mathbb{R}$  Anteilen in das kursabhängige Wertpapier mit Index  $k \in \{1, \dots, d\}$  und dem Kurs  $S_t^k > 0$  kostet z.Zt.  $t=0$   $\xi^k \cdot S_0^k$  Euro und hat z.Zt.  $t$  den Wert  $\xi^k \cdot S_t^k$ . Die Anlage  $(\eta, \xi) = (\eta, \xi^1, \dots, \xi^d)$  kostet also z.Zt.  $t=0$   $\eta \cdot B_0 + \xi^T S_0 = \eta + \sum_{k=1}^d \xi^k \cdot S_0^k$  Euro und hat z.Zt.  $t$  den Wert  $\eta \cdot B_t + \xi^T \cdot S_t$  mit  $S_t = (S_t^1, \dots, S_t^d)$ .  $\{S_0, \dots, S_T\}$  heißt der *Preisprozeß* der risikobehafteten Wertpapiere.

Dabei schreiben wir  $x^T y = x^T \cdot y$  für das übliche Skalarprodukt in  $\mathbb{R}^d$ .

Negative Anteile  $\xi^k$  entsprechen sogenannten *Wertpapierleerverkäufen*. D.h. etwa, daß man Aktien verkauft, die man noch nicht besitzt, die man also einem anderen Investor schuldet.

Das Sparbuch spielt eine Sonderrolle, nämlich die Rolle eines *Numeraires*. Die Preisentwicklung des  $k$ -ten Wertpapiers wird in Beziehung zu ihm gesetzt, d.h. durch  $\{B_t\}$  diskontiert. Die Unterscheidung zwischen risikolosen und risikobehafteten Anlagen ist nicht nötig. Man kann sich unter  $B_t$  auch den Kurs eines beliebigen Wertpapiers denken. So können auch die Zinssätze  $r_t$  negative Zufallsvariablen (Zva) sein, allerdings mit  $1+r_t > 0$ . (Die Normierung  $B_0 \equiv 1$  kann man o.E. stets annehmen.) Wir werden aber bei der 0-ten Anlage der Einfachheit halber immer vom Sparbuch sprechen. Die Zva  $S_t^k$  werden stets als positiv angenommen.

Die Unsicherheit über die Marktentwicklung wird durch einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  modelliert. Um Meßbarkeits- und Integrierbarkeitsüberlegungen zu vermeiden machen wir die

folgende Generalvoraussetzung:

**1.2a Annahme.**  $\Omega$  ist endlich,  $\mathfrak{F}$  ist die Potenzmenge von  $\Omega$  und  $P(\omega) = P(\{\omega\}) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$ .

Diese Annahme hat aber noch weitreichendere Konsequenzen. So wurden wichtige Sätze zunächst für den Fall 1.2 gezeigt und erst wesentlich später auf allgemeinere Fälle übertragen.

Die Informationsstruktur soll hier durch  $Z_{\forall t} H_t$  mit Werten in einem endlichen Raum  $\Omega_t$ ,  $0 \leq t \leq T$ , repräsentiert werden. Ohne Einschränkung nehme  $H_t$  jeden Wert in  $\Omega_t$  an. Dabei beschreibt  $H_t$  die Vorgeschichte einschließlich der Gegenwart z.Zt.  $t$ , wobei  $H_0$  eine Konstante ist und etwa  $\Omega_0 = \{0\}$  gesetzt wird. Vorangehende Informationen über den Markt werden nicht vergessen; deshalb nehmen wir an, daß  $H_{t-1}$  eine Funktion von  $H_t$  ist. Jede Funktion von  $H_{t-1}$  kann somit auch als Funktion von  $H_t$  geschrieben. Zufallsvariablen, die als Funktionen von  $H_t$  geschrieben werden können, beschreiben gerade Größen, die z. Zt.  $t$  bekannt sind. Dabei sei o.E.  $H_T$  als Identität auf  $\Omega$ , insbesondere  $\Omega_T = \Omega$  gewählt. Wir sagen, ein stochastischer Prozeß  $\{Z_t\}$  ist *adaptiert* (an die Informationsstruktur), wenn  $Z_t$  eine Funktion  $Z_t = \zeta_t(H_t)$  ist. Dies impliziert, daß  $Z_0$  deterministisch ist. Die folgende **Annahme** ist natürlich:

**1.2b Annahme.**  $\{r_t\}$  (und damit  $\{B_t\}$ ) sowie  $\{S_t\}$  sind adaptiert.

Ein Investor kann also stets die Kursentwicklungen bis z.Z.  $t$  beobachten.

**1.3 Bemerkung.** In der Regel wird die Informationsstruktur durch eine aufsteigende Familie von Unter- $\sigma$ -Algebren  $\{\mathfrak{F}_t\}$  beschrieben;  $\{Z_t\}$  ist dann adaptiert, wenn  $Z_t$   $\mathfrak{F}_t$ -meßbar ist. Dieser Zugang ist genauso allgemein, wie der obige, wenn man auf  $\Omega_t$  jeweils noch eine beliebige  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{F}_t$  vorgibt. Bei der Vorgabe von  $\{\mathfrak{F}_t\}$  kann man nämlich  $(\Omega_t, \mathfrak{F}_t) = (\Omega, \mathfrak{F}_t)$  und die  $Z_{\forall t} H_t : (\Omega, \mathfrak{F}) \rightarrow (\Omega, \mathfrak{F}_t)$  als Identität wählen. Dann ist  $Z_t$  genau dann  $\mathfrak{F}_t$ -meßbar, wenn  $Z_t = \zeta_t(H_t)$  mit einer meßbaren Funktion  $\zeta_t$  gilt. Die Voraussetzung einer solchen beliebigen  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{F}_t$  auf  $\Omega_t$  scheint sich aber hier nicht zu lohnen.  $\square$

Eine zu (1.1) analoge Darstellung läßt sich auch für die anderen Preisprozesse angeben, wenn man die sogenannten *Renditen*  $R_t^k$  einführt gemäß

$$(1.4) \quad R_t^k := (S_t^k - S_{t-1}^k) / S_{t-1}^k = \Delta S_t^k / S_{t-1}^k > -1, \quad 1 \leq k \leq d, \quad R_t := (R_t^1, \dots, R_t^d), \quad 1 \leq t \leq T.$$

Dabei schreiben wir stets  $\Delta Z_t := Z_t - Z_{t-1}$  für einen vektorwertigen Prozeß  $\{Z_t\}$ . Die Einführung der Rendite erlaubt die zu (1.1) analoge Darstellung:

$$(1.5) \quad S_t^k = S_{t-1}^k \cdot (1 + R_t^k) = S_0^k \cdot (1 + R_1^k) \cdot \dots \cdot (1 + R_t^k), \quad t \geq 1.$$

**1.6 Bemerkung:** Die Beziehung (1.5) ist gerade die Darstellung des positiven Prozesses  $\{S_t^k\}$  als sogenanntes (hier diskretes) *stochastisches Exponential*. Der Name resultiert aus der Gleichung:  $\Delta S_t^k = S_{t-1}^k \cdot R_t^k$ . Führt man zu  $\{R_t^k\}$  den kumulativen Prozeß  $\Sigma_t^k := \Sigma_t(R^k) := \sum_{n=1}^t R_n^k$  ein, so erhält man die Beziehung:  $\Delta S_t^k = S_{t-1}^k \cdot \Delta \Sigma_t^k$ , die eine Analogie zur Differential-

gleichung der Exponentialfunktion aufweist. Tatsächlich ist der Zusammenhang noch tiefer. Man schreibt auch:  $S_t^k = S_0^k \cdot \xi_t(\Sigma)$  mit  $\xi_t(\Sigma) = \prod_{n=1}^t (1 + \Delta \Sigma_n)$ .  $\square$

Eine mögliche Wahl von  $H_t$  wäre  $H_t = (B_1, S_1, \dots, B_t, S_t)$  oder  $H_t = (r_1, R_1, \dots, r_t, R_t)$ . Die letztere Wahl ist dann zweckmäßig, wenn wie oft die Zva  $(r_1, R_1), \dots, (r_T, R_T)$  als unabhängig vorausgesetzt werden. Für ein kanonisches Modell würde man  $\Omega = (-1, \infty)^{1+d} \times \dots \times (-1, \infty)^{1+d}$  (T Faktoren) und  $(r_t, R_t)$  als Projektion auf den t-Faktor  $(-1, \infty)^{1+d}$  wählen. Im Falle der Unabhängigkeit könnte P als Produktmaß gewählt werden (vgl. auch 1.32).

Investitionen können gemäß eines Portfolioplanes vorgenommen werden:

**1.7 Definition.** Ein **Portfolioplan**  $\xi \in \Xi$  ist gegeben durch einen adaptierten  $\mathbb{R}^d$ -wertigen Prozeß  $\xi = \{\xi_0, \dots, \xi_{T-1}\}$  mit  $\xi_t = (\xi_t^1, \dots, \xi_t^d)$ . Ein (signierter) **Konsumplan** ist durch einen reellwertigen adaptierten Prozeß  $c = \{c_1, \dots, c_T\}$  gegeben. Ein **Portfolio- und Konsumplan** wird dann durch das Tupel  $(\xi, c)$  beschrieben und soll kurz als **Plan** bezeichnet werden.

Dabei bezeichnet  $\xi_t^k \in \mathbb{R}$  die Anteile, die der Investor z.Zt. t (nach einer möglichen Umschichtung) hält. Die Adaptiertheit bedeutet, daß  $\xi_t$  sich schreiben läßt als  $\xi_t = \delta_t(H_t)$ . Der Investor kann also nach Beobachtung von  $H_t$  über die Umschichtung seines Portfolios und seinen Konsum entscheiden. Einerseits kann er also alle verfügbaren Informationen ausnutzen, andererseits ist er kein Hellseher und kann keine zukünftigen Entwicklungen für seine Entscheidung benutzen. Dabei wird i.a. zugelassen, daß der Konsum negativ sein kann, als Geld zugeschossen wird. Gibt man das *Anfangsvermögen* oder die *Anfangsinvestition*  $x$  vor, so ist der Stand auf dem Sparbuch z.Z. t bestimmt durch  $\eta_t$  und  $\eta_t$  wiederum durch die *Budgetgleichungen*:

$$(1.8) \quad \eta_0 + \xi_0^T \cdot S_0 = x, \quad \eta_t B_t + \xi_t^T \cdot S_t = \eta_{t-1} B_t + \xi_{t-1}^T \cdot S_t - c_t, \quad 1 \leq t < T.$$

Für das Sparbuch bezeichnet  $\eta_t$  also den *Gegenwartswert*, d.h. den auf den Zeitpunkt  $t=0$  diskontierten Euro-Betrag (der tatsächliche Wert ist  $\eta_t B_t$ ); dadurch erreicht man für die Anlage 0 eine parallele Beschreibung zu den risikobehafteten Anlagen  $1, \dots, d$ . In (1.8) beschreibt  $\eta_{t-1} B_t + \xi_{t-1}^T S_{t-1}$  den Wert des Portfolios vor einer Umschichtung und vor einem Konsum, während  $\eta_t B_t + \xi_t^T S_t$  den Wert nach der Umschichtung und dem etwaigen Konsum beschreibt.

**1.9 Definition.**  $\{V_t^{\xi, c}(x), 0 \leq t \leq T\}$  ist der **Wertprozeß** zum Plan  $(\xi, c)$  mit

$$(1.10) \quad V_t^{\xi, c}(x) := \eta_{t-1} B_t + \xi_{t-1}^T \cdot S_t - c_t, \quad 1 \leq t \leq T, \quad V_0^{\xi, c}(x) = x, \text{ also:} \\ V_t^{\xi, c}(x) := \eta_t B_t + \xi_t^T \cdot S_t, \quad 0 \leq t < T,$$

wobei  $\eta_t$  jeweils durch (1.8) festgelegt wird. Ein Portfolioplan  $\xi$  beschreibt einen **selbstfinanzierenden** Plan mit Wertprozeß  $\{V_t^{\xi}(x), 0 \leq t \leq T\}$ , wenn (1.8) und (1.10) für  $c_t = 0, 1 \leq t \leq T$ , gelten.

**1.11 Lemma.**  $\Delta V_t^{\xi, c}(x) = \eta_{t-1}^\top \cdot \Delta B_t + \xi_{t-1}^\top \cdot \Delta S_t - c_t \cdot$

**Beweis.**  $\eta_{t-1} \cdot \Delta B_t + \xi_{t-1}^\top \cdot \Delta S_t = (\eta_{t-1} \cdot B_t + \xi_{t-1}^\top \cdot S_t) - (\eta_{t-1} \cdot B_{t-1} + \xi_{t-1}^\top \cdot S_{t-1})$   
 $= c_t + \Delta V_t^{\xi, c}(x) \cdot \square$

**1.12 Lemma.** Die folgenden Aussagen sind äquivalent für einen Plan  $(\xi, c)$ :

- (i)  $c_t = 0, 1 \leq t \leq T$ , also  $\xi$  bestimmt einen selbstfinanzierenden Plan;
- (ii)  $\eta_{t-1} \cdot B_t + \xi_{t-1}^\top \cdot S_t = \eta_t \cdot B_t + \xi_t^\top \cdot S_t, \quad V_T^{\xi, c}(x) = \eta_{T-1} \cdot B_T + \xi_{T-1}^\top \cdot S_T$ .
- (iii)  $\Delta V_t^{\xi, c}(x) = \eta_{t-1} \cdot \Delta B_{t-1} + \xi_{t-1}^\top \cdot \Delta S_t =: \Delta V_t^{\xi}(x)$ ;
- (iv)  $V_t^{\xi, c}(x) = x + \sum_{m=1}^t (\eta_{m-1} \cdot \Delta B_{m-1} + \xi_{m-1}^\top \cdot \Delta S_m) =: V_t^{\xi}(x)$ .

Der Beweis ist sehr einfach.

**1.13 Definition** Es heißen  $\check{S}_t = (S_t^1/B_t, \dots, S_t^d/B_t)$  der **diskontierte Preisprozeß** und  $\check{V}_t^{\xi, c}(x) := V_t/B_t$  der **diskontierte Wertprozeß**. Ferner seien  $\{\check{R}^k\}$  die Renditen zu  $\{\check{S}^k\}$ , also:

$$\check{S}_t^k = \check{S}_{t-1}^k \cdot (1 + \check{R}_t^k) = S_0^k \cdot (1 + \check{R}_1^k) \cdot \dots \cdot (1 + \check{R}_t^k), t \geq 1.$$

Es beschreibe  $(x, \xi) \in \mathbb{R} \times \Xi$  stets einen selbst- finanzierenden Portfolioplan  $\xi$  mit einer Anfangsinvestition  $x$ . Im Fall  $d=1$  können wir  $S_t$  und  $S_t^1$  sowie  $\xi_t$  und  $\xi_t^1$  identifizieren.

Es wird hier also eine Diskontierung durch den Preisprozeß des 0-ten Wertpapiers vorgenommen; d.h. das Sparbuch wird als *Numeraire* benutzt. Dies ist die gewohnte Diskontierung. Es gilt wegen

$$B_0 = 1: \quad \check{V}_0^{\xi, c}(x) = x, \quad \check{S}_0 = S_0.$$

Nun kann eine Reduktion auf den Fall  $B_t \equiv 1$  [also gemäß (1.1) auf den Fall  $r_t = 0$ ] vorgenommen werden. Dazu das

**1.14 Reduktionslemma.** Für  $(x, \xi) \in \mathbb{R} \times \Xi$  gilt für  $0 < t \leq T$ :

$$\Delta \check{V}_t^{\xi}(x) = \xi_{t-1}^\top \cdot \Delta \check{S}_t, \quad \text{d.h.,} \quad \check{V}_t^{\xi}(x) = x + \sum_{m=1}^t \xi_{m-1}^\top \cdot \Delta \check{S}_m \quad .$$

**Beweis.** Für einen beliebigen Plan  $(x, c)$  und  $\check{V}_t := \check{V}_t^{\xi, c}(x)$  gilt;

$$\check{V}_t = [\eta_{t-1} \cdot B_t + \xi_{t-1}^\top \cdot S_t - c_t] / B_t = \eta_{t-1} + \xi_{t-1}^\top \cdot \check{S}_t - c_t / B_t \quad \text{und}$$

$$\check{V}_{t-1} = [\eta_{t-1} \cdot B_{t-1} + \xi_{t-1}^\top \cdot S_{t-1}] / B_{t-1} = \eta_{t-1} + \xi_{t-1}^\top \cdot \check{S}_{t-1},$$

also:  $\check{V}_t - \check{V}_{t-1} = \xi_{t-1}^\top \cdot \Delta \check{S}_t$  bei  $c_t = 0$ .  $\square$

Durch die Diskontierung hat man wegen  $\check{B}_t := B_t/B_t \equiv 1$  gerade die Reduktion auf  $B_t \equiv 1$  erreicht.

Offenbar hat  $\check{V}_t^\xi(x)$  die gleiche Gestalt wie  $V_t^\xi(x)$  in 1.12 (iv) mit  $\Delta\check{S}$  anstelle von  $\Delta S$  und  $\Delta\check{B} \equiv 0$  anstelle von  $\Delta B$ . Ist man also an dem diskontierten Wertprozeß interessiert, so kann man auch mit  $\check{S}_t$  und  $\check{B}_t$  arbeiten. Aufgrund dieses Reduktionslemmas wird in vielen Arbeiten von vornherein angenommen, daß die Zinssätze gleich 0 sind, also das (eventuell negative) Guthaben auf dem Sparbuch nicht verzinst wird.

Wir schreiben  $\{G_t\}$  für den *Gewinnprozeß* in einem diskontierten Modell, d.h. in einem Modell mit  $S_t = (\check{S}_t)$ :

$$(1.15) \quad G_t := G_t(\xi) := \sum_{m=1}^t \xi_{m-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_m, \quad \xi \in \Xi, 0 \leq t \leq T.$$

Der Ausdruck  $\sum_{m=1}^t \xi_{m-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_m$  kann als ein zeitdiskretes stochastisches Integral  $\int_0^t \xi \, d\check{S}$  angesehen werden. Wegen 1.14 gilt also:

$$(1.16) \quad \check{V}_t^\xi(x) = x + G_t(\xi), \text{ d.h. } V_t^\xi(x) = B_t \cdot [x + G_t(\xi)] \text{ für } (x, \xi) \in \mathbb{R} \times \Xi.$$

Es soll noch die Verallgemeinerung auf nicht notwendig selbstfinanzierende Pläne notiert werden, die sich aus dem Beweis von 1.14 ergibt:

$$1.17 \text{ Lemma } \check{V}_t^{\xi, c}(x) + c_t/B_t = \check{V}_{t-1}^{\xi, c}(x) + \xi_{t-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_t \text{ für einen Plan } (\xi, c).$$

### 1.18 Beispiel. Nullkuponanlagen

Die 0-te Anlagemöglichkeit beschreibe wieder die Anlage auf dem Sparbuch mit dem kurzfristigen Zinssatz.

$$(1.18a) \quad B_t = \prod_{m=1}^t (1+r_m).$$

Dabei ist  $r_t$  also der Zinssatz in  $[t-1, t)$  und wird als zufallsabhängig angesehen; es soll  $r_t$  aber in  $t-1$  bekannt sein, also nur von der Entwicklung bis  $t-1$  abhängen, d.h.

$$(1.18b) \quad r_t =: r_t(H_{t-1}), \quad t > 0, \text{ und } r_1 \text{ ist deterministisch.}$$

Eine *Nullkuponanleihe mit Fälligkeitsdatum*  $\tau$  ( $\tau$ -Bond) ist ein Titel, der das Recht auf 1 Euro z.Zt.  $\tau$  gibt. Der Preis dafür z.Zt.  $t$  sei  $p(t, \tau)$ . Die *Zinsstruktur (term structure)* z.Zt. 0 ist gegeben durch die *initiale Zinskurve*  $\tau \mapsto p(0, \tau)$ . Dabei können die  $p(0, \tau)$  als Diskontierungsfaktoren aufgefaßt werden. Kauft man z.Zt.  $t$  etwa  $x$   $\tau$ -Bonds,  $t < \tau \leq T$ , zu einem Preis  $x \cdot p(t, \tau)$  bei einem Kurs  $p(t, \tau)$ , so erhält man z.Zt.  $\tau$  gerade  $x$  Euro; dabei ist

$$(1.18c) \quad p(t, t) = 1, \quad p(t, t+1) = \frac{1}{1 + r_t}.$$

Der Einfachheit nehmen wir an, daß Anlagen mit einem Fälligkeitstermin  $\tau < T$  nach  $\tau$  mit der kurzfristigen Zinsrate weiterverzinst werden.

Wir fassen einen  $\tau$ -Bond als Wertpapier auf mit Index  $\tau$  und setzen

$$(1.18d) \quad S_t^\tau := p(t, \tau), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad S_t^\tau := \prod_{m=\tau+1}^t (1 + r_m), \quad \tau \leq t \leq T, \text{ d.h.}$$

$$S_t^\tau := p(t, \tau) \cdot \prod_{m=\tau+1}^t (1 + r_m), \quad 0 \leq t \leq T, \text{ mit } p(t, \tau) := 1 \text{ f\u00fcr } t \geq \tau.$$

$$(1.18e) \quad S_t := (S_t^1, \dots, S_t^T).$$

Kauft man also z.Zt.  $t$  etwa  $x$   $\tau$ -Bonds, so zahlt man  $x \cdot S_t^\tau$  und hat z.Zt.  $n > t$  dann  $x \cdot S_n^\tau$  Euro.

Bei der Modellierung des Preisprozesses  $S_t^\tau$  durch einen stochastischen Proze\u00df mu\u00df man also einen "Br\u00fcckenproze\u00df" konstruieren, bei dem der Anfangswert  $S_0^\tau = p(0, \tau)$  und der Endwert  $S_T^\tau = p(T, \tau) = 1$  vorgegeben sind. Die Endbedingung  $p(T, \tau) = 1$  schafft auch eine Kopplung zwischen den Preisprozessen  $(S_t^\tau)$ ,  $1 \leq \tau \leq T$ . Darauf soll sp\u00e4ter eingegangen werden.  $\square$

Im Mittelpunkt wird die *Bewertung von Derivaten* stehen. Dies sind Vertr\u00e4ge, die einen *Zahlungsstrom*  $\{X_t, 1 \leq t \leq T\}$  zusichern, der sich aus der Kursentwicklung  $\{S_t\}$  herleiten l\u00e4\u00dft in der Weise, da\u00df etwa  $X_t = \psi_t(S_0, \dots, S_t)$  gilt. Dabei sei  $\Delta X_t$  die Zahlung in  $t$  und  $X_t$  die Gesamtzahlung in  $1, \dots, t$ . Allgemeiner und einfacher soll der Zahlungsstrom durch Abbildungen beschrieben werden:

$$\psi_t : \Omega_t \mapsto \mathbb{R} \text{ mit } X_t = \psi_t(H_t).$$

F\u00fcr diesen Vertrag mu\u00df z. Zt. 0 eine *Pr\u00e4mie* (ein *Preis*) bezahlt werden, die gerade die Bewertung des Finanztitels darstellt. In der Regel setzt sich diese Pr\u00e4mie additiv aus Pr\u00e4mien f\u00fcr die einzelnen Zahlungen  $X_t$  zusammen. Deshalb gen\u00fcgt es f\u00fcr einen gro\u00dfen Teil der Theorie, sich auf eine einzige Zahlung zu beschr\u00e4nken, also auf den Fall:

$$X_t = 0 \text{ f\u00fcr } t < T, \quad X_T =: X.$$

**1.19 Definition.** Ein *Zahlungsanspruch* (contingent claim) ist eine Zva  $X$  auf  $(\Omega, P)$ .

Bei Optionen z.B. wird dieser Zahlungsanspruch  $X$  in jedem Fall nichtnegativ sein, soda\u00df der Vertragsunterzeichner (K\u00e4ufer) also ohne die Pr\u00e4mie in jedem Fall einen Gewinn erzielen w\u00fcrde. Im *klassischen Fall* w\u00fcrde  $E[X/B_T]$  als faire Pr\u00e4mie angesehen werden – unabh\u00e4ngig von der hier vorliegenden Situation eines Finanzmarktes.

Hier kann aber eine andere Antwort gegeben werden. Dazu betrachten wir die folgende Situation: Es sei  $d=1$ . Wenn der Verk\u00e4ufer z.Zt.  $t$  durch einen Vertrag eine Zahlung  $X = a \cdot S_T$  zusichert, so ist  $a \cdot S_0$  eine faire Pr\u00e4mie; denn offenbar kann der Verk\u00e4ufer die Pr\u00e4mie von  $a \cdot S_0$  sofort in das Wertpapier investieren und hat dann z. Zt.  $T$  den auszahlenden Betrag  $X = a \cdot S_T$  zur Verf\u00fcgung.

Wir k\u00f6nnen auch 1.14 heranziehen. Mit  $x = a \cdot S_0 = a \cdot \check{S}_0$ ,  $\xi_t \equiv a$  gilt gerade:

$$x + G_T = a \cdot \check{S}_0 + \sum_{m=1}^T a \cdot \Delta \check{S}_m = a \cdot \check{S}_T = X/B_T, \text{ also } V_T^\xi(x) = X.$$

Der Verkäufer geht dann also kein Risiko ein. Ebenso kann der Käufer anstelle des Vertrages selbst  $a \cdot S_0$  z.Zt. 0 in das kursabhängige Wertpapier investieren. In dem Sinn sind also die Prämie und der Vertrag gleichwertig. Dies gilt noch in allgemeineren Situationen.

**1.20 Definition.** Ein Zahlungsanspruch  $X$  heißt **erreichbar** (attainable) oder **duplizierbar** [durch  $(x, \xi) \in \mathbb{R} \times \Xi$ ], wenn gilt:  $V_T^\xi(x) = X$ , d.h.  $x + G_T(\xi) = \check{X} := X/B_T$ , für einen selbstfinanzierenden Plan  $\xi$  mit Anfangsinvestition  $x \in \mathbb{R}$ .

**1.21 Bemerkung.** Ein Zahlungsstrom  $\{X_t, 1 \leq t \leq T\}$  heißt erreichbar, wenn ein  $x \in \mathbb{R}$  und ein Plan  $(\xi, c)$  existiert mit  $V_T^{\xi, c}(x) = 0$  und  $c_t = \Delta X_t$ ,  $t = 1, \dots, T$ . Es ist leicht zu sehen, daß die beiden Definition konsistent sind; d.h. ein Zahlungsanspruch  $X$  ist genau dann erreichbar, wenn der Zahlungsstrom  $(X_1, \dots, X_T) = (0, \dots, 0, X)$  erreichbar ist.  $\square$

**1.22 Definition.** In der Situation  $V_T^\xi(x) = X$  ist  $x$  eine **faire Prämie** für den Zahlungsanspruch  $X$ .

In der Situation von 1.22 kann sich der Verkäufer nämlich gegen den Zahlungsanspruch  $X$  absichern (hedging), indem sie die Prämie  $x$  benutzt, um gemäß  $(x, \xi)$  zu investieren. Dann hat er z. Zt  $T$  den Betrag  $V_T^\xi(x) = X$  zur Verfügung. Das gleiche kann jeder andere Marktteilnehmer tun. Im nächsten §2 wird in einem speziellen Modell gezeigt, daß jeder Zahlungsanspruch erreichbar ist und somit vollständig abgesichert werden kann.  $X$  kann i.a. durch mehrere Pläne erreichbar sein. Dann ist die faire Prämie eindeutig bestimmt [bei Arbitragefreiheit vgl. 1.17 und 1.20]. Entsprechendes gilt für einen erreichbaren Zahlungsstrom.

**1.23 Beispiel. Bewertung von Optionen.** Es sei  $d=1$ . Eine *europäische (Kauf-) Option* [call option] ist ein Vertrag, der dem Käufer das Recht einräumt, zum *Fälligkeitstermin*  $T$  (maturity time, exercise time) für einen festen *Wahrnehmungs- / Basispreis*  $K$  (exercise/striking price), unabhängig von dem vorliegenden Kurs  $S_T$ ,  $a$  Anteile des Wertpapiers zu kaufen, z.B.  $K = a \cdot S_0$ . Dann ist der Gewinn des Käufers und damit der Verlust des Verkäufers

$$X := \psi(S_T) := [a \cdot S_T - K]^+.$$

Es ist also günstig für den Käufer, wenn der Kurs steigt; es ist günstig für die Bank, wenn der Kurs fällt. Um den Verlust bei steigendem Kurs abzusichern (hedging), kann die Bank selbst Wertpapiere kaufen. Dadurch kann es auch günstig für den Verkäufer werden, wenn der Kurs steigt.  $\square$

Eine naheliegende Forderung an den Markt ist der Ausschluß von sogenannten Arbitragemöglichkeiten; nur so kann eine Stabilität des Marktes vorliegen.

**1.24 Definition.** Eine *Arbitragemöglichkeit* ist gegeben, falls ein  $(x, \xi) \in \mathbb{R} \times \Xi$  existiert, sodaß gilt: (i)  $x = 0$ , (ii)  $V_T^\xi(x) \geq 0$ , (iii)  $V_T^\xi(x)(\omega) > 0$  für (mindestens) ein  $\omega$ .  
Liegt keine Arbitragemöglichkeit vor, so heißt der Markt **arbitragefrei**.

Kein Marktteilnehmer hat die Möglichkeit, Gewinne zu realisieren, ohne ein Risiko einzugehen. Wenn für  $\xi$  die Chance besteht, daß  $V_T^\xi(0) > 0$  ist, so muß auch die Chance bestehen, daß  $V_T^\xi(0) < 0$  ist. Andernfalls würde jeder Marktteilnehmer eine solche Arbitragemöglichkeit ergreifen und der Markt könnte nicht mehr im Gleichgewicht bleiben. Arbitragemöglichkeiten können bereits im diskontierten Modell erkannt werden. Wegen  $\check{V}_T^\xi(x) = x + G_T(\xi) = V_T^\xi(x)/B_T$  mit  $B_T > 0$  gilt offenbar:

**1.25 Lemma.** Eine Arbitragemöglichkeit ist genau dann gegeben, falls ein  $\xi \in \Xi$  existiert mit  $G_T(\xi) \geq 0$  und  $G_T(\xi)(\omega) > 0$  für ein  $\omega$ .

**1.26 Beispiel.** Eine Arbitragemöglichkeit liegt vor, wenn die Rendite einer Anlage in einem Zeitpunkt stets über der einer anderen liegt, also etwa  $R_t \geq r_t$ ,  $R_t \neq r_t$  gilt. Dazu betrachten wir den Fall  $d=1$ . Der Einfachheit halber schreiben wir  $S_t(\omega_t) := S_t(\omega)$  für  $\omega_t = H(\omega)$  und entsprechend für andere adaptierte Prozesse (vgl. 1.31). Ferner können wir schreiben:  $H_{t-1} = h_t(H_t)$  für eine gewisse Funktion  $h_t$ . Dann liegt eine Arbitragemöglichkeit vor, wenn für ein  $t \geq 1$  und ein  $\omega_t^*$  die folgende Situation vorliegt. Dabei sei  $\omega_{t-1}^* = h_t(\omega_t^*)$  die durch  $\omega_t^*$  festgelegte Vorgeschichte; ferner betrachten wir alle  $\omega_t$  mit der gleichen Vorgeschichte  $\omega_{t-1}^*$ , also mit  $\omega_{t-1}^* = h_t(\omega_t)$ . Nun sei:

$$R_t(\omega_t) \geq r_t(\omega_t) \quad \forall \omega_t \in \Omega_t \text{ mit } \omega_{t-1}^* = h_t(\omega_t) \text{ [bzw. "≤"]}$$

$$R_t(\omega_t^*) \geq r_t(\omega_t^*) \quad \text{[bzw. "<"]};$$

d.h.:

$$\check{S}_t(\omega_t) \geq \check{S}_{t-1}(\omega_{t-1}^*) \quad \forall \omega_t \in \Omega_t \text{ mit } \omega_{t-1}^* = h_t(\omega_t) \text{ [bzw. "≤"]}$$

$$\check{S}_t(\omega_t^*) > \check{S}_{t-1}(\omega_{t-1}^*) \quad \text{[bzw. "<"]}.$$

Einen Plan kann man nun so wählen, daß man z.Zt.  $t-1$  bei Vorliegen von  $\omega_{t-1}^*$  einen Anteil des Wertpapiers kauft und dafür Geld (Euro) leiht. Sonst wird nicht in das Wertpapier investiert. (Ab  $t$  wird dann alles in Euro angelegt.) Setze also  $\xi_{t-1} := 1_{A_{t-1}}$  und  $\xi_m = 0$  sonst mit

$A_m := \{H_m = \omega_m^*\}$ ; dann gilt:

$$G_T = \sum_{m=1}^T \xi_{m-1} \cdot \Delta \check{S}_m = 1_{A_{t-1}} \cdot \Delta \check{S}_t \geq 0 \text{ und } > 0 \text{ auf } A_t \neq \emptyset.$$

Nach 1.25 liegt also eine Arbitragemöglichkeit vor.  $\square$

**1.27 Gesetz des einen Preises.** Ist der Markt arbitragefrei, so ist die faire Prämie für erreichbare Zahlungsansprüche eindeutig bestimmt, d.h. unabhängig von der Wahl des (duplizierenden) Plans.



**Beweis:** Sei  $X/B_T = x + G_T(\xi) = \tilde{x} + G_T(\tilde{\xi})$ . Z.z. ist:  $x = \tilde{x}$ .

Wäre etwa  $x < \tilde{x}$ , so setzen wir  $\alpha := \tilde{x} - x > 0$ . Dann folgt:

$$0 = x - \tilde{x} + G_T(\xi) - G_T(\tilde{\xi}), \text{ also: } G_T(\xi - \tilde{\xi}) = \alpha > 0.$$

Also würde  $\xi - \tilde{\xi} := (\xi_t - \tilde{\xi}_t, 0 \leq t < T)$  eine Arbitragemöglichkeit bieten.  $\square$

### 1.28 Beispiel. Verkaufsoptionen (put options) .

Sei wieder o.E.  $d = 1$ . Hier werden Verträge betrachtet, bei denen dem Käufer der Option das Recht eingeräumt wird, zum Fälligkeitstermin  $T$  für einen festen Basispreis  $K$  unabhängig vom vorliegenden Kurs  $S_T$   $a$  Anteile des Wertpapiers zu verkaufen. Bei Optionen hat der Käufer wieder ein Wahlrecht; er kann die Option verfallen lassen. Dann ist der Verlust des Verkäufers und der Gewinn des Käufers  $X = (K - a \cdot S_T)^+$ .

**1.29 Beispiel. Termingeschäfte (Forward-Kontrakte).** Sei o.E.  $d=1$ . Bei Termingeschäften muß das Wertpapier in jedem Fall zum festgesetzten Preis gekauft bzw. verkauft werden. Hier ist der Gewinn des Käufers des Kontraktes

$$X = a \cdot S_T - K \text{ bzw. } X = K - a \cdot S_T.$$

Dieser Zahlungsanspruch ist offenbar immer erreichbar. Im Fall  $X = a \cdot S_T - K$  gilt etwa:

$$X/B_T = [a \cdot S_0 - K/B_T] + [a \cdot \check{S}_T - a \cdot \check{S}_0] = [a \cdot S_0 - K/B_T] + \sum_1^T \xi_{t-1} \Delta \check{S}_t \text{ mit } \xi_t \equiv a. \text{ Also ist}$$

dann  $a \cdot S_0 - K/B_T$  (Preis z.Zt. 0 – Gegenwartswert vom festgesetzten Preis  $K$ ) die faire Prämie.

Betrachten wir speziell ein Devisentermingeschäft, bei dem in  $T$   $a$  Dollar zum festen Preis  $K$  gekauft werden können. Es beschreibe  $D_t$  den Dollarkurs. Es soll die Möglichkeit bestehen, die Dollar auf dem amerikanischen Markt zum dortigen Marktzinssatz  $r'$  anzulegen. Dann ist zu setzen:

$$S_t = (1+r')^t D_t, \quad a D_T = a_T S_T \text{ mit } a_T := a/(1+r')^T, \quad X = a \cdot D_T - K = a_T \cdot S_T - K.$$

Also ist jetzt  $a_T \cdot D_0 - K/(1+r)^T = a/(1+r')^T \cdot D_0 - K/(1+r)^T$  die faire Prämie.

Macht man noch den Ansatz  $K =: \gamma \cdot a \cdot D_0$ , so ist bei der Wahl von  $\gamma = (1+r)^T / (1+r')^T$  die faire Prämie gerade gleich Null. Dabei ist  $\gamma \cdot D_0$  der sogenannte *Terminkurs*, bei dem keine zusätzliche Prämie bezahlt werden muß. Ist der amerikanische Marktzins  $r'$  höher als  $r$ , gilt  $\gamma < 1$ .

Man kann sich das direkt überlegen:

Z.Zt.  $T$  hat der Verkäufer  $a$  \$, die er auf Grund des Vertrages zu einem Preis  $K$  verkaufen muß.

Er kann bereits z. Zt. 0 über  $K$  verfügen, indem er einen Kredit aufnimmt zu einem Preis von

$K(1+r)^{-t}$  Euro. Andererseits kann man auch z.Zt. 0 über die  $a$  \$ verfügen, indem man einen

Kredit über  $a$  \$ aufnimmt. Dieser Kredit kostet  $a(1+r')^{-t}$  \$ =  $a \cdot D_0(1+r')^{-t}$  Euro.

Ein faire Prämie für diesen Vertrag ist also gerade:  $a \cdot D_0(1+r)^{-t} - K(1+r)^{-t}$ .  $\square$

Im nächsten Paragraphen betrachten wir die folgende Situation:

**1.30 Definition.** Ein Markt heißt **vollständig**, wenn jeder Zahlungsanspruch erreichbar ist.

In einem arbitragefreien und vollständigen Markt existiert also nach 1.22 und 1.23 zu jedem Derivat mit einem beliebigen Zahlungsanspruch ein eindeutiger fairer Preis.

Für eine einfachere Darstellung präzisieren wir noch die folgende:

**1.31 Konvention.** Ist  $\{Z_t\}$  ein  $d$ -dimensionaler adaptierter stochastischer Prozeß, so gilt  $Z_t = \zeta_t(H_t)$ , also

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{H_t} & \Omega_t \\ & \searrow Z_t & \downarrow \zeta_t \\ & & \mathbb{R}^d \end{array} .$$

Dann bezeichnen wir  $\zeta_t$  auch oft mit  $Z_t$ , wir schreiben also  $Z(\omega_t) = Z(\omega)$  für  $\omega_t = H_t(\omega)$ .  $\square$

Bei der Modellierung von stochastischen Finanzmärkten verwendet man oft den folgenden Ansatz:

**1.32 Typische Situation:** Es ist  $\Omega_t = E^t$  und  $\Omega = \Omega_T$  für einen (hier endlichen) Raum  $E$ . Bezeichnet dann  $I_t : \Omega \rightarrow E$  die  $t$ -te Projektion, so kann  $I_t$  als die Information interpretiert werden, die man in  $t$  neu erhält. Dann setzt man  $H_t = (I_1, \dots, I_t) = (H_{t-1}, I_t)$ .  $\square$

In der Situation 1.32 bedeutet die Konvention 1.31 gerade, daß man  $Z_t(i_1, \dots, i_t)$  schreibt, wenn  $Z_t(i_1, \dots, i_T)$  nur von  $(i_1, \dots, i_t)$  abhängt.

## §2 Das Binomialmodell.

Es soll zunächst eine Beschränkung auf die diskontierten Größen vorgenommen werden. Dann beschreibt  $\check{S}$  die diskontierte Preisentwicklung des Wertpapiers.

Als erste Verallgemeinerung des deterministischen Falles sieht die **Modellannahme** vor, daß die Renditen durch Zahlen  $0 < d < 1 < u < \infty$  beschrieben wird, so daß gilt:

$$1 + \check{R}_t \in \{d, u\}, \text{ [d wie "down", u wie "up"]}.$$

Es soll also ein Modell betrachtet werden, in dem sich der (diskontierte) Kurs nur um einen Faktor  $d$  nach unten oder um einen Faktor  $u$  nach oben bewegen kann. In den Fällen " $1 \leq d < u$ " und " $d < u \leq 1$ " ergäben sich Arbitragemöglichkeiten gemäß 1.26.

### Das 1-Perioden-Modell:

Es sei  $T=1$ ,  $\Omega = \{d, u\}$ ,  $S_0 > 0$  gegeben,  $\check{S}_1(i) = i \cdot S_0$ ,  $\omega \in \Omega$ . Es wird kein  $W$ -Maß vorausgesetzt.  $\check{X}$  sei der (diskontierte) Zahlungsanspruch zu einem Derivat, setze:

$$x_i := \check{X}(i) \text{ für } i \in \{d, u\}.$$

Es soll gezeigt werden, daß im vorliegenden Fall  $X$  stets erreichbar ist.

**2.1 Lemma.** *Das Gleichungssystem  $x + \xi \cdot [i \cdot S_0 - S_0] = x_i$ ,  $i \in \{d, u\}$ , in  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$  hat eine eindeutige Lösung; dabei ist:*

$$x = p_d x_d + p_u x_u, \quad \xi \cdot S_0 = (x_u - x_d) / (u - d), \text{ d.h.}$$

$$\xi = \delta := \delta \check{X} / \delta \check{S}_1 \text{ mit } \delta \check{X} := \check{X}(u) - \check{X}(d), \delta \check{S}_1 := \check{S}_1(u) - \check{S}_1(d),$$

$$p_d := \frac{u - 1}{u - d}, p_u := \frac{1 - d}{u - d}, \text{ und } 0 < p_i < 1, p_d + p_u = 1.$$

Dabei heißt  $\xi = \delta$  auch *Hedge-Ratio* und wird bei Optionen als *Delta* bezeichnet. Dieser Wert ist offenbar unabhängig von der Diskontierung wegen  $\delta X := X(u) - X(d) = (1+r_0) \cdot \delta \check{X}$  und  $\delta S_1 := S_1(u) - S_1(d) = (1+r_0) \cdot \delta \check{S}_1$ .

Würde  $\check{S}_1$  mehr als zwei Werte annehmen, so hätte man für die beiden Unbekannten  $x$  und  $\xi$  mehr als zwei Bestimmungsgleichungen. Der **Beweis** von 2.1 ist einfach.

$X$  ist also erreichbar durch  $(x, \xi)$ .

**2.2 Bemerkung.** Wählt man ein künstliches  $W$ -Maß  $P^*$  auf  $\Omega$  mit daß  $P^*[\{i\}] = p_i$ , so gilt:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} x &= E^*[X], \quad E^*[\check{S}_1] = S_0 \quad \text{wegen} \\ p_d \cdot d + p_u \cdot u &= 1. \end{aligned}$$

$P^*$  ist das einzige Maß mit  $E^*[\check{S}_1] = S_0$ .

In dem Fall  $x_d=0 < x_u$ , etwa bei  $\check{X} = [\check{S}_1 - \check{K}]^+$  mit  $d \cdot S_0 \leq \check{K} \leq u \cdot S_0$ , gilt:  $\xi \cdot S_0 > x$ ; zur Absicherung von  $X$  muß also zusätzlich Geld geliehen werden, um in das kursabhängige Wertpapier gemäß  $\xi$  zu investieren.  $\square$

### Das T-Perioden-Modell.

**Modell:** Es liege die typische Situation 1.32 vor mit  $E = \{d, u\}$ . Dabei sei  $1 + \check{R}_t(\omega) := I_t(\omega) = i_t$

für  $\omega = (i_1, \dots, i_T)$ ; sei  $S_0 > 0$  gegeben,  $\check{S}_t := I_t \cdot \dots \cdot I_1 \cdot S_0 = I_t \cdot \check{S}_{t-1}$ .

Es wird kein  $W$ -Maß vorausgesetzt.

$$\check{S}_{t-1}(\omega_{t-1}) \begin{cases} u \cdot \check{S}_{t-1}(\omega_{t-1}) = \check{S}_t(\omega_{t-1}, u) \\ d \cdot \check{S}_{t-1}(\omega_{t-1}) = \check{S}_t(\omega_{t-1}, d) \end{cases}$$

Es soll wieder gezeigt werden, daß jeder Zahlungsanspruch erreichbar ist.

**2.4 Lemma.** Zu  $\check{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  existieren  $(x, \xi) \in \mathbb{R} \times \Xi$ , sodaß gilt:

$$x + \sum_{t=1}^T \xi_{t-1} \cdot \Delta \check{S}_t = \check{X} \quad \text{auf } \Omega, \quad 1 \leq t < T.$$

Dabei ist

$$x = \sum_{\omega=(i_1, \dots, i_T) \in \Omega} p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_T} \cdot \check{X}(\omega) \quad \text{mit } p_i \text{ wie in 2.1.}$$

**Bew.** von 2.4. Wir verwenden wieder die Konvention 1.31 und konstruieren rekursiv die Werte

$\check{V}_t(\omega_t) = \check{V}_t^{\xi}(\omega_t)$  und die Investitionen  $\xi_t(\omega_t)$ . Setze  $\check{V}_T(\omega) := \check{X}(\omega)$ . Zu  $\omega_t, t < T$ , wähle rekursiv

$x = \check{V}_t(\omega_t)$  und  $\xi = \xi_t(\omega_t)$  gemäß 2.1 mit  $\check{S}_t(\omega_t)$  und  $\check{V}_{t+1}(\omega_t, i)$  statt  $S_0$  bzw.  $x_i$  als Lösung von

$$x + \xi \cdot [i \cdot \check{S}_t(\omega_t) - \check{S}_t(\omega_t)] = \left[ x + \xi \cdot \Delta \check{S}_{t+1}(\omega_t, i) = \right] \check{V}_{t+1}(\omega_t, i) \quad \text{für } i \in \{d, u\}.$$

Dann erhält man

$$\check{V}_t(\omega_t) + \xi_t(\omega_t) \cdot \Delta \check{S}_{t+1}(\omega_{t+1}) = \check{V}_{t+1}(\omega_{t+1}), \quad \omega_{t+1} \in \{(\omega_t, d), (\omega_t, u)\}.$$

Daraus ergibt sich mit  $x := \check{V}_0$ :

$$\check{V}_t + \sum_{m=t+1}^T \xi_{m-1} \cdot \Delta \check{S}_m = \check{X},$$

$$x + \sum_{m=1}^T \xi_{m-1} \cdot \Delta \check{S}_m = x + G_T(\xi) = \check{X}. \quad \square$$

Man bezeichnet  $\check{V}_t$  als den diskontierten Wert des Zahlungsanspruchs in  $t$ , denn man kann mit  $\check{V}_t$

und  $\xi$  offenbar  $\check{X}$  in den verbleibenden Perioden duplizieren. Mit Induktion erhält man dabei:

$$\begin{aligned}
\check{V}_t(\omega_t) &= \sum_{(i_{t+1}, \dots, i_T)} p_{i_{t+1}} \cdot p_{i_{t+2}} \cdot \dots \cdot p_{i_T} \cdot \check{X}(\omega_t, i_{t+1}, \dots, i_T), \\
(2.5) \quad \xi_t(\omega_t) &= \delta \check{V}_{t+1}(\omega_t) / \delta \check{S}_{t+1}(\omega_t) \text{ mit} \\
\delta \check{V}_{t+1}(\omega_t) &:= \check{V}_{t+1}(\omega_t, u) - \check{V}_{t+1}(\omega_t, d), \quad \delta \check{S}_{t+1}(\omega_t) := \check{S}_{t+1}(\omega_t, u) - \check{S}_{t+1}(\omega_t, d).
\end{aligned}$$

## 2.6 Darstellung von x:

$P^*$  sei ein künstliches W–Maß auf  $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega))$  mit  $P^*[\{(i_1, \dots, i_T)\}] = p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_T}$ , also

$$P^*[I_1 = i_1, \dots, I_T = i_T] = P^*[I_1 = i_1] \cdot \dots \cdot P^*[I_T = i_T] \quad \text{mit } P^*[I_t = i] = p_i.$$

In Hinblick auf die Binomialverteilung ist es günstiger, die  $I_t$  auch durch  $\{0,1\}$ –wertige Zva  $J_t$  zu beschreiben gemäß  $J_t = \mathbf{1}_{\{u\}}(I_t)$ .

Mit den  $(I_t)$  sind auch die  $J_t$ ,  $1 \leq t \leq T$ , unter  $P^*$  unabhängig und identisch verteilt, und man hat:

$$(2.6a) \quad J_t \sim b(1, p_u) \text{ (unter } P^*)$$

$$(2.6b) \quad \check{S}_t = I_t \cdot \check{S}_{t-1} = d \cdot \left(\frac{u}{d}\right)^{J_t} \cdot \check{S}_{t-1} \quad \text{oder} \quad \log I_t = \log d + \log(u/d) \cdot J_t.$$

Von der Beschreibung durch die Binomialverteilung werden wir noch Gebrauch machen. Unter  $P^*$  beschreibt der Prozeß eine sogenannte *geometrische Irrfahrt* (ein zeitdiskretes Analogon zur geometrischen Brownschen Bewegung). Dieser Name resultiert aus der Darstellung

$$\check{S}_t = S_0 \cdot \exp\left\{ \sum_{m=1}^t \log(I_m) \right\};$$

dabei bildet der Exponent als Summe von unabhängigen und identisch verteilten Zva ein Irrfahrt.

Unter  $P^*$  gilt:

- (i)  $x = E^*[\check{X}]$ ,
- (ii)  $E^*[\check{S}_{t+1} | H_t = \omega_t] = \check{S}_t(\omega_t)$ ,  $0 \leq t < T$ ,
- (iii)  $\check{V}_t(\omega_t) = E^*[\check{X} | H_t = \omega_t]$ .

$$\text{Dabei ist } E^*[Z|A] := \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) P^*[\{\omega\} | A] = \sum_{\omega \in A} Z(\omega) P^*(\omega) / P^*[A].$$

Die Eigenschaft (ii) besagt gerade, daß  $\{\check{S}_t, 0 \leq t \leq T\}$  ein *Martingal* ist.  $P^*$  heißt deswegen auch *Martingalmaß*. Der Beweis folgt leicht aus (2.3); es ist sogar das einzige Martingalmaß. Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß es nur eine Lösung  $(p_d, p_u)$  gibt mit  $p_d + p_u = 1$  und (2.3).

Wegen der Unabhängigkeit von  $H_t$  und  $(I_{t+1}, \dots, I_T)$  gilt ferner

$$E^*[\check{X} | H_t = \omega_t] = E^*[\check{X}(\omega_t, I_{t+1}, \dots, I_T) \cdot \mathbf{1}_{\{H_t = \omega_t\}}] / P^*[H_t = \omega_t] = E^*[\check{X}(\omega_t, I_{t+1}, \dots, I_T)]. \quad \square$$

Oft wird auch die Modellannahme mit einem W–Maß  $P$  formuliert, das wie  $P^*$  aussieht mit einem anderen Parameter  $p$  anstelle von  $P^*$ . Dann bedeutet der Wechsel von  $P$  gerade einen Wechsel vom Parameter  $p$  zu  $p^*$ . Offenbar wird dieses W–Maß  $P$  aber nicht benötigt.

Nun soll ein **beliebiger Zinssatz**  $r_o$  zugelassen werden. Es liege also die Situation (1.1) vor mit

$$r_m = r_o, \text{ also } B_t = (1 + r_o)^t.$$

Wir setzen hier  $S_t = \left[ = B_t \cdot \check{S}_t = (1+r_o)^t \cdot \check{S}_t \right] = (1+r_o) \cdot I_t \cdot S_{t-1}$ , also gilt:

$$S_t \in \{d \cdot (1+r_o) \cdot S_{t-1}, u \cdot (1+r_o) \cdot S_{t-1}\}, \text{ mit } d \cdot (1+r_o) < (1+r_o) < u \cdot (1+r_o).$$

$$S_{t-1}(\omega_{t-1}) \begin{cases} u \cdot (1+r_o) \cdot S_{t-1}(\omega_{t-1}) = S_t(\omega_{t-1}, u) \\ d \cdot (1+r_o) \cdot S_{t-1}(\omega_{t-1}) = S_t(\omega_{t-1}, d) \end{cases}$$

Gemäß 1.20 und 2.4 ist jeder Zahlungsanspruch erreichbar mit einer Anfangsinvestition  $x = E^*[X/B_T] = E^*[\check{X}]$ . Hängt  $X$  in komplizierter Weise von  $\omega$  ab wie bei sogenannten exotischen Optionen, so muß  $x$  über diesen Erwartungswert berechnet werden, der eine Summe mit  $2^T$  Summanden darstellt. Bei exotischen Optionen hat man oft eine Darstellung der Form  $X = f(\max_{1 \leq t \leq T} S_t)$ ,  $X = f(\min_{1 \leq t \leq T} S_t)$  oder  $X = f(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T S_t)$ .

Im Falle einer europäischen Kaufoption, also für  $X = (S_T - K)^+$  erhält man eine geschlossene Lösung. Aus 2.4 und 2.6 ergibt sich dabei

$$\check{X} = (\check{S}_T - \check{K})^+ := (S_T - K)^+ / B_T = x + G_T(\xi) \text{ mit } \check{K} := K/B_T$$

$$\text{für ein } (x, \xi) \in \mathbb{R} \times \Xi \text{ mit } x = E^*[(\check{S}_T - \check{K})^+].$$

Also ist  $X = (S_T - K)^+$  gemäß 1.20 erreichbar und somit  $x$  eine faire Prämie. Es folgt:

$$x = E^*[(\check{S}_T - \check{K})^+] = E^*[(\check{S}_T - \check{K}) \cdot \mathbf{1}_\Gamma] \text{ mit}$$

$$\Gamma := \{\check{S}_T > \check{K}\} = \{I_1 \cdot I_2 \cdot \dots \cdot I_T \cdot S_0 > \check{K}\} = \{\sum_{t=1}^T \log(I_t) > \log(\check{K}/S_0)\}.$$

Wegen  $\log(I_t) = \log(u/d) \cdot J_t + \log(d)$  gilt

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \Gamma &= \{ \log(u/d) \cdot \sum_{t=1}^T J_t + T \cdot \log(d) > \log(\check{K}/S_0) \} \\ &= \{ \sum_{t=1}^T [\log(u) \cdot J_t + \log(d) \cdot (1 - J_t)] > \log(\check{K}/S_0) \} = \{ \sum_{t=1}^T J_t > a \} \end{aligned}$$

mit

$$(2.8) \quad a = a_0(S_0) := (\log(K/S_0) - T \cdot \log(\{1+r_o\} \cdot d)) / \log(u/d).$$

Dabei ist gemäß (2.6a) die Zva  $\sum_{t=1}^T J_t$  unter  $P^*$   $b(T, p_u)$ -verteilt.

Sei  $p'_i := p_i \cdot i$  und  $P'$  ein weiteres  $W$ -Maß auf  $\Omega$  mit  $P'[\{(i_1, \dots, i_T)\}] = p'_{i_1} \cdot p'_{i_2} \cdot \dots \cdot p'_{i_T}$ . Dabei ist

$P'$  wegen (2.3) ein  $W$ -Maß. Unter  $P'$  ist dann  $\sum_{t=1}^T J_t$  entsprechend  $b(T, p')$ -verteilt, und es ergibt sich für  $x$  die Darstellung:

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{\omega=(i_1, \dots, i_T) \in \Gamma} p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_T} [i_1 \cdot i_2 \cdot \dots \cdot i_T \cdot S_0 - \check{K}] \\
&= S_0 \cdot \sum_{\omega \in \Gamma} p'_{i_1} \cdot p'_{i_2} \cdot \dots \cdot p'_{i_T} - \check{K} \cdot \sum_{\omega \in \Gamma} p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_T}, \text{ also} \\
(2.9) \quad x &= x(S_0, u, d, K, r_0) = S_0 \cdot P'[\Gamma] - \check{K} \cdot P^*[\Gamma] \\
&= S_0 \cdot \bar{\Phi}_{T, p'_u}(a) - K \cdot (1+r_0)^{-T} \cdot \bar{\Phi}_{T, p_u}(a)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
(2.10) \quad p_d &= \frac{u-d}{u-d} p_u = \frac{1-d}{u-d} p'_i := p_i \cdot i. \\
\bar{\Phi}_{T, p}(a) &:= \sum_{a < t \leq T} \binom{T}{t} p^t \cdot (1-p)^{T-t} = \bar{\Phi}_{T, p}([a]).
\end{aligned}$$

Dabei ist (2.9) die *Bewertungsformel für Optionen im Binomialmodell*;  $\Phi_{T, p} := 1 - \bar{\Phi}_{T, p}$  ist dabei gerade die Verteilungsfunktion zur Binomialverteilung  $b(T, p)$ .

Später können wir zeigen, daß im Falle  $1 + \check{R}_t \in [d, u]$  anstelle von  $1 + \check{R}_t \in \{d, u\}$  diese Bewertungsformel eine obere Schranke für einen Preis darstellt.

**2.11 Bemerkung.** Sei  $\check{V}_t$  der diskontierte Wert der Option wie im Beweis von 2.4, also  $x = \check{V}_0$ . Dann erhält man wie oben:

$$\check{V}_t = v_t(\check{S}_t) = \check{S}_t \cdot \bar{\Phi}_{T-t, p'_u}(a_t(\check{S}_t)) - K \cdot (1+r_0)^{t-T} \cdot \bar{\Phi}_{T-t, p_u}(a_t(\check{S}_t))$$

mit  $a_0(s)$  wie oben und allgemein

$$a_t(s) := (\log(K/s) - (T-t) \cdot \log(\{1+r_0\} \cdot d)) / \log(u/d).$$

Ferner ergibt sich für die Zahl  $\xi_t$ , die die Anzahl an Wertpapieranteilen zur Absicherung angibt und Hedge-Ratio oder Delta genannt wird, gemäß (2.5):

$$\xi_t = \delta_t := \delta \check{V}_{t+1} / \delta \check{S}_{t+1} = \delta v_{t+1} / \delta S_{t+1} = \frac{v_{t+1}(u \cdot \check{S}_t) - v_{t+1}(d \cdot \check{S}_t)}{u \cdot \check{S}_t - d \cdot \check{S}_t}.$$

Offenbar ist  $\delta_t$  ein Differenzenquotient; im zeitstetigen Fall hat man dann die partielle Ableitung.  $\square$

**2.12 Bemerkung.** Die Darstellung (2.9) und die Darstellung  $x = \xi_0 \cdot S_0 + \eta_0$  legen die Vermutung  $\xi_0 = \Phi_{T, p'_u}(a)$  ? nahe. Dies ist aber i.a. nicht richtig. Wir wollen dies für  $T=1$  und  $r_0=0$  untersuchen.

Gemäß 2.1 ist:  $\xi_0 = (x_u - x_d) / (u-d) S_0$ . In dem allein interessantesten Fall:  $d \cdot S_0 < K < u \cdot S_0$  ist  $x_d=0$  und  $x_u = u S_0 - K$ , also  $\xi_0 = (u - K/S_0) / (u-d)$ .

Andererseits ist wegen  $d < K/S_0 < u$ :  $0 < a < 1$ , also  $[a] = 0$  und  $\Phi_{1, p'_u}(0) = p'_u = (u - d \cdot u) / (u-d)$ .

Die Vermutung gilt also im Fall:  $K/S_0 = d \cdot u$ . Wir wissen aber nur:  $d < K/S_0 < u$  und  $d < d \cdot u < u$ .  $\square$

### Konvergenz gegen ein zeitstetiges Modell.

Nun soll die Periodenlänge, also die Zeitspanne zwischen zwei möglichen Aktionen, immer kürzer gewählt, der Fälligkeitstermin  $T \in \mathbb{R}$  aber konstant gehalten werden. [Im Zeitalter der Computermärkte werden die Periodenlängen tatsächlich immer kleiner.] Das Zeitintervall  $[0, T]$  wird in  $n$  Perioden der Länge  $T/n$  unterteilt. Wir erhalten ein zeitdiskretes  $n$ -Periodenmodell.

Dabei muß die Verzinsung für das Intervall  $[0, T]$  und damit  $\check{K}$  konstant bleiben. Wir setzen

$$(1 + r_0)^n = e^{rT}, \text{ also } \check{K} = K \cdot e^{-rT},$$

dann kann  $r \geq 0$  als die *Zinsrate für ein zeitstetiges Modell* interpretiert werdend.

Mit kleinerer Periodenlänge müssen auch kleinere Werte für die Sprunghöhen  $u$  und  $d$  angesetzt werden. Die richtige Wahl wird sich aus dem zentralen Grenzwertsatz ergeben. Sei

$$U := \log(u), \quad D := \log(d), \quad Y_n := \sum_{m=1}^n [U \cdot J_m + D \cdot (1 - J_m)];$$

Dann ergibt sich aus (2.7) [jetzt mit  $n$  statt  $T$ ]:

$$\Gamma =: \{Y_n > \log(\check{K}/S_0)\}, \quad \check{S}_n = S_0 \cdot \exp\{Y_n\}.$$

Gemäß (2.9) haben wir die folgende Darstellung für den fairen Preis  $x$ :

$$x = S_0 \cdot P'[Y_n > \log(\check{K}/S_0)] - \check{K} \cdot P^*[Y_n > \log(\check{K}/S_0)].$$

Unter  $P^*$  und  $P'$  sind die  $J_m$  unabhängig mit  $P^*[J_m = 1] = p_u = 1 - P^*[J_m = 0]$  bzw.  $P'[J_m = 1] = p'_u = 1 - P'[J_m = 0]$ . Somit ist  $Y_n$  Summe von unabhängigen, identisch verteilten  $Z_{va}$  unter  $P^*$  und unter  $P'$ . Wir spezialisieren jetzt noch weiter und wählen hier:

$$U = -D, \text{ also } d = \frac{1}{u}.$$

Wenn wir jetzt Verteilungskonvergenz von  $Y_n$  unter  $P'$  und  $P^*$  gegen eine Normalverteilung nachweisen können, so haben wir auch Konvergenz der Verteilungsfunktionen  $P'[Y_n \leq y]$  und  $P^*[Y_n \leq y]$  von  $Y_n$  für alle  $y \in \mathbb{R}$ . Damit erhalten wir auch den Grenzwert von  $x$ . Diese Verteilungskonvergenz wird hier mit Hilfe des Stetigkeitssatzes von Levy–Cramér jeweils über die Konvergenz der charakteristischen Funktion (CF)

$$\varphi_n^*(s) = E^*[\exp\{isY_n\}] = E^*[\exp\{is(U \cdot J_1 - U \cdot (1 - J_1))\}]^n$$

gezeigt werden. Es gilt

$$(2.13^*) \quad \text{Unter } P^* \text{ hat } Y_n \text{ die CF } \varphi_n^*(s) := (p_u \cdot e^{isU} + p_d \cdot e^{-isU})^n,$$

und entsprechend gilt:

$$(2.13') \quad \text{unter } P' \text{ hat } Y_n \text{ die CF } \varphi_n'(s) := (p'_u \cdot e^{isU} + p'_d \cdot e^{-isU})^n.$$

Dabei hat man nach (2.10):



$$p_u = (1 - e^{-U}) / (e^U - e^{-U}) =$$

$$\frac{U - \frac{1}{2}U^2 + o(U^2)}{2U + o(U^2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}U + o(U), \text{ wegen } \frac{1}{1+o(U)} = 1+o(U), \text{ also:}$$

$$p_u - p_d = 2p_u - 1 = -\frac{1}{2}U + o(U).$$

Es folgt:

$$\varphi_n^*(s) = \left[ p_u \cdot \left[ 1 + isU - \frac{1}{2}s^2U^2 + o(U^2) \right] + p_d \cdot \left[ 1 - isU - \frac{1}{2}s^2U^2 + o(U^2) \right] \right]^n$$

$$= \left[ 1 + isU \cdot (p_u - p_d) - \frac{1}{2}s^2U^2 + o(U^2) \right]^n = \left[ 1 - \frac{1}{2}isU^2 - \frac{1}{2}s^2U^2 + o(U^2) \right]^n.$$

Ein geeigneter Ansatz ist, daß  $U^2$  proportional zur Periodenlänge  $T/n$  ist. Wir wählen :

$$(2.14) \quad U^2 = \sigma^2 \cdot \frac{T}{n},$$

Dabei ist  $\sigma$  ein Maß für die Fluktuationen des Kurses. Je kleiner die Periodenlänge ist, desto weniger gravierend ist übrigens die Beschränkung für  $S_t$  auf zwei Werte bei geg.  $S_{t-1}$ . Dann ergibt sich

$$\varphi_n^*(s) = \left[ 1 - \frac{1}{2}(is + s^2) \cdot \sigma^2 \cdot \frac{T}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n \rightarrow \exp\left\{-\frac{1}{2}(is + s^2) \cdot \sigma^2 \cdot T\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 \cdot T \cdot is - \frac{1}{2} \cdot (\sigma^2 \cdot T) \cdot s^2\right\}.$$

Dies ist die CF zur Normalverteilung  $N(-\frac{1}{2}\sigma^2 \cdot T, \sigma^2 \cdot T)$  mit der Verteilungsfunktion

$y \mapsto \Phi((y + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot T)/\sigma\sqrt{T})$ , wenn  $\Phi$  die Verteilungsfunktion zu  $N(0,1)$  ist. Nach dem Stetigkeitssatz von Levy–Cramér folgt

Die Verteilung  $P^*Y_n^{-1}$  von  $Y_n$  unter  $P^*$  konvergiert schwach gegen  $N(-\frac{1}{2}\sigma^2 \cdot T, \sigma^2 \cdot T)$ ; dies impliziert die Konvergenz der Verteilungsfunktionen .

[Wegen  $U^2 = \sigma^2 \cdot \frac{T}{n}$  hängen die  $p_i$  und damit  $P^*$  von  $n$  ab. Man müßte also eigentlich  $P_n^*$  und  $P_n^*Y_n^{-1}$  schreiben; deswegen ist auch der zentrale Grenzwertsatz nicht direkt anwendbar.]

Es folgt:  $P^*[Y_n > y] \mapsto 1 - \Phi((y + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot T)/\sigma\sqrt{T})$ ; dabei gilt bekanntlich:  $1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$ .

Somit erhalten wir:

$$P^*[\Gamma] \mapsto 1 - \Phi([\log(\check{K}/S_0) + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot T]/\sigma\sqrt{T}) = \Phi([\log(S_0/\check{K}) - \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot T]/\sigma\sqrt{T}).$$

Ebenso zeigt man mit  $p_u' = p_u \cdot u = p_d$  (wegen  $u \cdot d=1$ ):

$$P'[\Gamma] \mapsto \Phi([\log(S_0/\check{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot T]/\sigma\sqrt{T}).$$

Insgesamt ergibt sich also aus 2.9 mit  $\check{K} = e^{-rT}$ :

**2.15 Satz.** Für  $n \rightarrow \infty$  gilt:  $x \rightarrow \pi(r, \sigma^2 \cdot T, S_0, \check{K}) :=$

$$S_0 \cdot \Phi([\log(S_0/\check{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot T]/\sigma\sqrt{T}) - \check{K} \cdot \Phi([\log(S_0/\check{K}) - \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot T]/\sigma\sqrt{T}) =$$

$$S_0 \cdot \Phi([\log(S_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T]/\sigma\sqrt{T}) - K \cdot e^{-rT} \cdot \Phi([\log(S_0/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T]/\sigma\sqrt{T}).$$

Dies ist die **Black–Scholes–Formel** für die Bewertung einer Option in einem zeitstetigen Modell. Dabei ist

- $r$  die Zinsrate im zeitstetigen Modell,
- $\sigma^2$  die sog. *Volatilität* als Maß für die Kursschwankungen,
- $S_0$  der Kurs z.Zt. 0,
- $T$  der Fälligkeitszeitstermin der Option,
- $K = \check{K}e^{rT}$  der Wahrnehmungspreis der Option.

Es gilt die folgende interessante Beziehung:

**2.16 Satz.**  $\sigma^2 \rightarrow \pi(r, \sigma^2 T, S_0, \check{K})$  ist isoton.

Im Fall  $S_0 = \check{K}$  ist die Aussage offensichtlich.

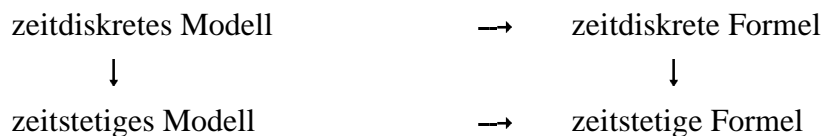
**Beweis** des allgemeinen Falles: Wir berechnen  $\frac{\partial}{\partial y} \pi(r, y^2, S_0, \check{K})$ , mit  $y := \sigma\sqrt{T}$ . Sei dazu  $\varphi$  die Dichte der  $N(0,1)$ –Verteilung. Mit  $z := S_0/\check{K}$  gilt:

$$\begin{aligned} \pi(r, y^2, S_0, \check{K})/\check{K} &= z\Phi\left(\frac{1}{y}\log z + \frac{1}{2}y\right) - \Phi\left(\frac{1}{y}\log z - \frac{1}{2}y\right), \text{ also} \\ \frac{\partial}{\partial y} \pi(r, y^2, S_0, \check{K}) &= z\varphi\left(\frac{1}{y}\log z + \frac{1}{2}y\right) \cdot \left(-\log(z)/y^2 + \frac{1}{2}\right) - \varphi\left(\frac{1}{y}\log z - \frac{1}{2}y\right) \cdot \left(-\log(z)/y^2 - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Wir dividieren durch  $\varphi\left(\frac{1}{y}\log z - \frac{1}{2}y\right)$ ; wegen  $\varphi(a+b)/\varphi(a-b) = e^{-2ab}$  ist  $\frac{\partial}{\partial y} \pi(r, y^2, S_0, \check{K}) > 0$  äquivalent zu:

$$z \cdot e^{-\log z} \cdot \left(-\log(z)/y^2 + \frac{1}{2}\right) > \left(-\log(z)/y^2 - \frac{1}{2}\right), \text{ also zu } \frac{1}{2} > -\frac{1}{2} \text{ wegen } z \cdot e^{-\log z} = 1. \quad \square$$

Das folgende Diagramm zeigt Wege zur Berechnung der Black–Scholes–Formel:



Hier sind wir den Weg vom zeitdiskreten Modell zur zeitdiskreten Binomialformel gegangen mit Hilfe einfacher Arithmetik und dann von der zeitdiskreten Formel zur zeitstetigen Black–Scholes–Formel durch einen Grenzübergang analog zum Beweis des zentralen Grenzwertsatzes. Der Grenzübergang vom zeitdiskreten Modell zum zeitstetigen Modell wird durch das Invarianzprinzip von Donsker geliefert, der eine Ausdehnung des zentralen Grenzwertsatzes auf stochastische Prozesse darstellt. In dem zeitstetigen Modell kann die zeitstetige Black–Scholes–Formel mit Methoden der stochastischen Analysis hergeleitet werden.

**2.17 Bemerkung.** Die Darstellung des fairen Preises für  $X = [S_T - K]^+$  als gewichtete Differenz von Wahrscheinlichkeiten ergibt sich auch in allgemeinen Situationen.

Ist  $P^*$  ein Martingalmaß, also der diskontierte Preisprozeß  $\check{S}$  ein Martingal unter  $P^*$ , so wird sich  $E^*[X/(1+r_o)^T]$  als ein Kandidat für einen Preis erweisen. Unter  $P^*$  ist insbesondere  $E^*[\check{S}_T] = S_0$ .

Damit ist  $P'[\Gamma] := E^*[1_\Gamma \cdot \check{S}_T/S_0]$  ein W-Maß und es gilt mit  $\Gamma := \{S_T > K\}$ :

$$E^*[(S_T - K)^+ / (1+r_o)^T] = E^*[(\check{S}_T - \check{K}) \cdot 1_\Gamma] = S_0 \cdot P'[\Gamma] - (K/(1+r_o)^T) \cdot P^*[\Gamma] . \quad \square$$

**2.18 Bemerkung.** In einem Modell mit  $d = 1/u$ , also  $\log d = -\log u = -U$  gilt wegen  $\check{S}_m/\check{S}_{m-1} \in \{d, u\}$  offenbar  $\Delta \log \check{S}_m \in \{-U, U\}$  und somit:

$$(2.19) \quad (\Delta \log \check{S}_m)^2 = U^2 \quad \text{und} \\ \left\{ \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n (\Delta \log \check{S}_m)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = U.$$

In der Realität werden diese Beziehungen nicht streng gelten, da das Modell die Wirklichkeit nur annähernd beschreibt. Die Beziehung (2.19) legt aber nahe, die dort angegebenen Größen als Schätzer für  $U$  zu benutzen auf Grund einer Beobachtung von Daten über  $n$  Perioden.

Läßt sich die tatsächliche zeitliche Entwicklung des Kurses auf dem Markt durch ein W-Maß  $P$  beschreiben, daß die gleiche Gestalt hat wie  $P^*$  nur mit einem anderem  $p$  anstelle von  $p_u$ , so sind die  $\Delta \log \check{S}_m$ ,  $1 \leq m \leq n$ , wieder unabhängig und identisch verteilt. Dann ist (2.19) in Hinblick auf den zentralen Grenzwertsatz ein naheliegende Schätzer für  $E[\{\Delta \log \check{S}_1\}^2]$ , also auch für  $\text{Var}[\Delta \log \check{S}_1]$  für den Fall  $E[\Delta \log \check{S}_1] \approx 0$ .

Über die Beziehung (2.14) erhält man ebenfalls eine Schätzung für  $U$ , wenn man eine solche für die Volatilität  $\sigma$  hat. Für  $\sigma$  stehen gute Schätzer zur Verfügung; so werden auch laufend Schätzungen für  $\sigma$  veröffentlicht.  $\square$

### § 3 Die Fundamentalsätze.

Ist ein Zahlungsanspruch  $X$  erreichbar mit einer Anfangsinvestition  $x$ , so wissen wir, daß  $x$  ein fairer Preis für den zugehörigen Kontrakt, etwa die zugehörige Option ist. In einem vollständigen Markt ist jeder Zahlungsanspruch erreichbar; somit kann jedem Zahlungsanspruch ein fairer Preis zugeordnet werden. Im Binomialmodell, das ja einen vollständigen Markt beschreibt, haben wir festgestellt, daß sich dieser faire Preis zu  $X$  als Erwartungswert  $E^*[\check{X}]$  des diskontierten Zahlungsanspruchs  $\check{X}$  bzgl. eines künstlichen  $W$ -Maßes  $P^*$  darstellen ließ, unter dem der diskontierte Preisprozeß  $\{\check{S}_t\}$  ein Martingal bildete. Wir werden sehen, daß dies auch in allgemeineren vollständigen Märkten gilt. Ferner wird deutlich werden, daß  $E^*[\check{X}]$  auch in unvollständigen Märkten ein Kandidat für einen Preis ist. Die Existenz eines solchen Maßes  $P^*$  wird bereits aus der Arbitragefreiheit des Marktes folgen. Allerdings wird es in unvollständigen Märkten mehrere Kandidaten für einen Preis geben, wenn  $X$  nicht gerade erreichbar ist.

Es soll zunächst ein Ansatz für ein Marktmodell untersucht werden.

**3.1 Beispiel.** Für  $d=1$  machen wir folgenden Ansatz :

$$(3.2) \quad R_t = b + \sigma \cdot \Delta W_t.$$

Dabei seien  $b > -1$ , die *mittlere Rendite*,  $\sigma > 0$  der *Dispersionskoeffizient* oder die *Volatilität* und der Prozeß  $\{W_t\}$  ein (zeitdiskretes) *weißes Rauschen*. Das heißt, daß die  $\{\Delta W_t\}$  standardisierte, unabhängige und identische verteilte  $Z$ 's sind. Standardisiert bedeutet wie üblich, daß  $E[\Delta W_t] = 0$  und  $\text{Var}[\Delta W_t] = 1$  gilt. Offenbar ist der Ansatz (3.2) gleichbedeutend mit

$$(3.3) \quad \Delta S_t = S_{t-1} \cdot (b + \sigma \cdot \Delta W_t).$$

Die Gleichung (3.3) ist eine *stochastische Differenzgleichung*. Im zeitstetigen Black–Scholes–Modell wählt man  $W$  als Wienerprozeß und ersetzt  $\Delta W_t$  durch  $dW_t$ ; dann gilt stets  $S_t > 0$ . Hier ist für  $S_t > 0$  hinreichend und notwendig:

$$(3.4) \quad \Delta W_t > -(1+b)/\sigma .$$

In (3.3) werden also die Änderungen  $\Delta S_t$  proportional zu  $S_{t-1}$  angesetzt. Bei hohen Preisen  $S_{t-1}$  wird man höhere Schwankungen erwarten als bei niedrigen Preisen.

Man kann zur Beschreibung des Marktes also die typische Situation 1.32 wählen mit  $I_t = \Delta W_t$ .

Wird der Zinssatz  $r_t = r$  konstant angenommen, so ist (3.3) auch gleichbedeutend mit:

$$(3.5) \quad \Delta \check{S}_t = \check{S}_{t-1} \cdot (\check{b} + \check{\sigma} \cdot \Delta W_t) \quad \text{mit} \quad \check{b} := \frac{b - r}{1 + r}, \quad \check{\sigma} := \frac{\sigma}{1 + r}.$$

Die Größe  $\check{b}/\check{\sigma} = (b-r)/\sigma$  wird auch *Risikoprämie* genannt. Der Ansatz (3.2) impliziert, daß die Renditen unabhängig und identisch verteilt sind. Man erhält auch die folgende Darstellung:

$$(3.6) \quad S_t = S_0 \cdot \prod_{m=1}^t (1 + b + \sigma \cdot \Delta W_m) = S_0 \cdot \exp\left\{ \sum_{m=1}^t \log(1 + b + \sigma \cdot \Delta W_m) \right\},$$

also ist  $\{S_t\}$  wieder eine geometrische Irrfahrt.

Das Binomialmodell erhält man gerade, wenn  $\Delta W_t$  nur zwei Werte annimmt. Will man allgemeinere Abhängigkeiten von der Vorgeschichte modellieren, so kann man ansetzen:

$$(3.7) \quad \Delta S_t = S_{t-1} \cdot (b_{t-1} + \sigma_{t-1} \cdot \Delta W_t) \quad \text{mit} \quad b_{t-1} = b_{t-1}(H_{t-1}), \sigma_{t-1} = \sigma_{t-1}(H_{t-1}). \quad \square$$

**3.8 Definition.** Eine Folge von reellen Zva  $\{M_t, 0 \leq t \leq T\}$  heißt ein **Martingal** unter  $P$  [bzgl. der durch  $\{H_t\}$  gegebenen Informationsstruktur], wenn  $\{M_t\}$  adaptiert ist, also  $M_t = m_t(H_t)$  gilt, und wenn:

$$(3.9) \quad E[\Delta M_t | H_{t-1} = \omega_{t-1}] = 0 \quad \text{gilt für} \quad 1 \leq t \leq T, \omega_{t-1} \in \Omega_{t-1}, \text{ insbesondere } E[\Delta M_1] = 0.$$

Ein Folge von vektorwertigen Zva  $\{M_t, 0 \leq t \leq T\}$  heißt ein **Martingal**, wenn jede Komponente ein Martingal ist.

**3.10 Definition.** Ein  $W$ -Maß  $P^*$  auf  $\Omega$  heißt **Martingalmaß**, wenn  $\{\check{S}_t\}$  unter  $P^*$  ein Martingal ist.  $P^*$  heißt **äquivalent** (zu  $P$ ), wenn gilt:  $P^*(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$ . Sei  $\hat{\mathbb{P}}^*$  die Menge der Martingalmaße und  $\mathbb{P}^*$  die Menge der äquivalenten Martingalmaße.

Für ein  $W$ -Maß  $P^*$  schreiben wir wieder  $E^*[\dots] := \int \dots dP^*$ .

**3.11 Lemma.** Für ein  $W$ -Maß  $P^*$  auf  $\Omega$  sind äquivalent:

- (i)  $P^* \in \hat{\mathbb{P}}^*$ ;
- (ii)  $E^*[G_T(\xi)] = 0 \quad \forall \xi \in \Xi$ .

**Beweis:** a) Sei  $P^* \in \hat{\mathbb{P}}^*$ . Dann hat man:

$$\begin{aligned} E^*[G_T(\xi)] &= E^*\left[\sum_{t=1}^T \xi_{t-1}^\top \cdot \Delta \check{S}_t\right] \\ &= \sum_{t=1}^T \sum_{\omega_{t-1}} P^*[H_{t-1} = \omega_{t-1}] E^*[\xi_{t-1}^\top \cdot \Delta \check{S}_t | H_{t-1} = \omega_{t-1}] \\ &= \sum_{t=1}^T \sum_{\omega_{t-1}} \sum_{k=1}^d P^*[H_{t-1} = \omega_{t-1}] \xi_{t-1}^k(\omega_{t-1}) \cdot E^*[\Delta \check{S}_t^k | H_{t-1} = \omega_{t-1}] = 0. \end{aligned}$$

gemäß (3.9). Bei der Schreibweise  $\xi_{t-1}^k(\omega_{t-1})$  haben wir wieder von Konvention 1.31 Gebrauch gemacht.

b) Es gelte nun (ii). Zu  $0 < m \leq T$ ,  $1 \leq j \leq d$ ,  $\omega_{m-1} \in \Omega_{m-1}$  definieren wir  $A := \{H_{m-1} = \omega_{m-1}\}$  und ein  $\xi \in \Xi$  gemäß  $\xi_{m-1}^j = 1_A$  und  $\xi_{t-1}^k = 0$  sonst. Dann gilt  $G_T(\xi) = 1_A \cdot \Delta \check{S}_m^j$ ; mit (ii) folgt:  $E^*[\Delta \check{S}_m^j \cdot 1_A] = 0$  und damit  $E^*[\Delta \check{S}_m^j | A] = 0$ .  $\square$

Ein erster, einfacher Schritt zum ersten Fundamentalsatz ist:

**3.12 Proposition.** Ist  $\mathbb{P}^*$  nicht leer, so ist der Markt arbitragefrei.

**Beweis.** Wir benutzen 1.25. Sei  $P^* \in \mathbb{P}^*$ ; dann gilt nach 3.11:  $E^*[G_T(\xi)] = 0 \quad \forall \xi$ . Aus  $G_T(\xi) \geq 0$  folgt also:  $G_T(\xi) = 0$   $P^*$ -f.s. und damit  $G_T(\xi) = 0$  auf  $\Omega$ .  $\square$

Im ersten Fundamentalsatz soll nun gezeigt werden, daß die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes auch notwendig für die Arbitragefreiheit ist. Wir schreiben

$$(3.13) \quad G(\Xi) := \{G_T(\xi); \xi \in \Xi\} \subset \mathbb{R}^\Omega,$$

$$C(\Xi) := \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \exists \xi \in \Xi \text{ mit } X \leq G_T(\xi)\}, \text{ also } G(\Xi) \subset C(\Xi) \subset \mathbb{R}^\Omega.$$

$C(\Xi)$  beschreibt also gerade die Terminalwerte  $X$  in einem diskontierten Modell, wenn man ohne Anfangskapital startet, einen Plan  $\xi$  verfolgt und noch den Betrag  $G_T(\xi) - X \geq 0$  konsumiert.

Es kann  $\mathbb{R}^\Omega := \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}$  stets mit  $\mathbb{R}^{|\Omega|}$  identifiziert werden gemäß

$$\mathbb{R}^\Omega \ni X \cong (X(\omega); \omega \in \Omega) \in \mathbb{R}^{|\Omega|};$$

dabei werden auf  $\mathbb{R}^\Omega$  bzw.  $\mathbb{R}^{|\Omega|}$  Ungleichungen und Konvergenz immer punktweise bzw. komponentenweise verstanden.

Wegen 1.25 ist die Arbitragefreiheit äquivalent zu:

$$(3.14) \quad G(\Xi) \cap \mathbb{R}_+^\Omega = \{0\} \quad \text{mit } \mathbb{R}_+^\Omega := \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ := [0, \infty)\}.$$

Bei Arbitragefreiheit kann  $G(\xi)(\omega) > 0$  für ein  $\omega$  nur eintreten, wenn auch  $G(\xi)(\omega') < 0$  für ein weiteres  $\omega'$  gilt. Die Arbitragefreiheit ist aber offenbar auch äquivalent zu:

$$(3.15) \quad C(\Xi) \cap \mathbb{R}_+^\Omega = \{0\}.$$

**3.16 Proposition.** *Ist der Markt arbitragefrei, so ist  $C(\Xi)$  ein abgeschlossener, konvexer Kegel.*

**Beweis:** Definiert man für  $\alpha \in \mathbb{R}, \xi, \xi' \in \Xi$ :

$\alpha \cdot \xi := \{\alpha \cdot \xi_0, \dots, \alpha \cdot \xi_{T-1}\} \in \Xi, \xi + \xi' := \{\xi_0 + \xi'_0, \dots, \xi_{T-1} + \xi'_{T-1}\} \in \Xi$ , so ist

$$(3.17) \quad \alpha \cdot G_T(\xi) = G_T(\alpha \cdot \xi) \in G(\Xi), \quad G_T(\xi) + G_T(\xi') = G_T(\xi + \xi') \in G(\Xi).$$

Also ist  $G(\Xi)$  ein linearer Unterraum von  $\mathbb{R}^{|\Omega|}$  und somit abgeschlossen. Es folgt auch sofort, daß  $C(\Xi)$  eine konvexe Menge ist. Die Kegeleigenschaft besagt:  $\alpha \cdot X \in C(\Xi)$  für  $\alpha \geq 0, \xi \in \Xi$  und ist

offenbar auch gegeben. Zum Beweis der Abgeschlossenheit gelte:  $C(\Xi) \ni X_n \rightarrow X \in \mathbb{R}^\Omega$ , also  $X_n \leq G_T(\xi_n)$  für gewisse  $\xi_n \in \Xi$ .

**Fall 1.**  $\{G_T(\xi_n)\}$  enthält eine beschränkte Teilfolge und somit auch eine konvergente Teilfolge  $\{G_T(\xi_{n'})\}$ . Da  $G(\Xi)$  abgeschlossen ist, existiert also ein  $\xi \in \Xi$  mit  $G_T(\xi_{n'}) \rightarrow G_T(\xi)$ . Es folgt:

$$X \leq G_T(\xi), \text{ d.h. } X \in C(\Xi).$$

**Fall 2.**  $\|G_T(\xi_n)\| \rightarrow \infty$ . Wir werden zeigen, daß dieser Fall wegen der vorliegenden Beschränktheit nach unten der Arbitragefreiheit widerspricht.

Dann würde gelten  $\gamma_n := 1/\|G_T(\xi_n)\| \rightarrow 0$ . Mit (3.17) hat man:  $\|G_T(\gamma_n \cdot \xi_n)\| = 1$ . Damit existieren  $\{n'\} \subset \mathbb{N}$ ,  $\xi \in \Xi$  mit:  $G_T(\gamma_{n'} \cdot \xi_{n'}) \rightarrow G_T(\xi)$  und  $\|G_T(\xi)\| = 1$ . Wir haben nun

$$0 \leq \gamma_{n'} \cdot [G_T(\xi_{n'}) - X_{n'}] = G_T(\gamma_{n'} \cdot \xi_{n'}) - \gamma_{n'} \cdot X_{n'} \rightarrow G_T(\xi).$$

Somit ergibt sich  $G_T(\xi) \geq 0$ ,  $G_T(\xi) \neq 0$  für ein  $\xi$ ; dies ist ein Widerspruch zu (3.14). Also kann bei Arbitragefreiheit nur der Fall 1 vorliegen.  $\square$

**3.18 Proposition.** *Ist der Markt arbitragfrei, so existiert zu  $Z \in \mathbb{R}^\Omega \setminus C(\Xi)$  ein  $P^* \in \hat{\mathbb{P}}^*$  mit  $E^*[Z] > 0$ .*

**Beweis:** Wir schreiben hier  $C := C(\Xi)$ . Gemäß 3.16 können wir den Trennungssatz (Hahn–Banach) anwenden und erhalten die Existenz einer Hyperebene

$$\{X \in \mathbb{R}^\Omega; \sum_{\omega \in \Omega} L(\omega) \cdot X(\omega) = \gamma\} \text{ mit gewissen } \gamma \in \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}^\Omega,$$

die die kompakte konvexe Menge  $\{Z\}$  und  $C$  trennt, d.h. es existieren  $\alpha < \gamma < \beta$  mit:

$$\sum_{\omega \in \Omega} L(\omega) \cdot X(\omega) \leq \alpha < \beta \leq \sum_{\omega \in \Omega} L(\omega) \cdot Z(\omega) \quad \forall X \in C.$$

Wegen  $0 = G_T(0) \in C(\Xi)$  folgt  $\alpha \geq 0$  und damit  $\beta > 0$ . Wir können sogar  $\alpha=0$  wählen, denn wir werden zeigen:

$$(3.19) \quad \sum_{\omega \in \Omega} L(\omega) \cdot X(\omega) \leq 0 < \sum_{\omega \in \Omega} L(\omega) \cdot Z(\omega) \quad \forall X \in C.$$

Wegen  $n \cdot X \in C$  für  $X \in C$ ,  $n > 0$  folgt nämlich:  $n \cdot \sum_{\omega \in \Omega} L(\omega) \cdot X(\omega) \leq \alpha \quad \forall n > 0$ , also

$$\sum_{\omega \in \Omega} L(\omega) \cdot X(\omega) \leq 0.$$

Wegen  $-1_{\{\omega^*\}} \leq 0 = G_T(0) \quad \forall \omega^* \in \Omega$  gilt  $X := -1_{\{\omega^*\}} \in C$ ; es folgt:

$$-\sum_{\omega \in \Omega} L(\omega) \cdot 1_{\{\omega^*\}}(\omega) = -L(\omega^*) \leq 0 \quad \forall \omega^* \in \Omega, \text{ also } L \geq 0.$$

Nach Normierung ist  $L$  ein Kandidat für die Zähldichte von  $P^*$ . Wegen (3.19) gilt:

$\lambda := \sum_{\omega \in \Omega} L(\omega) > 0$ . Setze  $p^* := \frac{1}{\lambda} L \geq 0$ , dann gilt:  $\sum_{\omega \in \Omega} p^*(\omega) = 1$ . Dabei erbt  $p^*$  die Eigenschaften von  $L$  in (3.19). Wir definieren nun das zugehörige Maß  $P^*$  auf  $\Omega$  über  $P^*(\omega) := p^*(\omega)$ . Für  $\xi \in \Xi$  gilt:  $\pm G_T(\xi) = G_T(\pm \xi) \in C(\Xi)$ , also wegen (3.19):

$$E^*[G_T] = \sum_{\omega \in \Omega} p^*(\omega) \cdot G_T(\xi)(\omega) = 0 \quad \forall \xi \in \Xi.$$

Mit 3.11 folgt nun  $P^* \in \hat{\mathbb{P}}^*$  und  $E^*[Z] > 0$  wegen (3.19).  $\square$

**3.20 Erster Fundamentalsatz.** *Der Markt ist genau dann arbitragfrei, wenn ein äquivalentes Martingalmaß existiert, also  $\mathbb{P}^*$  nicht leer ist.*

**Beweis:** Der Markt sei arbitragfrei. Dann gilt wegen (3.15)  $1_{\{\omega\}} \in \mathbb{R}_+^\Omega \setminus C(\Xi) \quad \forall \omega \in \Omega$ . Dann existieren nach 3.18 Martingalmaße  $P_\omega \in \hat{\mathbb{P}}^*$  mit

$$P_\omega(\omega) = E_\omega[1_{\{\omega\}}] > 0.$$

Wir setzen  $P^*(\cdot) := \frac{1}{|\Omega|} \cdot \sum_{\omega \in \Omega} P_\omega(\cdot)$ .

Dann ist  $P^*$  wieder ein  $W$ -Maß mit  $P^*(\omega) \geq \frac{1}{|\Omega|} \cdot P_\omega(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$ . Wegen der folgenden Eigenschaft gilt zudem noch  $P^* \in \hat{\mathbb{P}}^*$ , also insgesamt  $P^* \in \mathbb{P}^*$ .

(3.21)  $\hat{\mathbb{P}}^*$  und  $\mathbb{P}^*$  sind konvex.

Der Beweis folgt sofort aus der folgenden Formulierung der Martingaleigenschaft:

$$E[\Delta S_t^k \cdot \mathbf{1}_{\{H_{t-1} = \omega_{t-1}\}}] = 0 \quad \text{für } 1 \leq t \leq T, \omega_{t-1} \in \Omega_{t-1}, 1 \leq k \leq d.$$

Die umgekehrte Richtung im Satz ist gerade 3.12.  $\square$

Aus (3.21) ergibt sich sofort, daß  $\hat{\mathbb{P}}^*$  und  $\mathbb{P}^*$  mit zwei verschiedenen Elementen sogar unendlich viele Elemente enthalten.

Ist ein Zahlungsanspruch  $X$  erreichbar (duplizierbar) durch  $(x, \xi)$ , so gilt:  $x + G_T(\xi) = \check{X} := X/B_T$ . In der Situation ist  $x$  eine faire Prämie. Interessant ist auch die folgende Situation:

(3.22)  $x + G_T(\xi) \geq \check{X}$ , d.h.  $V_T^\xi(x) \geq X$  für gewisse  $x \in \mathbb{R}, \xi \in \Xi$ .

Dabei wurde (1.16) benutzt. Man sagt wieder, daß der Zahlungsanspruch  $X$  durch eine Anfangsinvestition  $x$  und den Plan  $\xi$  (ohne Risiko) abgesichert werden kann. Nun fragen wir nach der kleinsten Anfangsinvestition  $x$ , sodaß dazu ein  $\xi \in \Xi$  existiert mit (3.22):

(3.23)  $\bar{\pi}(X) := \inf \{x \in \mathbb{R}; \exists \xi \in \Xi \text{ mit (3.22)}\}$ .

**3.24 Satz.** *Der Markt sei arbitragefrei. Dann gilt für  $\check{X} := X/B_T$ :*

(3.25)  $\bar{\pi}(X) = \sup \{E_{P^*}[\check{X}]; P^* \in \hat{\mathbb{P}}^*\} = \sup \{E_{P^*}[\check{X}]; P^* \in \mathbb{P}^*\};$

*und das Infimum in (3.25) wird angenommen, d.h. es existiert ein  $\xi^* \in \Xi$  mit*

$$\bar{\pi}(X) + G_T(\xi^*) \geq \check{X}.$$

Wenn ein Verkäufer für einen Kontrakt, der zu einem Zahlungsanspruch  $X$  führt, eine Prämie  $\pi$  nimmt mit  $\pi \geq \bar{\pi}(X)$ , so kann er einen Arbitragegewinn machen, wenn  $X$  nicht gerade erreichbar ist. Er kann ja mit  $(\bar{\pi}(X), \xi^*)$  den Zahlungsanspruch  $X$  absichern, wobei für ein  $\omega$  dann  $\Delta := \bar{\pi}(X) + G_T(\xi^*)(\omega) - \check{X}(\omega) > 0$  gelten muß, er also die Differenz  $\Delta$  als Arbitragegewinn einstreichen kann. Ist andererseits  $\pi < \bar{\pi}(X) = \sup \{E_{P^*}[\check{X}]; P^* \in \mathbb{P}^*\}$ ; dann existiert zu jedem  $\xi \in \Xi$  ein  $\omega \in \Omega$  mit  $\pi + G_T(\xi)(\omega) < \check{X}(\omega)$ . Mit einem solchen Preis  $\pi$  hat der Verkäufer also keine Arbitragemöglichkeit.

**3.26 Definition.**  $\bar{\pi}(X)$  heißt *obere Arbitrageschranke* für  $X$ .

**Beweis** von 3.24. Wir schreiben  $\bar{\pi} := \bar{\pi}(X)$ ,  $\pi^0 := \sup \{E_{P^*}[\check{X}]; P^* \in \hat{\mathbb{P}}^*\}$ .

a) " $\pi^0 \leq \bar{\pi}$ ": Aus  $x + G_T(\xi) \geq \check{X}$  folgt mit 3.11:  $x \geq E_{P^*}[\check{X}] \quad \forall P^* \in \mathbb{P}^*$ .



b) " $\bar{\pi} \leq \pi^0$ ": Für  $Z := \check{X} - \pi^0$  gilt per def.:  $E_{P^*}[Z] \leq 0 \quad \forall P^* \in \mathbb{P}^*$ . Damit gilt nach 3.18:

$Z \in C(\Xi)$ , d.h.  $Z \leq G_T(\xi^*)$ , also  $\check{X} \leq \pi^0 + G_T(\xi^*)$  für ein  $\xi^* \in \Xi$ .

c) Das  $\xi^*$  aus b) ist das Gesuchte.

d) Die Wert von  $\pi^0$  ändert sich nicht, wenn  $\hat{\mathbb{P}}^*$  durch  $\mathbb{P}^*$  ersetzt wird. Nach dem Fundamentalsatz 3.20 existiert ein  $P^* \in \mathbb{P}^*$ . Dann hat man mit (3.21) für jedes  $P' \in \hat{\mathbb{P}}^*$ :  $P'_n := \frac{1}{n}P^* + \frac{n-1}{n}P' \in \mathbb{P}^*$   $\forall P' \in \hat{\mathbb{P}}^*$ . Nun gilt:  $E_{P'_n}[\check{X}] \rightarrow E_{P'}[\check{X}]$  ( $n \rightarrow \infty$ ), also:  $E_{P'}[\check{X}] \leq \pi^* := \sup \{E_{P^*}[\check{X}]; P^* \in \mathbb{P}^*\}$ .  $\square$

Entsprechend kann man eine *untere Arbitrageschranke* definieren und ein analoges Resultat erhalten. Das Supremum  $\sup \{E_{P^*}[\check{X}]; P^* \in \mathbb{P}^*\}$  wird i.a. nicht angenommen. In der Tat gilt:

**3.27 Korollar.** *Sei der Markt arbitragefrei.*

(a) *Für  $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  sind äquivalent:*

(i)  $\sup_{P^* \in \mathbb{P}^*} E_{P^*}[\check{X}]$  wird durch ein  $P^* \in \mathbb{P}^*$  angenommen.

(ii)  $X$  ist erreichbar.

(b) *Sei  $X$  nicht erreichbar und  $\pi := E_{P^*}[\check{X}]$  für ein  $P^* \in \mathbb{P}^*$ ; dann existiert zu jedem  $\xi \in \Xi$  ein  $\omega \in \Omega$  mit  $\pi + G_T(\xi)(\omega) < \check{X}(\omega)$ .*

Allerdings wird  $\sup_{P^* \in \hat{\mathbb{P}}^*} E_{P^*}[\check{X}]$  durch ein  $P^* \in \hat{\mathbb{P}}^*$  angenommen, denn  $\hat{\mathbb{P}}^*$  ist kompakt.

**Beweis** von 3.27. a) "(i)  $\Rightarrow$  (ii)" Sei  $\bar{\pi}(X) = E_{P^*}[\check{X}]$ . Nach 3.24 ex.  $\xi^* \in \Xi$  mit  $\bar{\pi}(X) + G_T(\xi^*) \geq \check{X}$ .

Nun gilt aber nach 3.11:  $E_{P^*}[\bar{\pi}(X) + G_T(\xi^*)] = \bar{\pi}(X) = E_{P^*}[\check{X}]$ , also  $\bar{\pi}(X) + G_T(\xi^*) = \check{X}$   $P^*$ -f.s. und damit überall auf  $\Omega$ .

"(ii)  $\Rightarrow$  (i)" Mit 3.11 folgt wieder:

(3.28) für  $\check{X} = x + G_T(\xi)$  gilt:  $x = E_{P^*}[\check{X}] \quad \forall P^* \in \mathbb{P}^*$  und damit  $x = \sup_{P^* \in \mathbb{P}^*} E_{P^*}[\check{X}]$ .

b) Ist  $X$  nicht erreichbar, so gilt nach (a)  $\pi < \bar{\pi}(X)$  und die Aussage folgt aus 3.24.  $\square$

Aus 3.27b und dem entsprechenden Ergebnis für die untere Arbitrageschranke sowie aus (3.28) ergibt sich nun:

**3.29 Korollar.** (a) Ist  $X$  erreichbar, also  $x + G(\xi) = \check{X}$ , so ist  $x = \bar{\pi}(X) = E_{P^*}[\check{X}] \quad \forall P^* \in \mathbb{P}^*$  und  $E_{P^*}[\check{X}]$  ist ein fairer Preis.

(b) Ist  $X$  nicht erreichbar, so bietet ein Preis  $\pi(X) := E_{P^*}[\check{X}]$  für jedes  $P^* \in \mathbb{P}^*$  keine Arbitragemöglichkeit, und zwar weder für den Verkäufer noch für den Käufer.

**3.30 Zweiter Fundamentalsatz.** *Ist der Markt arbitragefrei, so sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

- (1) *der Markt ist vollständig, d.h. jeder Zahlungsanspruch  $X$  ist erreichbar;*
- (2) *es existiert genau ein Martingalmaß  $P^* \in \hat{\mathbb{P}}^*$ ;*
- (3) *es existiert genau ein äquivalentes Martingalmaß  $P^* \in \mathbb{P}^*$ .*

Beweis: "(1)  $\Rightarrow$  (2)" Diese Richtung ist einfach zu zeigen. Sei  $P^*, P' \in \hat{\mathbb{P}}^*$ . Aus  $\check{X} = x' + G_T(\xi')$  folgt wieder mit 3.11:  $E_{P^*}[\check{X}] = E_{P'}[\check{X}] (= x')$ . Dies gilt für jedes  $\check{X}$ , also müssen  $P^*$  und  $P'$  übereinstimmen. "(2)  $\Rightarrow$  (3)" ist klar wegen  $\mathbb{P}^* \subset \hat{\mathbb{P}}^*$ .

"(3)  $\Rightarrow$  (1)" Aus  $|\mathbb{P}^*| = 1$  folgt 3.27a (i) für jedes  $X$  und damit 3.27a (ii).  $\square$

Die Aufgabe (3.23) kann als lineares Programm aufgefaßt werden; dann ist (3.25) gerade das duale Programm dazu und Satz 3.24 der Dualitätssatz. Dies soll für  $T=1$  erläutert werden. Für  $T=1$  schreibt sich (3.23) in der Form:

$$(3.31) \quad \bar{\pi}(X) = \inf \{ x \in \mathbb{R}; \exists \xi \in \mathbb{R}^d \text{ mit } x + \xi^\top \cdot \Delta \check{S}_1(\omega) \geq \check{X}(\omega), \omega \in \Omega \}.$$

Wir führen nun die folgende Menge ein:

$$\mathfrak{V} := \{ (x, \xi) \in \mathbb{R}^{1+d}; x \cdot 1 + \sum_k \xi^k \cdot \Delta \check{S}_1^k(\omega) \geq \check{X}(\omega), \omega \in \Omega \}.$$

Dann kann (3.31) als das folgende lineare Programm geschrieben werden:

$$(P) \quad \min_{(x, \xi) \in \mathfrak{V}} x = \min_{(x, \xi) \in \mathfrak{V}} x \cdot 1 + \sum_k \xi^k \cdot 0.$$

Dann erhält man als duales Programm:

$$(D) \quad \max_{q \in \hat{\Omega}} \sum_{\omega \in \Omega} q(\omega) \cdot \check{X}(\omega) \quad \text{mit} \\ \hat{\Omega}_1 := \{ q \in \mathbb{R}^{\Omega}; q(\omega) \geq 0, \omega \in \Omega, \sum_{\omega} q(\omega) = 1, \sum_{\omega} q(\omega) \cdot \Delta \check{S}_1^k(\omega) = 0, 1 \leq k \leq d \}.$$

Dann kann  $\hat{\Omega}_1$  mit  $\hat{\mathbb{P}}^*$  identifiziert werden gemäß  $q(\omega) = P^*(\omega)$ . Offenbar ist  $\mathfrak{V}$  nicht leer; man muß nur  $x$  groß genug wählen. Nach dem Fundamentalsatz 3.20 wissen wir, daß  $\hat{\Omega}_1$  nicht leer ist, falls der Markt arbitragefrei ist. Also ist der Dualitätssatz der linearen Optimierung anwendbar, und man erhält:

$$(3.32) \quad \bar{\pi}(X) = \max_{q \in \hat{\Omega}} \sum_{\omega \in \Omega} q(\omega) \cdot \check{X}(\omega) = \max \{ E_{P^*}[\check{X}]; P^* \in \hat{\mathbb{P}}^* \}.$$

#### §4 Weitere Charakterisierungen.

Es soll zunächst weitere Charakterisierungen der Arbitragefreiheit gegeben werden. Diese liefern dann Informationen darüber, was zu beachten ist, wenn ein mathematisches Modell für einen arbitragefreien Markt erstellt werden soll.

**4.1 Definition.** Es sei  $\Sigma_1$  der Träger von  $\Delta\check{S}_1$  unter  $P$ , d.h.  $\Sigma_1 := \{\sigma \in \mathbb{R}^d; P[\Delta\check{S}_1 = \sigma] > 0\}$ . Für  $t > 1$  sei  $\Sigma_t(\omega_{t-1})$  der Träger von  $\Delta\check{S}_t$  unter  $P[\cdot | H_{t-1} = \omega_{t-1}]$ , d.h.  $\Sigma_t(\omega_{t-1}) := \{\sigma \in \mathbb{R}^d; P[\Delta\check{S}_t = \sigma | H_{t-1} = \omega_{t-1}] > 0\}$ . Ferner seien  $\mathcal{L}_1$  bzw.  $\mathcal{L}_t(\omega_{t-1})$  die Teilräume von  $\mathbb{R}^d$ , die von  $\Sigma_1$  bzw.  $\Sigma_t(\omega_{t-1})$  aufgespannt werden, und  $\text{conv}(\Sigma_1)$  bzw.  $\text{conv}(\Sigma_t(\omega_{t-1}))$  die konvexen Hüllen von  $\Sigma_1$  bzw.  $\Sigma_t(\omega_{t-1})$ .

In den meisten Fällen wird man  $\Sigma_t(\omega_{t-1}) = \mathbb{R}^d$  haben. Es ist  $P[\cdot | H_0 = \omega_0] = P[\cdot]$  für  $\Omega_0 = \{\omega_0\}$ . Insofern ordnet sich der Fall  $t=1$  dem allgemeineren Fall  $t \geq 1$  unter, wenn man  $\Sigma_1(\omega_0) := \Sigma_1$  und  $\mathcal{L}_1(\omega_0) := \mathcal{L}_1$  setzt. Wie üblich sei  $B(0, \varepsilon)$  die Kugel im  $\mathbb{R}^d$  um 0 mit Radius  $\varepsilon$ .

**4.2 Satz.** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) Der Markt ist arbitragefrei, d.h. gilt für ein  $\xi \in \Xi$ :  $G_T(\xi) \geq 0$ , so folgt bereits  $G_T(\xi) = 0$ .

(2) Für  $1 \leq t \leq T$ ,  $\xi \in \Xi$  gilt:  $\xi_{t-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_t \geq 0 \Rightarrow \xi_{t-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_t = 0$ .

(3) Für  $1 \leq t \leq T$ ,  $\xi \in \Xi$ ,  $\omega_{t-1} \in \Omega_{t-1}$  gilt:

$$P[\xi_{t-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_t \geq 0 | H_{t-1} = \omega_{t-1}] = 1 \Rightarrow P[\xi_{t-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_t = 0 | H_{t-1} = \omega_{t-1}] = 1;$$

d.h. für  $1 \leq t \leq T$ ,  $\vartheta \in \mathbb{R}^d$ ,  $\omega_{t-1} \in \Omega_{t-1}$  gilt:

$$\vartheta^\top \cdot \sigma \geq 0 \quad \forall \sigma \in \Sigma_t(\omega_{t-1}) \Rightarrow \vartheta^\top \cdot \sigma = 0 \quad \forall \sigma \in \Sigma_t(\omega_{t-1}).$$

(4) Für  $1 \leq t \leq T$ ,  $\omega_{t-1} \in \Omega_{t-1}$  gilt:  $B(0, \varepsilon) \cap \mathcal{L}_t(\omega_{t-1}) \subset \text{conv}(\Sigma_t(\omega_{t-1}))$  für ein  $\varepsilon = \varepsilon_t(\omega_{t-1}) > 0$ .

**Beweis.** "(1)  $\Rightarrow$  (2)" Wähle  $\xi_m = 0$  für  $m \neq t$ .

"(2)  $\Rightarrow$  (1)" Es soll eine Induktion nach  $T$  durchgeführt werden.

Für  $T=1$  sind beide Bedingungen die gleichen. (1) gelte nun für  $T-1$ .

Sei nun  $G_T = G_T(\xi) \geq 0$ .

Ist  $G_{T-1} = 0$ , so muß  $\xi_{T-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_T \geq 0$  gelten, und wir können  $G_T = 0$  schließen.

Angenommen es gälte nicht:  $G_{T-1} = 0$ , aber  $G_T \geq 0$ .

Nach unserer Induktionsvoraussetzung kann nicht  $G_{T-1} \geq 0$  und  $G_{T-1}(\omega) > 0$  für ein  $\omega$  gelten.

Also erhalten wir  $A := \{G_{T-1} < 0\} \neq \emptyset$ ,  $\xi_{T-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_T > 0$  auf  $A$ .

Für  $\xi'_{T-1} := \mathbf{1}_A \cdot \xi_{T-1}$  gilt nun:  $\xi'_{T-1}{}^\top \cdot \Delta\check{S}_T = \mathbf{1}_A \cdot \xi_{T-1}^\top \cdot \Delta\check{S}_T \geq 0$  und  $\xi'_{T-1}{}^\top \cdot \Delta\check{S}_T > 0$  auf  $A$ .

Dies ist aber ein Widerspruch zu (2).

"(2)  $\Leftrightarrow$  (3)" Diese Äquivalenz ergibt sich aus:

$$P[A] = \sum_{\omega_{t-1} \in \Omega_{t-1}} P[H_{t-1} = \omega_{t-1}] P[A | H_{t-1} = \omega_{t-1}],$$

wobei wir durch Wahl von  $\Omega_{t-1}$  o.E.  $P[H_{t-1} = \omega_{t-1}] > 0$  für  $\omega_{t-1} \in \Omega_{t-1}$  annehmen dürfen.

Die Richtung "(2)  $\Leftarrow$  (3)" ist nun unmittelbar klar.

Für die Richtung "(2)  $\Rightarrow$  (3)" setzt man für  $\xi \in \Xi$  und für ein festes  $\omega_{t-1}$ :  $\xi'_{t-1} = \xi_{t-1}$  auf  $\{H_{t-1} = \omega_{t-1}\}$  und  $\xi'_{t-1} = 0$  auf  $\{H_{t-1} \neq \omega_{t-1}\}$ .

"(4)  $\Rightarrow$  (3)" Für ein festes  $\omega_{t-1}$  liege die Situation  $\vartheta^\top \cdot \sigma \geq 0 \quad \forall \sigma \in \Sigma_t(\omega_{t-1})$  vor. Dann folgt  $\vartheta^\top \cdot \sigma \geq 0 \quad \forall \sigma \in \text{conv}(\Sigma_t(\omega_{t-1})) \supset B(0, \varepsilon) \cap \mathcal{L}_t(\omega_{t-1})$ . Nun liegt mit  $\sigma$  auch  $-\sigma$  in  $B(0, \varepsilon) \cap \mathcal{L}_t(\omega_{t-1})$ .

Also muß  $\vartheta^\top \cdot \sigma = 0 \quad \forall \sigma \in B(0, \varepsilon) \cap \mathcal{L}_t(\omega_{t-1})$  gelten und damit  $\vartheta^\top \cdot \sigma = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{L}_t(\omega_{t-1})$ .

"(3)  $\Rightarrow$  (4)" Es soll nicht noch einmal ein Trennungssatz benutzt werden, sondern der erste Fundamentalsatz, der ja mit einem Trennungssatz gezeigt wurde.

Betrachten wir für ein festes  $t$  und  $\omega_{t-1}$  ein Marktmodell mit

$$T=1, \quad \Omega' := \Sigma_t(\omega_{t-1}), \quad (\text{z.B. } P'(\sigma) := P[\Delta \check{S}_t = \sigma | H_{t-1} = \omega_{t-1}]), \quad r_1 = 0, \quad \Delta \check{S}'_1(\sigma) = \Delta S'_1(\sigma) = \sigma.$$

Dann ist dieser Markt gemäß (3) gerade arbitragefrei. Nach dem ersten Fundamentalsatz 3.20 existieren Zahlen  $p(\sigma) > 0, \sigma \in \Omega', \sum_{\sigma \in \Omega'} p(\sigma) = 1, \sum_{\sigma \in \Omega'} p(\sigma) \cdot \sigma = 0$ . Damit gilt

$0 \in \text{conv}(\Omega')$ . Ist  $\Omega' = \{0\}$ , so ist  $\mathcal{L}_t(\omega_{t-1}) = \{0\}$ , und wir sind fertig. Ist  $\Omega' \neq \{0\}$ , so folgt aus  $\sum_{\sigma \in \Omega'} p(\sigma) \cdot \sigma = 0$  wegen  $p(\omega) > 0$  ebenfalls die Behauptung:  $B(0, \varepsilon) \cap \mathcal{L} \subset \text{conv}(\Omega')$  für ein  $\varepsilon > 0$ , wo  $\mathcal{L}$  der von  $\Omega'$  aufgespannte lineare Teilraum ist. Dazu genügt es, sich das Folgende klar zu machen: Ist  $\varepsilon$  klein genug, so gilt  $\pm \varepsilon \sigma \in \text{conv}(\Omega') \quad \forall \sigma \in \Omega'$ .

Wählt man  $\varepsilon < \min \{p(\sigma); \sigma \in \Omega'\}$ , so hat man für  $\sigma_o \in \Omega'$ :

$$-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \sigma_o = \sum_{\sigma \in \Omega', \sigma \neq \sigma_o} \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot p(\sigma) \cdot \sigma + \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot [p(\sigma_o) - \varepsilon] \cdot \sigma_o \in \text{conv}(\Omega');$$

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \sigma_o = \sum_{\sigma \in \Omega', \sigma \neq \sigma_o} \frac{1}{1+\varepsilon} \cdot p(\sigma) \cdot \sigma + \frac{1}{1+\varepsilon} \cdot [p(\sigma_o) + \varepsilon] \cdot \sigma_o \in \text{conv}(\Omega'). \quad \square$$

Eine zentrale Aufgabe ist es, jedem Kontrakt mit einem Zahlungsanspruch  $X \in \mathbb{R}^\Omega$  einen Preis zuzuordnen. Dies führt zu einer Charakterisierung der Martingalmaß. Für  $X \in \mathbb{R}^\Omega$  schreiben wir wieder  $\check{X} := X/B_T$ .

**4.3 Definition.** Ein **Preissystem** ist eine Abbildung  $\Pi : \mathbb{R}^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

(i)  $\Pi(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 \Pi(X_1) + \alpha_2 \Pi(X_2), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, X_i \in \mathbb{R}^\Omega;$

(ii) für  $X \geq 0$  gilt:

(a)  $\Pi(X) \geq 0$  ;

(b)  $\Pi(X) > 0 \Leftrightarrow X(\omega) > 0$  für ein  $\omega \in \Omega$ ;

d.h.  $\Pi : \mathbb{R}^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine positive Linearform.

Wegen der Linearität genügt es einzelne Zahlungsansprüche  $X$  zu betrachten; die Bewertung eines Zahlungsstroms  $(X_t)$  ergibt sich dann aus der Summe der Prämien für die einzelnen Zahlungsansprüche  $X_t$  z.Zt.  $t$  mit  $t$  als Zeithorizont.

**4.4 Definition.** Ein Preissystem  $\Pi$  heißt **konsistent**, falls gilt: Ist  $X \in \mathbb{R}^\Omega$  erreichbar durch  $(x, \xi) \in \mathbb{R} \times \Xi$ , hat man also  $\check{X} = x + G_T(\xi)$  für ein  $\xi \in \Xi$ , so gilt  $\Pi(X) = x$ .

In der Situation eines erreichbaren Zahlungsanspruchs  $X$  hatten wir in §1  $x$  bereits als faire Prämie erkannt.

**4.5 Lemma.** Sei  $Q$  ein  $W$ -Maß auf  $\Omega$  mit  $Q[\omega] > 0 \forall \omega \in \Omega$ ; so ist  $\Pi(X) := E_Q[\check{X}] = E_Q[X/B_T]$  eine Preissystem mit  $\Pi(B_T) = 1$ .

Es soll untersucht werden, wann ein Preissystem wie in 4.5 konsistent ist. Die Eigenschaft  $\Pi(B_T) = 1$  ist sicherlich notwendig; betrachte etwa  $x = 1$ ,  $\xi_t = 0 \forall t$ , also  $V_T^{\check{X}}(1) = B_T$ .

Eine weitere notwendige Eigenschaft für die Konsistenz von  $\Pi(X) := E_Q[\check{X}]$  soll jetzt ermittelt werden. Sei  $x = 0$ ,  $X/B_T = G_T(\xi)$  für ein  $\xi \in \Xi$ . Dann muß bei Konsistenz gelten:

$E_Q[G_T(\xi)] = 0$  für  $\xi \in \Xi$ . Gemäß 3.11 bedeutet dies gerade:  $Q \in \hat{\mathbb{P}}^*$ ; d.h.  $Q$  ist ein Martingalmaß. Bei  $Q[\omega] > 0 \forall \omega \in \Omega$ , ist sogar  $Q \in \mathbb{P}^*$ ; d.h.  $Q$  ist ein äquivalentes Martingalmaß.

**4.6 Satz.** Es existiert eine eindeutige Beziehung zwischen konsistenten Preissystemen  $\Pi$  und  $W$ -Maßen  $Q \in \mathbb{P}^*$  gemäß:

- (i)  $Q[A] = \Pi(B_T \cdot \mathbf{1}_A)$ ,  $A \subset \Omega$ ;
- (ii)  $\Pi(X) = E_Q[\check{X}]$ ,  $X \in \mathbb{R}^\Omega$ .

**Beweis:** Wir schreiben hier  $\mathfrak{P}$  für die Menge der konsistenten Preissysteme. Dann mögen  $\varphi : \mathfrak{P} \rightarrow \mathbb{P}^*$  und  $\psi : \mathbb{P}^* \rightarrow \mathfrak{P}$  die durch (i) bzw. (ii) beschriebenen Abbildungen bezeichnen. Wir zeigen: (1)  $\varphi(\Pi) \in \mathbb{P}^*$  für  $\Pi \in \mathfrak{P}$ , (2)  $\psi \circ \varphi$  ist die Identität, (3)  $\psi(Q) \in \mathfrak{P}$  für  $Q \in \mathbb{P}^*$ , (4)  $\varphi \circ \psi$  ist die Identität.

ad (1). Sei  $\Pi$  ein konsistentes Preissystem und  $Q$  gemäß (i) definiert. Dann ist  $\Pi$  eine Linearform auf  $\mathbb{R}^\Omega$ , und nach dem Riesz'schen Darstellungssatz existiert somit ein  $Z \in \mathbb{R}^\Omega$  mit

$$(*) \quad \Pi(X) = \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) \cdot X(\omega), \text{ insbesondere } Q[A] = \Pi(B_T \cdot \mathbf{1}_A) = \sum_{\omega \in A} Z(\omega) \cdot B_T(\omega).$$

Nach 4.2 (ii) hat man für  $A = \{\omega\}$ :  $Q(\omega) = Z(\omega) \cdot B_T(\omega) = \Pi(B_T \cdot \mathbf{1}_{\{\omega\}}) > 0$ ; somit gilt:  $Z > 0$ . Ferner hat man:  $Q[\Omega] = \Pi(B_T) = 1$  wegen der Konsistenz. Also wissen wir:  $Q$  ist ein  $W$ -Maß mit der Zähldichte  $Z \cdot B_T$ . Nach den Vorüberlegungen folgt nun aus der Konsistenz, daß  $Q$  ein äquivalentes Martingalmaß ist.

ad (2). Gemäß (\*) gilt auch:  $\Pi(X) = \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) \cdot B_T(\omega) \cdot \check{X}(\omega) = E_Q[\check{X}]$ .

ad (3). Sei nun  $Q \in \mathbb{P}^*$  und  $\Pi$  gemäß (ii) definiert. Dann ist  $\Pi$  ein Preissystem nach 4.5. Von 3.11 wissen wir:  $E_Q[G_T(\xi)] = 0 \quad \forall \xi \in \Xi$ . Jetzt folgt leicht die Konsistenz: Sei nämlich  $\check{X} = x + G_T(\xi)$  für ein  $\xi \in \Xi$ ; dann hat man:  $\Pi(X) = E_Q[\check{X}] = E_Q[x + G_T(\xi)] = x + E_Q[G_T(\xi)] = x$ . Punkt (4) ist offensichtlich.  $\square$

Ein konsistentes Preissystem gewinnt man also über ein Martingalmaß. Es soll nun untersucht werden, wie man zu einem Martingalmaß kommen kann. Wegen  $P(\omega) > 0$  hat jedes Maß  $Q$  eine  $P$ -Dichte  $Z_T$ , also:

$$(4.7) \quad Q[A] = \sum_{\omega \in A} Z_T(\omega) \cdot P(\omega), \text{ d.h. } Z_T = \frac{dQ}{dP}, \quad Z_T(\omega) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}.$$

Es wird sich später erweisen, daß es zweckmäßig ist, zu den Martingalmaßen auch sogenannte signierte Maße zuzulassen. Deswegen betrachten wir zunächst Kandidaten  $Z_T$  für  $P$ -Dichten von  $W$ -Maßen  $Q$ , die auch negative Werte annehmen können. Zuvor soll noch einmal auf den bedingten Erwartungswert eingegangen werden; dabei soll an die Konvention 1.31 erinnert werden. Für bedingte Erwartungswerte empfiehlt sich eine eigene Bezeichnung. Für eine  $Z$ va  $Y$  ist

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \zeta(\omega_t) &:= E[Y | H_t = \omega_t] = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P[\{\omega\} | H_t = \omega_t] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega, H_t(\omega) = \omega_t} Y(\omega) P(\omega) / P[H_t = \omega_t]. \end{aligned}$$

**4.9 Definition.** In der Situation (4.8) schreiben wir  $E[Y | H_t](\omega) := \zeta(H_t(\omega))$ , sowie

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y | H_t] &:= E[Y^2 | H_t] - E[Y | H_t]^2, \\ \text{Cov}[Y, Y' | H_t] &:= E[Y \cdot Y' | H_t] - E[Y | H_t] \cdot E[Y' | H_t]. \end{aligned}$$

Während  $\zeta = E[Y | H_t = \cdot]$  auf  $\Omega_t$  definiert ist, ist  $E[Y | H_t]$  also auf  $\Omega$  erklärt. Gemäß der Konvention 1.31. hätten wir beide Funktionen auch identifizieren können. Dabei ist  $E[Y | H_t]$  gerade der bedingte Erwartungswert bzgl. der durch  $H_t$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra. Es sollen einige einfache Eigenschaften zusammengefaßt werden:

**4.10 Proposition.** Sei  $Y$  eine  $Z$ va und  $\{Z_t\}$  ein adaptierter Prozeß auf  $\Omega$ . Dann gelten:

- (a)  $E[Y] = E[E[Y | H_t]]$ ; allgemeiner  $E[Y | H_m] = E[E[Y | H_t] | H_m]$  für  $m \leq t$ ;
- (b)  $E[Z_t \cdot Y | H_t] = Z_t \cdot E[Y | H_t]$ , insbesondere  $E[Z_t | H_t] = Z_t$ ;
- (c) Ist  $Z_T = dQ/dP$  eine positive Dichte von  $Q$  (bzgl.  $P$  im Sinne von (4.7)), dann gilt die **Bayesformel**:  $E_Q[Y | H_t] = E[Z_T \cdot Y | H_t] / E[Z_T | H_t]$ .

**Beweis.** Es soll nur die Bayesformel gezeigt werden. Es gilt:

$$E_Q[Y | H_t = \omega_t] = E_Q[Y \cdot \mathbf{1}_{\{H_t = \omega_t\}}] / Q[H_t = \omega_t]; \text{ sei } E[Z_T \cdot Y | H_t = \omega_t] / E[Z_T | H_t = \omega_t] =: q(\omega_t).$$

$$\begin{aligned}
& \text{Dann erhalten wir: } E_Q[Y \cdot \mathbf{1}_{\{H_t = \omega_t\}}] = \sum_{\omega \in \Omega, H_t(\omega) = \omega_t} Y(\omega) \cdot Z_T(\omega) P(\omega) \\
& = E[Y \cdot Z_T \cdot \mathbf{1}_{\{H_t = \omega_t\}}] = E[Y \cdot Z_T | H_t = \omega_t] \cdot P[H_t = \omega_t] = q(\omega_t) E[Z_T | H_t = \omega_t] \cdot P[H_t = \omega_t] \\
& = q(\omega_t) E[Z_T \cdot \mathbf{1}_{\{H_t = \omega_t\}}] = q(\omega_t) \cdot Q[H_t = \omega_t]. \quad \square
\end{aligned}$$

**4.11 Lemma.** (a) Seien  $\{Z_t, 0 \leq t \leq T\}$  und  $\{L_t, 1 \leq t \leq T\}$  zwei adaptierte Prozesse mit

$Z_t = \prod_1^t L_m$ ,  $0 \leq t \leq T$ , insbesondere  $Z_0 = 1$ . Dann sind äquivalent:

- (1)  $E[L_t | H_{t-1}] = 1$  auf  $\{Z_{t-1} > 0\}$ ,  $1 \leq t \leq T$ ;
- (2)  $E[Z_t | H_{t-1}] = Z_{t-1}$ ,  $1 \leq t \leq T$ , d.h.  $\{Z_t\}$  ist ein Martingal.
- (3)  $Z_{t-1} = E[Z_T | H_{t-1}]$ ,  $1 \leq t \leq T$ , insbesondere  $E[Z_T] = 1$ .

(b) Sei  $Z_T$  Zva auf  $\Omega$  und  $Z_t := E[Z_T | H_t]$ . Sind  $L_t$  Zva mit  $Z_t = Z_{t-1} \cdot L_t$ ,  $1 \leq t \leq T$ , dann gilt:

$$E[Z_T \cdot \Delta \check{S}_t^k | H_{t-1}] = E[Z_t \cdot \Delta \check{S}_t^k | H_{t-1}] = Z_{t-1} \cdot E[L_t \cdot \Delta \check{S}_t^k | H_{t-1}].$$

(c) In der Situation von (b) sind äquivalent:

- (1)  $E[Z_T \cdot \Delta \check{S}_t^k | H_{t-1}] = 0$ ,
- (2)  $E[L_t \cdot \Delta \check{S}_t^k | H_{t-1}] = 0$  auf  $\{Z_{t-1} > 0\}$
- (3)  $E[Z_t \cdot \check{S}_t^k | H_{t-1}] = Z_{t-1} \cdot \check{S}_{t-1}^k$ , d.h.  $\{Z_t \cdot \check{S}_t^k\}$  ist ein Martingal.

**Beweis.** a) "(a2)  $\Rightarrow$  (a3)". In der Situation  $E[Z_t | H_{t-1}] = Z_{t-1}$ ,  $1 \leq t \leq T$ , ergibt sich mit 4.10:

$$E[Z_n | H_{t-1}] = E[E[Z_n | H_{n-1}] | H_{t-1}] = E[Z_{n-1} | H_{t-1}] \text{ und damit rekursiv:}$$

$$Z_{t-1} = E[Z_T | H_{t-1}], \quad 1 \leq t \leq T, \text{ insbesondere für } t=1: Z_0 = E[Z_T].$$

Ebenso leicht zeigt man mit 4.10: "(a3)  $\Rightarrow$  (a2)", "(a1)  $\Leftrightarrow$  (a2)".

Es liege nun die Situation von (b) vor: Dann ergibt sich für einen adaptierten Prozess  $\{Y_t\}$ :

$$\begin{aligned}
E[Z_T \cdot Y_t | H_{t-1}] &= E[E[Z_T \cdot Y_t | H_t] | H_{t-1}] = E[Y_t \cdot E[Z_T | H_t] | H_{t-1}] \\
&= E[Y_t \cdot Z_t | H_{t-1}] = Z_{t-1} \cdot E[L_t \cdot Y_t | \mathfrak{F}_{t-1}], \text{ also:}
\end{aligned}$$

$$(4.12) \quad E[Z_T \cdot Y_t | H_{t-1}] = E[Z_t \cdot Y_t | H_{t-1}] = Z_{t-1} \cdot E[L_t \cdot Y_t | \mathfrak{F}_{t-1}].$$

Mit  $Y_t \equiv \Delta \check{S}_t^k$  ergibt sich die Aussage von (b).

c) Die Äquivalenz "(c1)  $\Leftrightarrow$  (c2)" folgt direkt aus (b). Mit (b) folgt auch:  $E[Z_T \cdot \Delta \check{S}_t^k | H_{t-1}] = E[Z_t \cdot \Delta \check{S}_t^k | H_{t-1}]$ . Nun ergibt sich "(c1)  $\Leftrightarrow$  (c3)", indem man lediglich  $\Delta \check{S}_t^k = \check{S}_t^k - \check{S}_{t-1}^k$  schreibt.

$\square$

Für einen adaptierten Prozeß  $\{Y_t\}$  läßt sich (4.12) verallgemeinern zu:

$$(4.13) \quad E[Z_T \cdot Y_n | H_{t-1}] = E[Z_n \cdot Y_n | H_{t-1}] = Z_{t-1} \cdot E[L_t \cdot \dots \cdot L_n \cdot Y_n | H_{t-1}], \quad 1 \leq t \leq n \leq T.$$

Aus (4.12) folgt nämlich für  $n > t$ :  $E[Z_T \cdot Y_n | H_{t-1}] = E[E[Z_T \cdot Y_n | H_{n-1}] | H_{t-1}] = E[E[Z_n \cdot Y_n | H_{n-1}] | H_{t-1}] = E[Z_n \cdot Y_n | H_{t-1}]$ .

**4.14 Satz.** Sei  $Q$  ein Maß auf  $\Omega$ ; dann sind äquivalent:

(1)  $Q \in \mathbb{P}^*$ .

(2) Es existiert ein adaptierter Prozeß  $\{L_t, 0 \leq t \leq T\}$  mit  $\frac{dQ}{dP} = \prod_{t=1}^T L_t$ , wobei für  $1 \leq t \leq T$  gilt:

$$(4.15a) \quad L_t > 0, E[L_t | H_{t-1}] = 1, E[L_t \cdot \Delta \check{S}_t^k | H_{t-1}] = 0, 1 \leq k \leq d.$$

(3) Es existiert ein Martingal  $(M_t^Q, 0 \leq t \leq T)$  (bzgl.  $P$ ) mit  $M_0^Q = 0$ ,  $\frac{dQ}{dP} = \prod_{t=1}^T (1 + \Delta M_t^Q)$ ; dabei gilt für  $1 \leq t \leq T$ :

$$(4.15b) \quad \Delta M_t^Q > -1, E[(1 + \Delta M_t^Q) \cdot \Delta \check{S}_t^k | H_{t-1}] = 0, 1 \leq k \leq d.$$

(4) Es existiert ein Martingal  $\{Z_t, 0 \leq t \leq T\}$  (bzgl.  $P$ ) mit  $\frac{dQ}{dP} = Z_T$ ,  $Z_0 = 1$ ; dabei gilt für  $1 \leq t \leq T$ :

$$(4.15c) \quad Z_t > 0, \text{ auch } \{Z_t \cdot \check{S}_t^k\} \text{ ist } P\text{-Martingal}, 1 \leq k \leq d.$$

**Beweis.** "(1)  $\Rightarrow$  (2)" Mit  $Z_T(\omega) := Q(\omega)/P(\omega) > 0$  gilt auch:  $Z_t := E[Z_T | H_t] > 0$ . Aus der Bayesformel erhalten wir:  $E_Q[\Delta \check{S}_t^k | H_{t-1}] = E[Z_T \cdot \Delta \check{S}_t^k | H_{t-1}] / Z_{t-1} = 0$ . Wir definieren

$$L_1 := E[Z_T | H_1], L_1 \cdot \dots \cdot L_{t-1} \cdot L_t := E[Z_T | H_t].$$

Nach Konstruktion gilt:  $L_t > 0$ . Wegen  $Z_T = E[Z_T | H_T]$  folgt:  $Z_T = L_1 \cdot \dots \cdot L_T$ .

Die erste Eigenschaft in (4.15a) folgt nun aus 4.11a und die zweite aus 4.11c.

"(2)  $\Leftrightarrow$  (3)" Setze  $\Delta M_t^Q := L_t - 1$ .

"(2)  $\Rightarrow$  (4)" Setze  $Z_t = \prod_{m=1}^t L_m$ . Mit 4.11c folgt nun wieder die Behauptung.

"(4)  $\Rightarrow$  (1)" Wegen  $E[Z_T] = E[Z_0] = 1$  ist  $Z_T$  Dichte eines  $W$ -Maßes  $Q$  bzgl  $P$  und wegen der Martingaleigenschaft gilt:  $E[Z_T | H_t] = Z_t$ . Aus 4.11c und der Voraussetzung erhalten wir:

$$E[Z_T \cdot \Delta \check{S}_t^k | H_t] = 0 \text{ und wegen der Bayesformel: } E_Q[\Delta \check{S}_t^k | H_{t-1}] = 0. \quad \square$$

In der Situation von 4.14 gilt nach dem Beweis (mit der Konvention 1.31):

$$(4.16) \quad Z_t = \prod_{m=1}^t (1 + \Delta M_m^Q) = \prod_{m=1}^t L_m, \text{ mit} \\ Z_t(\omega_t) = Q[H_t = \omega_t] / P[H_t = \omega_t] \quad \forall \omega_t.$$

Die letzte Beziehung folgt dabei mit (4.12) aus:  $Q[H_t = \omega_t] = E[Z_T \cdot \mathbf{1}_{\{\omega_t\}}(H_t)] =$

$$E[Z_t \cdot \mathbf{1}_{\{\omega_t\}}(H_t)] = E[Z_t(\omega_t) \cdot \mathbf{1}_{\{\omega_t\}}(H_t)] = Z_t(\omega_t) P[H_t = \omega_t].$$

Der Prozeß  $(Z_t, 0 \leq t \leq T)$  heißt *Dichte-Prozeß*. Der Prozeß  $\{\prod_{m=1}^t (1 + \Delta M_m^Q), 0 \leq t \leq T\} =: \check{\mathcal{E}}(M)$  heißt *exponentielles Martingal* [von Doléans–Dade] und ist wie  $\{M_t^Q\}$  ein Martingal. Das positive Martingal  $(Z_t, 0 \leq t \leq T)$  läßt sich also als exponentielles Martingal schreiben. Mit Hilfe von



$\{M_t^Q\}$  läßt sich die Eigenschaft  $E[L_t | \mathcal{H}_{t-1}] = 1$  als Martingaleigenschaft formulieren.

**4.17 Bayesformel.** Sei  $Q \in \mathbb{P}^*$  und es liege die Situation 4.14(2) vor. Dann gilt:

$$E_Q[Y | \mathcal{H}_t] = E[Y \cdot \prod_{m=t+1}^T L_m | \mathcal{H}_t] \quad \text{für jede Zva } Y.$$

**Beweis:** In der Situation (4.16) haben wir gemäß 4.10(c):

$$E_Q[Y | \mathcal{H}_t] = E[Y \cdot Z_T | \mathcal{H}_t] / E[Z_T | \mathcal{H}_t] = E[Y \cdot Z_T | \mathcal{H}_t] / Z_t = E[Y \cdot Z_T / Z_t | \mathcal{H}_t]. \quad \square$$

#### 4.18 Beispiel (Girsanov–Transformation)

Um ein Martingalmaß für den Fall  $d=1$  gemäß (4.15a) zu finden, machen wir den Ansatz:

$$\begin{aligned} \mu_{t-1} &:= E[\Delta \check{S}_t | \mathcal{H}_{t-1}], \quad \tau_{t-1}^2 := \text{Var}[\Delta \check{S}_t | \mathcal{H}_{t-1}], \quad \Delta M_t = \Delta \check{S}_t - \mu_{t-1}, \\ L_t &= 1 - \alpha_{t-1} \cdot \Delta M_t, \quad \text{mit einem adaptierten Prozeß } \{\alpha_t\}. \end{aligned}$$

Damit ist die Eigenschaft  $E[L_t | \mathcal{H}_{t-1}] = 1$  bereits gesichert. Die Forderung  $E[L_t \cdot \Delta \check{S}_t | \mathcal{H}_{t-1}] = 0$

führt zu:  $0 = \mu_{t-1} - \alpha_{t-1} \cdot E[\Delta M_t \cdot \Delta \check{S}_t | \mathcal{H}_{t-1}] = \mu_{t-1} - \alpha_{t-1} \cdot E[\Delta M_t \cdot \Delta M_t | \mathcal{H}_{t-1}] = \mu_{t-1} - \alpha_{t-1} \cdot \tau_{t-1}^2$ , also:  $\alpha_{t-1} = \mu_{t-1} / \tau_{t-1}^2$ .

Zum selben Ergebnis führt der Ansatz:

$$L_t = a_{t-1} \cdot \Delta \check{S}_t + b_{t-1}, \quad \text{wobei } \{a_t\} \text{ und } \{b_t\} \text{ adaptierte Prozesse sind.}$$

Für  $L_t$  ergibt sich somit:

$$L_t = 1 - \frac{\mu_{t-1}}{\tau_{t-1}^2} \cdot \Delta M_t = 1 - \frac{\mu_{t-1}}{\tau_{t-1}} \cdot \frac{\Delta \check{S}_t - \mu_{t-1}}{\tau_{t-1}} =: 1 - \frac{\mu_{t-1}}{\tau_{t-1}} \cdot \Delta W_t,$$

wenn man die standardisierte Zva  $\Delta W_t$  wie in (3.5), (3.7) gemäß  $\Delta \check{S}_t = \mu_{t-1} + \tau_{t-1} \cdot \Delta W_t = \check{S}_{t-1} \cdot \{\check{b}_{t-1} + \check{\sigma}_{t-1} \cdot \Delta W_t\}$  wählt. Problematisch ist hier die Forderung:  $L_t > 0$  (vgl. auch 9.36e). Sie ist erfüllt, wenn die Störungen  $\Delta W_t$  nicht zu groß sind. Als einfache Bedingung für " $L_t > 0$ " hat man offenbar:

$$(4.18) \quad (\mu_{t-1} / \tau_{t-1}) \cdot \Delta W_t = (\check{b}_{t-1} / \check{\sigma}_{t-1}) \cdot \Delta W_t < 1.$$

Der Name Girsanov–Transformation wird gebraucht, wenn wie hier  $\Delta M_t^Q = -\alpha_{t-1} \Delta M_t$ , also:

$M_t^Q = -\sum_{m=1}^t \alpha_{m-1} \Delta M_m$  gilt;  $\{M_t^Q\}$  ist somit ein stochastisches Integral mit  $\{M_t\}$  als Integrator. Dabei ergibt sich  $\{M_t\}$  aus der Semimartingaldarstellung von  $\{\check{S}_t\}$ ; dies wird noch in §10 erläutert.  $\square$

#### 4.20 Beispiel (exponentielle Zentrierung, Esscher–Transformation).

Wir machen wieder für  $d=1$  unter geeigneten Integrierbarkeitsbedingungen für  $L_t$  den Ansatz:

$$L_t = \exp\{a_{t-1} \cdot \Delta \check{S}_t + b_{t-1}\} \quad \text{mit adaptierten Prozessen } \{a_t\}, \{b_t\}.$$

Es bezeichne  $\psi(s)$  die momentenerzeugende Funktion der bedingten Verteilung von  $\Delta\check{S}_t$ , also

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto \psi(s) = \psi_{t-1}(s | \omega_{t-1}) := E[\exp\{s \cdot \Delta\check{S}_t\} | H_{t-1} = \omega_{t-1}].$$

Wegen der Endlichkeit von  $\Omega$  gilt:  $\psi(s) < \infty, \forall s \in \mathbb{R}$ . Der Fall  $P[\Delta\check{S}_t \neq 0 | H_{t-1} = \omega_{t-1}] = 0$  ist nicht interessant. Im anderen Fall gilt bei Arbitragefreiheit gemäß 4.2(3):  $P[\Delta\check{S}_t < 0 | H_{t-1} = \omega_{t-1}] > 0$  und  $P[\Delta\check{S}_t > 0 | H_{t-1} = \omega_{t-1}] > 0$ . Diese Eigenschaften führen zu:  $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \psi(s) = \infty$ . Dann hat  $\psi$  ein Minimum etwa bei  $s^*$ , und es gilt:  $\psi'(s^*) = 0 = E[\Delta\check{S}_t \cdot \exp\{s^* \cdot \Delta\check{S}_t\} | H_{t-1}]$ . Nun kann man setzen:

$$L_t = \exp\{s^* \cdot \Delta\check{S}_t\} / \psi(s^*), \text{ also } a_{t-1} := s^* \text{ und } \exp\{b_{t-1}\} := 1 / \psi(s^*).$$

Auf diese Weise kann ebenfalls der erste Fundamentalsatz gezeigt werden.

Ist  $\{\check{S}_t\}$  eine geometrische Irrfahrt, also etwa  $\check{S}_t = S_0 \cdot \exp\{\sum_{m=1}^t \Delta Y_m\}$ , so ist auch der Ansatz  $L_t = \exp\{a_{t-1} \cdot \Delta Y_t + b_{t-1}\}$  zweckmäßig.  $\square$

#### 4.21 Beispiel (Numeraire–Portfolio).

Sei der Einfachheit halber wieder  $d=1$ . Um ein Martingalmaß gemäß 4.14(2) zu finden, führt auch der folgende Ansatz zu einem interessanten Maß:

$$L_t = (1 + a_{t-1} \cdot \Delta\check{S}_t)^{-1}, \text{ mit einem adaptierten Prozeß } \{a_t\}.$$

Man kann zeigen, daß im vorliegenden Fall  $|\Omega| < \infty$  und damit  $|\sum_t(\omega_{t-1})| < \infty$  der Ansatz zu genau einem  $a_{t-1}$  führt. Man sieht leicht, daß gilt:

$$Z_T = \prod_{t=1}^T L_t = 1 / \check{V}_T^\xi(1) \text{ für einen gewissen Plan } \xi \in \Xi.$$

Damit erhält man für  $dQ/dP := Z_T$ :

$$(4.22) \quad E_Q[\check{X}] = E[Z_T \cdot \check{X}] = E[X / \check{V}_T^\xi(1)].$$

Dieses erlaubt nun die folgende interessante Interpretation. Man kann  $1/\check{V}_T^\xi(1)$  als Diskontierungsfaktor und  $\check{V}_T^\xi(1)$  somit als Numeraire auffassen. Während  $B_T$  den Wert von 1 Geldeinheit z.Zt. T angibt, die man z.Zt. 0 auf das Sparbuch gibt, gibt  $\check{V}_T^\xi(1)$  den Wert von 1 Geldeinheit z.Zt. T an, die man z.Zt. 0 gemäß dem Plan  $\xi$  investiert. Wenn  $\check{V}_T^\xi(1) > 0$  gilt – diese Eigenschaft will man ja auch wegen  $Z_T = 1 / \check{V}_T^\xi(1) > 0$  haben –, so kann man  $1 / \check{V}_T^\xi(1)$  durchaus als Diskontierungsfaktor rechtfertigen. Mit  $\xi \equiv 0$  erhielte man gerade den klassischen Fall  $\check{V}_T^0(1) = B_T$ . Dann bedeutet (4.22), daß man den Maßwechsel  $P \rightarrow Q$  auch durch einen Wechsel des Diskontierungsfaktors  $B_T \rightarrow \check{V}_T^\xi(1)$  ersetzen kann unter Beibehaltung des Maßes P, das ja das tatsächliche Marktverhalten beschreibt und dessen Parameter durch Beobachtung des Marktes geschätzt werden können.  $\square$

### Vergleich mit dem Binomialmodell.

Auf Grund der Endlichkeit von  $\Omega$  wissen wir:

$$(4.23) \quad d \cdot \check{S}_{t-1} \leq \check{S}_t \leq u \cdot \check{S}_{t-1} \quad \text{für gewisse Zahlen } 0 < d < 1 < u < \infty.$$

Es sei  $B_t = (1+r)^t$ . Nun betrachten wir Zahlungsansprüche der Form

$$(4.24) \quad \check{X} = h(\check{S}_T) \quad \text{mit } h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ konvex.}$$

Ein Beispiel ist der diskontierte Zahlungsanspruch  $\check{X} = (\check{S}_T - \check{K})^+$  zu einer europäischen Kaufoption. Nach Satz 4.6 bedeutet eine Bewertung des Zahlungsanspruchs die Berechnung von

$$E_Q[\check{X}] = E_Q[h(\check{S}_T)] \quad \text{mit einem Martingalmaß } Q \in \mathbb{P}^*.$$

Dabei soll eine Beziehung zum Binomialmodell wie in §2 hergestellt werden; wir bezeichnen die zugehörigen Größen mit "\*", also etwa  $E^* = \{d, u\}$ ,  $S_0^* = S_0$ .

$$\check{S}_t^*/\check{S}_{t-1}^* \in \{d, u\} \quad \text{und } P^* \text{ das eindeutige Martingalmaß dazu.}$$

Aufgrund von (4.23) und (4.24) erhält man:

$$h(\check{S}_t) \leq \frac{u \cdot \check{S}_{t-1} - \check{S}_t}{u \cdot \check{S}_{t-1} - d \cdot \check{S}_{t-1}} h(d \cdot \check{S}_{t-1}) + \frac{\check{S}_t - d \cdot \check{S}_{t-1}}{u \cdot \check{S}_{t-1} - d \cdot \check{S}_{t-1}} h(u \cdot \check{S}_{t-1}).$$

Aus der Martingaleigenschaft ergibt sich:

$$E_Q[h(\check{S}_t) | H_{t-1}] \leq \frac{u-1}{u-d} h(d \cdot \check{S}_{t-1}) + \frac{1-d}{u-d} h(u \cdot \check{S}_{t-1}) =: h^{[1]}(\check{S}_{t-1}),$$

und andererseits:  $E_{P^*}[h(\check{S}_t^*) | H_{t-1}^*] = h^{[1]}(\check{S}_{t-1}^*)$  [vgl. 2.1, 2.2].

Nun ist  $h^{[1]}$  wieder konvex und man erhält:

$$\begin{aligned} E_Q[h(\check{S}_t) | H_{t-2}] &\leq E_Q[h^{[1]}(\check{S}_{t-1}) | H_{t-2}] \\ &\leq \frac{u-1}{u-d} h^{[1]}(d \cdot \check{S}_{t-2}) + \frac{1-d}{u-d} h^{[1]}(u \cdot \check{S}_{t-2}) =: h^{[2]}(\check{S}_{t-2}), \end{aligned}$$

und andererseits:  $E_{P^*}[h(\check{S}_t^*) | H_{t-2}^*] = E_{P^*}[h^{[1]}(\check{S}_{t-1}^*) | H_{t-2}^*] = h^{[2]}(\check{S}_{t-2}^*)$ .

Mit vollständiger Induktion und  $E[\dots] = E[\dots | H_0]$  erhält man:

$$E_Q[h(\check{S}_T)] = E[Z_T \cdot h(\check{S}_T)] \leq E_{P^*}[h(\check{S}_T^*)], \quad \text{also:}$$

$$(4.25) \quad E_Q[\check{X}] \leq E_{P^*}[\check{X}^*] \quad \forall Q \in \mathbb{P}^*.$$

Für eine europäische Kaufoption mit Wahrnehmungspreis  $K = B_T \cdot \check{K}$  ergibt sich also:

$$E_Q[(S_T - K)^+/B_T] = E_Q[(\check{S}_T - \check{K})^+] \leq E_{P^*}[(\check{S}_T^* - \check{K})^+].$$

**4.26 Satz.** In der obigen Situation gilt für eine europäische Kaufoption mit  $\check{K} = K/B_T$ :

$$\bar{\pi}(X) := \sup \{ E_Q[(\check{S}_T - \check{K})^+]; Q \in \mathbb{P}^{*1}(P) \} \leq E_{P^*}[(\check{S}_T^* - \check{K})^+];$$

dabei ist  $E_{P^*}[(\check{S}_T^* - \check{K})^+]$  die Bewertungsformel im Binomialmodell.

Wählt man also den Preis nach dem Binomialmodell, wobei  $u$  und  $d$  als "Extremwerte", also gemäß  $d = \inf \check{S}_t/\check{S}_{t-1}$ ,  $u = \sup \check{S}_t/\check{S}_{t-1}$ , so ist dieser Preis eine obere Schranke für eine Bewertung nach einem konsistenten Preissystem.

Nun soll noch eine Charakterisierung der Vollständigkeit eines arbitragefreien Marktes gegeben werden. Dazu benutzen wir, daß die Vollständigkeit äquivalent mit der Eindeutigkeit eines Martingalmaßes ist. Martingalmaße wiederum wurden in 4.14 charakterisiert. Die Eindeutigkeit spiegelt sich in der Eindeutigkeit der multiplikativen Zerlegung der Dichte wieder.

**4.27 Lemma.** Seien  $Q$  und  $Q'$  zwei Martingalmaße mit  $\frac{dQ}{dP} = \prod_{t=1}^T L_t$  und  $\frac{dQ'}{dP} = \prod_{t=1}^T L'_t$ , wobei  $L_t$  und  $L'_t$  wie in 4.15a und gemäß 1.31 als Funktionen auf  $\Omega_t$  gewählt werden, dann gilt:

$$Q = Q' \Leftrightarrow L_t = L'_t \quad \forall 1 \leq t \leq T.$$

**Beweis:** Offenbar braucht nur " $\Rightarrow$ " gezeigt werden. Nun gilt aber nach (4.16) :

$Q[H_t = \omega_t] = Z_t(\omega_t) P[H_t = \omega_t]$ ; also: " $Q = Q' \Rightarrow \zeta_t = \zeta'_t$ ". Mit Induktion nach  $t$  folgt nun die Behauptung.  $\square$

Wir setzen:

$$(4.28) \quad \begin{aligned} \Omega_t(\omega_{t-1}) &:= \{ \omega_t \in \Omega_t; P[H_t = \omega_t | H_{t-1} = \omega_{t-1}] > 0 \} \\ &= \{ \omega_t \in \Omega_t; \{ H_t = \omega_t, H_{t-1} = \omega_{t-1} \} \neq \emptyset \}, \quad \Omega_1(\omega_0) := \Omega_1. \end{aligned}$$

In der typischen Situation 1.32 kann  $\Omega_t(\omega_{t-1})$  mit  $E$  identifiziert werden; denn wir haben:

$$(4.29) \quad \Omega_t = E^t \Rightarrow \Omega_t(\omega_{t-1}) = \{ (\omega_{t-1}, i) \in \Omega_t; i \in T \}.$$

**4.30 Lemma.** Es soll wieder  $\check{S}_t$  gemäß 1.31 als Funktionen auf  $\Omega_t$  aufgefaßt werden. Ist der Markt arbitragefrei, so sind äquivalent:

- (1) es gibt genau ein äquivalentes Martingalmaß;
- (2) für alle  $1 \leq t \leq T$ ,  $\omega_{t-1} \in \Omega_{t-1}$  hat das folgende lineare Gleichungssystem in  $L_t(\omega_t)$ ,  $\omega_t \in \Omega_t(\omega_{t-1})$ , eine eindeutige Lösung:
  - (a)  $\sum_{\omega_t \in \Omega_t(\omega_{t-1})} L_t(\omega_t) P[H_t = \omega_t | H_{t-1} = \omega_{t-1}] = 1$ ,
  - (b)  $\sum_{\omega_t \in \Omega_t(\omega_{t-1})} L_t(\omega_t) \check{S}_t^k(\omega_t) P[H_t = \omega_t | H_{t-1} = \omega_{t-1}] = \check{S}_{t-1}^k(\omega_{t-1})$ ,  $1 \leq k \leq d$ ;
- (3) für alle  $1 \leq t \leq T$ ,  $\omega_{t-1} \in \Omega_{t-1}$ , und ein beliebiges  $\omega_t^* \in \Omega_t(\omega_{t-1})$  hat das folgende lineare Gleichungssystem in  $L_t(\omega_t)$ ,  $\omega_t \in \Omega_t(\omega_{t-1})$ ,  $\omega_t \neq \omega_t^*$ , eine eindeutige Lösung: Für  $1 \leq k \leq d$ :
 
$$\sum_{\omega_t \in \Omega_t(\omega_{t-1}), \omega_t \neq \omega_t^*} L_t(\omega_t) [\check{S}_t^k(\omega_t) - \check{S}_t^k(\omega_t^*)] P[H_t = \omega_t | H_{t-1} = \omega_{t-1}] = \check{S}_{t-1}^k(\omega_{t-1}) - \check{S}_t^k(\omega_t^*) ;$$
- (4) für alle  $1 \leq t \leq T$ ,  $\omega_{t-1} \in \Omega_{t-1}$ , und ein beliebiges  $\omega_t^* \in \Omega_t(\omega_{t-1})$  sind
 
$$\{ \check{S}_t(\omega_t) - \check{S}_t(\omega_t^*); \omega_t \in \Omega_t(\omega_{t-1}), \omega_t \neq \omega_t^* \}$$
 linear unabhängig.

**Beweis:** a) Wegen der Arbitragefreiheit können wir nach 4.14 die Situation (2) mit  $L_t > 0$  voraussetzen. Wir haben also:

" $\mathbb{P}^* \neq \emptyset$ "  $\Rightarrow$  "das Gleichungssystem in (2) hat eine Lösung mit  $L_t > 0$ "  $\Rightarrow$  das Gleichungssystem in (2) hat eine Lösung"  $\Leftrightarrow$  "das Gleichungssystem in (3) hat eine Lösung".

Für die letzte Beziehung " $\Rightarrow$ " multipliziert man (2a) mit  $\check{S}_t^k(\omega_t^*)$ . Ist andererseits  $L_t(\omega_t)$ ,  $\omega_t \in \Omega_t(\omega_{t-1})$ ,  $\omega_t \neq \omega_t^*$ , eine Lösung von (3) und definiert man  $L_t(\omega_t^*)$  über (2a), so ist  $L_t(\omega_t)$ ,  $\omega_t \in \Omega_t(\omega_{t-1})$ , Lösung von (2).

b)

"(2)  $\Leftrightarrow$  (3)" Verschiedene Lösungen in (2) müssen sich mindestens in zwei Argumenten unterscheiden. Somit ergeben sich auch verschiedene Lösungen in (3). Umgekehrt gewinnt man aus zwei verschiedenen Lösung von (3) auch zwei verschiedene Lösungen von (2).

Die Äquivalenz von (3) und (4) ist wohl bekannt. Denn die Existenz einer Lösung in (3) ist nach a) gesichert.

Die Richtung "(2)  $\Rightarrow$  (1)" ist ebenfalls klar in Hinblick auf 4.27.

"(1)  $\Rightarrow$  (4)" Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an:  $\exists t, \omega_{t-1}, \omega_t^*$ , sodaß  $\{ \check{S}_t(\omega_t) - \check{S}_t(\omega_t^*); \omega_t \in \Omega_t(\omega_{t-1}), \omega_t \neq \omega_t^* \}$  linear abhängig sind. Dann existieren nach den bisherigen Überlegungen zwar zwei Lösungen von (2); aber wir wissen noch nicht, ob es zwei positive Lösungen gibt.

Zunächst existiert eine nicht verschwindene Lösung  $\{ \alpha(\omega_t); \omega_t \in \Omega_t(\omega_{t-1}), \omega_t \neq \omega_t^* \}$  von

$$\sum_{\omega_t \in \Omega_t(\omega_{t-1}), \omega_t \neq \omega_t^*} \alpha(\omega_t) \cdot [\check{S}_t^k(\omega_t) - \check{S}_t^k(\omega_t^*)] \cdot P[H_t = \omega_t | H_{t-1} = \omega_{t-1}] \\ \left[ = \sum_{\omega_t \in \Omega_t(\omega_{t-1})} \dots \right] = 0.$$

Wir definieren  $\alpha(\omega_t^*)$  über die Beziehung:

$$\sum_{\omega_t \in \Omega_t(\omega_{t-1})} \alpha(\omega_t) \cdot P[H_t = \omega_t | H_{t-1} = \omega_{t-1}] = 0,$$

Wir haben auch:

$$\sum_{\omega_t \in \Omega_t(\omega_{t-1})} \check{S}_t^k(\omega_t) \cdot \alpha(\omega_t) \cdot P[H_t = \omega_t | H_{t-1} = \omega_{t-1}] = 0.$$

Durch Multiplikation mit einer Konstanten kann man erreichen, daß gilt:

$$|\alpha(\omega_t)| < L_t(\omega_t) \quad \forall \omega_t \in \Omega_t(\omega_{t-1}).$$

Dann haben wir

$$\sum_{\omega_t \in \Omega_t(\omega_{t-1})} (L_t(\omega_t) + \alpha(\omega_t)) P[H_t = \omega_t | H_{t-1} = \omega_{t-1}] = 1,$$

$$\sum_{\omega_t \in \Omega_t(\omega_{t-1})} (L_t(\omega_t) + \alpha(\omega_t)) \check{S}_t^k(\omega_t) P[H_t = \omega_t | H_{t-1} = \omega_{t-1}] = \check{S}_{t-1}^k(\omega_{t-1}), \quad 1 \leq k \leq d,$$

mit  $L_t'(\omega_t) := L_t(\omega_t) + \alpha(\omega_t) > 0$ . Gemäß 4.27 haben wir damit ein weiteres Martingalmaß gefunden. Dies ist ein Widerspruch zu (1).  $\square$

**4.31 Bemerkungen.** (a) Man kann offenbar in 4.30 (4)  $\check{S}_t^k(\omega_t)$  durch  $\Delta \check{S}_t^k(\omega_t)$  ( $\omega_t \in \Omega_t(\omega_{t-1}), \omega_t \neq \omega_t^*$ ) ersetzen.

(b) Die Aussage (2) in 4.30 kann man auch als Eindeutigkeit eines Martingalmaßes in einer größeren Klasse beschreiben: es gibt genau ein signiertes Martingalmaß (mit Dichteprozess  $Z_t = \prod_{m=1}^t L_m$ ) im Sinne von 10.31.  $\square$

**4.32 Satz.** Ist der Markt arbitragefrei, so sind äquivalent:

- (1) der Markt ist vollständig;
- (2) es gibt genau ein äquivalentes Martingalmaß;
- (3) für alle  $1 \leq t \leq T$ ,  $\omega_{t-1} \in \Omega_{t-1}$ , und ein beliebiges  $\omega_t^* \in \Omega_t(\omega_{t-1})$  sind

$$\{ \check{S}_t^k(\omega_t) - \check{S}_t^k(\omega_t^*); \omega_t \in \Omega_t(\omega_{t-1}), \omega_t \neq \omega_t^* \} \text{ linear unabhängig.}$$

**Beweis:** Aus 4.30 und dem zweiten Fundamentalsatz 3.30 ergibt sich die Aussage sofort. Man kann auch hier auch einen anderen Beweis von "(1)  $\Leftrightarrow$  (2)" führen. Die Richtung "(2)  $\Rightarrow$  (3)" folgt aus 4.30. Die Beziehung "(1)  $\Rightarrow$  (2)" ist sehr einfach zu sehen, wie der Beweis vom 3.30 zeigt. Schließlich beweist man "(3)  $\Rightarrow$  (1)" wie in Lemma 2.4. Dies soll für den Fall  $T=1$  erläutert werden; dann zeigt sich, daß man den zweiten Fundamentalsatz auf die Tatsache zurückführen kann, daß bei einer Matrix der Spaltenrang gleich dem Zeilenrang ist.

Für  $T=1$ ,  $|\Omega| =: n$  und  $\omega^* \in \Omega$  ist die Aussage 4.32 gleichbedeutend mit:

(\*) Die Vektoren  $(\check{S}_1^k(\omega) - \check{S}_1^k(\omega^*), \omega \in \Omega \setminus \{\omega^*\}) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $1 \leq k \leq d$ , spannen den  $\mathbb{R}^{n-1}$  auf.

Betrachtet man nun für ein  $(\check{X}(\omega), \omega \in \Omega) \in \mathbb{R}^n$  das Gleichungssystem in  $(x, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ :

$$x + \sum_{k=1}^d \xi^k \Delta S_1^k(\omega) = \check{X}(\omega), \omega \in \Omega,$$

so reicht es wegen  $\Delta S_1^k(\omega) - \Delta S_1^k(\omega^*) = S_1^k(\omega) - S_1^k(\omega^*)$  das Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^d \xi^k (S_1^k(\omega) - S_1^k(\omega^*)) = \check{X}(\omega) - \check{X}(\omega^*), \omega \in \Omega \setminus \{\omega^*\},$$

zu lösen. Dies ist aber gemäß (\*) möglich.  $\square$

**4.33 Korollar.** Notwendige Voraussetzung für die Vollständigkeit des Marktes ist:

- (a)  $|\Omega_t(\omega_{t-1})| \leq d+1$  für alle  $1 \leq t \leq T$ ,  $\omega_{t-1} \in \Omega_{t-1}$ ;  
 (b)  $|\Omega_t| \leq (d+1)^t$ , insbesondere  $|\Omega| \leq (d+1)^T$ .

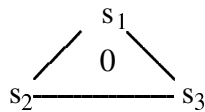
**Beweis:** Da es in  $\mathbb{R}^d$  höchstens  $d$  unabhängige Vektoren gibt, folgt (a) aus 4.32. Ferner haben wir:  $\Omega_t \subset \cup_{\omega_{t-1} \in \Omega_{t-1}} \Omega_t(\omega_{t-1})$ ; somit folgt (b) aus (a) mit Induktion.  $\square$

**4.34 Beispiel.** Man kann analog zu (3.2) für  $d=2$  den folgenden Ansatz machen:

$$\Delta \check{S}_t^k = \check{S}_{t-1}^k \cdot (\check{b}^k + \check{\sigma}^k \cdot \Delta W_t^k) \quad \text{mit gewissen } \check{b}^k > -1, \check{\sigma}^k > 0, k = 1, 2,$$

und die Prozesse  $\{W_t^k\}$  sind jeweils ein (zeitdiskretes) weißes Rauschen. Wird nun ferner angenommen, daß auch die  $\Delta W_t^1, k=1,2$  unabhängig sind und jeweils mindestens zwei Werte annehmen, so nimmt  $(\check{S}_t^1, \check{S}_t^2)$  bei gegebenem  $\omega_{t-1}$  und damit bei gegebenem  $(\check{S}_{t-1}^1, \check{S}_{t-1}^2)$  mindestens vier Werte an. Damit kann diese Modell nicht mehr vollständig sein im Gegensatz zum Fall  $d=1$ . Im zeitstetigen Fall erhält man dagegen ein vollständiges Modell, wenn man die  $\{W_t^k\}, k = 1, 2$  als unabhängige Wienerprozesse wählt und  $\Delta W_t^k$  durch  $dW_t^k$  ersetzt.  $\square$

Für  $d=2, T=1, \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ , also  $|\Omega| = (d+1)^T$ ,  $\Delta S_1(\omega_i) =: s_i, \Sigma_1 = \{s_1, s_2, s_3\}$  liegt gemäß 4.2 Arbitragefreiheit vor, wenn gilt:  $0 \in B(0, \varepsilon) \subset \text{conv}(\{s_1, s_2, s_3\})$ . Vollständigkeit erhält man in Hinblick auf 4.31a, wenn  $s_1 - s_3$  und  $s_2 - s_3$  linear unabhängig sind. Also ist folgendes Bild typisch bei einem vollständigen Markt:



### §5 Modelle mit Transaktionskosten.

Es wird wieder ein Binomial-Modell (mit  $d=1$ ) studiert; wir schreiben deshalb  $S_t^1 =: S_t$ . Dabei soll nun der Fall untersucht werden, daß für den Kauf bzw. Verkauf z.Zt.  $t$  von  $\vartheta$  Einheiten des Wertpapiers mit Kurs  $S_t$  **Transaktionskosten**  $c(\vartheta) \cdot S_t$  anfallen, die proportional zum Wert der  $\vartheta$  Einheiten sind. Dabei sind die Proportionalitätsfaktoren die Kostenraten  $\lambda$  bzw.  $\mu$ . Sei also:

$$(5.1) \quad c(\vartheta) := \lambda \cdot \vartheta^+ + \mu \cdot \vartheta^-, \quad \tau(\vartheta) := \vartheta + c(\vartheta), \quad \vartheta \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } 0 \leq \lambda, \mu < 1.$$

Der Kauf von  $\vartheta$  Einheiten des Wertpapiers z.Zt.  $t$  kostet dann  $\tau(\vartheta) \cdot S_t$ . Bei Transaktionen auf dem Sparkonto sollen keine Transaktionskosten berechnet werden. Offenbar gilt:

**5.2 Lemma.**  $c$  und  $\tau$  sind stetig mit  $c(0) = \tau(0) = 0$ .  $c$  ist auf  $(-\infty, 0]$  antiton und auf  $[0, \infty)$  isoton;  $\tau$  ist streng isoton.

Im Falle von Transaktionskosten sehen die Budgetgleichungen anders aus. Deswegen beschreiben wir einen Plan durch  $(\xi, \eta) = (\xi_t, \eta_t, 0 \leq t < T)$ . Wie bei einem Portfolioplan  $\xi$  beschreibt  $\xi_t \in \mathbb{R}$  die Anteile am Wertpapier, die der Investor z.Zt.  $t$  (nach einer möglichen Umschichtung) hält. Entsprechend stellt  $\eta_t \cdot B_t$  den Wert der Anlage auf dem Sparbuch z.Zt.  $t$  dar; damit ist  $\eta_t$  wieder der Gegenwartswert. Dann beschreibt  $\eta_{t-1} \cdot B_t$  den Wert der Anlage auf dem Sparbuch z.Zt.  $t$  vor einer Umschichtung. Die Kosten für die Umschichtung auf dem Wertpapierkonto werden auf dem Sparbuch angerechnet. Wird kein Geld konsumiert oder zugeschossen, so lautet die Bilanzgleichung für das Sparbuch:

$$\eta_t \cdot B_t = \eta_{t-1} \cdot B_t - \tau(\Delta \xi_t) \cdot S_t.$$

**5.3 Definition.** Ein durch  $(\xi, \eta)$  gegebener Plan heißt **selbstfinanzierend**, wenn gilt:

$$\tau(\Delta \xi_t) \cdot S_t + \Delta \eta_t \cdot B_t = 0 \quad [\Leftrightarrow \quad \tau(\Delta \xi_t) \cdot \check{S}_t + \Delta \eta_t = 0] \quad \text{für } 0 < t < T.$$

**5.4 Lemma.** Für einen durch  $(\xi, \eta)$  gegebenen selbstfinanzierenden Plan gilt:

$$\eta_t = \eta_0 - \sum_{m=1}^t \tau(\Delta \xi_m) \cdot \check{S}_m \quad 0 \leq t < T; \quad \text{damit ist } \eta \text{ durch } \eta_0 \text{ und } \xi \text{ bestimmt.}$$

Es sollen wieder selbstfinanzierende Pläne betrachtet werden. Der zugehörige Wertprozeß ist hier nicht interessant, da die Anteile am Wertpapier nur unter Abrechnung der Transaktionskosten in Geldeinheiten bewertet werden können. Man muß stets den Bestand auf dem Sparbuch und den auf dem Wertpapierkonto separat angeben. Führt man wie im Fall ohne Transaktionskosten die Größe  $\check{V}_t = \check{V}_t^{\xi, \eta} := \eta_t + \xi_t \cdot \check{S}_t$  ein, die hier nur eine formale Rechnungsgröße ist, so lautet die Beziehung in 5.4:

$$\check{V}_t = \check{V}_0 + G_t(\xi) - \sum_{m=1}^t c(\Delta \xi_m) \cdot \check{S}_m \quad \text{mit } G_t(\xi) = \sum_{m=1}^t \xi_{m-1} \cdot \Delta \check{S}_m.$$



Dies entspricht der Beziehung (1.16). Auch bei einem Derivat muß der Zahlungsanspruch durch ein Portfolio  $(\bar{\xi}_T, \bar{\eta}_T)$  spezifiziert werden.

**5.5 Definition.** Ein **Zahlungsanspruch** ist eine 2–dimensionale Zva  $(\bar{\xi}_T, \bar{\eta}_T)$ .

Für einen Zahlungsanspruch  $(\bar{\xi}_T, \bar{\eta}_T)$  müssen  $\bar{\xi}_T$  Anteile des Wertpapiers und  $\bar{\eta}_T \cdot B_T$  Geldeinheiten bereitgestellt werden. Liegen keine Transaktionskosten vor, so kann  $X = \bar{\xi}_T \cdot S_T + \bar{\eta}_T \cdot B_T$  und etwa  $\bar{\xi}_T = 0$  und  $\bar{\eta}_T = \check{X} = X/B_T$  gesetzt werden.

**5.6 Definition.** Ein Zahlungsanspruch  $(\bar{\xi}_T, \bar{\eta}_T)$  heißt **erreichbar** oder **duplizierbar** [mit Hilfe von  $(\xi, \eta)$ ], wenn gilt: Es existiert ein selbstfinanzierender Plan  $(\xi, \eta)$  mit

$$\begin{aligned} \tau(\bar{\xi}_T - \xi_{T-1}) \cdot \check{S}_T + \bar{\eta}_T - \eta_{T-1} &= 0 \\ (\Leftrightarrow \bar{\eta}_T \cdot B_T = \eta_{T-1} \cdot B_T - \tau(\bar{\xi}_T - \xi_{T-1}) \cdot S_T). \end{aligned}$$

In der Situation 5.6 kann sich der Verkäufer bei einer Grundausstattung  $(\xi_0, \eta_0)$  gegen den Zahlungsanspruch  $(\bar{\xi}_T, \bar{\eta}_T)$  absichern, indem er gemäß  $(\xi, \eta)$  investiert. In dem Fall hat er z.Zt. T gerade ein Portfolio  $(\bar{\xi}_T, \bar{\eta}_T)$  zur Verfügung. Das gleiche kann jeder Marktteilnehmer tun.

**5.7 Beispiel.** Bei einer europäischen **Kaufoption** mit Basispreis K ist:

$$\bar{\xi}_T = 1, \quad \bar{\eta}_T = -\check{K} = -K/B_T \quad \text{für } S_T > K, \quad \bar{\xi}_T = 0, \quad \bar{\eta}_T = 0 \quad \text{für } S_T \leq K.$$

Es soll wieder ein **Binomialmodell** wie in §2, gegeben durch die Größen  $S_0$ ,  $0 < d < 1 < u < \infty$ , genauer untersucht und gezeigt werden, daß ein Zahlungsanspruch von einer Kaufoption erreichbar ist mit einer speziellen Wahl von  $\xi$ . Es liege das gleiche T–Perioden–Modell wie in §2 vor, also insbesondere die typische Situation 1.32 mit  $E = \{d, u\}$ . Dabei sei  $I_t(\omega) = i_t$  für  $\omega = (i_1, \dots, i_T)$ ;  $\check{S}_t := I_t \cdot \dots \cdot I_1 \cdot S_0 = I_t \cdot \check{S}_{t-1}$ . Es wird wieder kein W–Maß vorausgesetzt.

$$\check{S}_{t-1}(\omega_{t-1}) \begin{cases} u \cdot \check{S}_{t-1}(\omega_{t-1}) = \check{S}_t(\omega_{t-1}, u) \\ d \cdot \check{S}_{t-1}(\omega_{t-1}) = \check{S}_t(\omega_{t-1}, d) \end{cases}$$

Ist  $(\bar{\xi}_T, \bar{\eta}_T)$  ein Zahlungsanspruch und soll er z.Zt. T–1 durch  $\eta_{T-1}$ ,  $\xi_{T-1}$  dupliziert werden, so erhält man bei gegebener Vorgeschichte  $\omega_{T-1}$  für die zubeschreibenden Größen  $\xi_{T-1}(\omega_{T-1})$ ,  $\eta_{T-1}(\omega_{T-1})$  die folgenden Gleichungen:

$$(5.8) \quad \tau(\xi_{T-1}(\omega_{T-1}, i) - \xi_{T-1}(\omega_{T-1})) \cdot i \cdot \check{S}_{T-1}(\omega_{T-1}) + \eta_{T-1}(\omega_{T-1}, i) - \eta_{T-1}(\omega_{T-1}) = 0, \\ i = u, d,$$

Setzt man zur Abkürzung

$\vartheta = \xi_{T-1}(\omega_{T-1})$ ,  $\vartheta_i := \xi_T(\omega_{T-1}, i)$ ,  $\delta := [\bar{\eta}_T(\omega_{T-1}, d) - \bar{\eta}_T(\omega_{T-1}, u)] / \check{S}_{T-1}(\omega_{T-1})$ ,  
und subtrahiert die beiden Gleichungen in (5.8), so ergibt sich die folgende Gleichung für  $\vartheta$ :

$$(5.9) \quad \tau(\vartheta_u - \vartheta) \cdot u - \tau(\vartheta_d - \vartheta) \cdot d = \delta.$$

Wenn diese Gleichung gelöst ist, so erhält man  $\eta_{T-1}(\omega_{T-1})$  sofort aus (5.8).

**5.10 Lemma.** Für  $\vartheta_u, \vartheta_d \in \mathbb{R}$ ,  $\psi(\vartheta) := \tau(\vartheta_u - \vartheta) \cdot u - \tau(\vartheta_d - \vartheta) \cdot d$  gilt:

(a)  $\psi$  ist stetig und stückweise linear; genauer gilt:

$$\vartheta \geq \max(\vartheta_d, \vartheta_u) \Rightarrow \phi(\vartheta) = \text{const} - (u - d) \cdot (1 - \mu) \cdot \vartheta,$$

$$\vartheta \leq \min(\vartheta_d, \vartheta_u) \Rightarrow \phi(\vartheta) = \text{const} - (u - d) \cdot (1 + \lambda) \cdot \vartheta,$$

$$\vartheta_d \leq \vartheta \leq \vartheta_u \Rightarrow \phi(\vartheta) = \text{const} - [(1 + \lambda) \cdot u - (1 - \mu) \cdot d] \cdot \vartheta,$$

$$\vartheta_u \leq \vartheta \leq \vartheta_d \Rightarrow \phi(\vartheta) = \text{const} - [(1 - \mu) \cdot u - (1 + \lambda) \cdot d] \cdot \vartheta.$$

(b) Es gilt:  $\lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \psi(\vartheta) = -\infty$ ,  $\lim_{\vartheta \rightarrow -\infty} \psi(\vartheta) = +\infty$ .

(c)  $\psi$  ist streng antiton, wenn eine der beiden Bedingungen gilt:  $\vartheta_d \leq \vartheta_u$  oder

$$(5.11) \quad \frac{1 + \lambda}{1 - \mu} < \frac{u}{d}.$$

**Beweis:** Es ist  $\psi(\vartheta) = \vartheta_u \cdot u - \vartheta_d \cdot d - (u - d) \cdot \vartheta + c(\vartheta_u - \vartheta) \cdot u - c(\vartheta_d - \vartheta) \cdot d$ .

Der Beweise von (a) und (b) sind nun einfach und (c) ergibt sich aus (b) wegen:

$$(5.11) \Leftrightarrow (1 - \mu) \cdot u - (1 + \lambda) \cdot d > 0. \quad \square$$

**5.12 Satz.** Jeder Zahlungsanspruch ist erreichbar. Unter der Bedingung (5.11) ist der duplizierende Plan eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Gemäß 5.10a,b existiert nach dem Zwischenwertsatz stets eine Lösung  $\vartheta = \xi_{T-1}(\omega_{T-1})$  von (5.9) und damit auch eine Lösung  $\vartheta = \xi_{T-1}(\omega_{T-1})$ ,  $\eta_{T-1}(\omega_{T-1})$  von (5.8). Unter (5.11) ist gemäß 5.10c die Lösung  $\vartheta$  eindeutig bestimmt. Nun setzt man

$$\vartheta = \xi_{T-2}(\omega_{T-2}), \vartheta_i := \xi_{T-1}(\omega_{T-2}, i), \delta := [\eta_{T-1}(\omega_{T-2}, d) - \eta_{T-1}(\omega_{T-2}, u)] / \check{S}_{T-2}(\omega_{T-2}).$$

Dann existiert wieder eine Lösung  $\vartheta = \xi_{T-2}(\omega_{T-2})$  von (5.9) und damit auch eine Lösung

$$\vartheta = \xi_{T-2}(\omega_{T-2}), \eta_{T-2}(\omega_{T-2}) \text{ von}$$

$$\tau(\xi_{T-1}(\omega_{T-2}, i) - \xi_{T-2}(\omega_{T-2})) \cdot i \cdot \check{S}_{T-2}(\omega_{T-2}) + \eta_{T-1}(\omega_{T-2}, i) - \eta_{T-2}(\omega_{T-2}) = 0, \quad i=u, d, \text{ also}$$

$$\tau(\Delta \xi_{T-1}) \cdot \check{S}_{T-1} + \Delta \eta_{T-1} = 0 \quad \text{bei Vorliegen von } \omega_{T-2}. \text{ Unter (5.11) ist gemäß 5.10c die}$$

Lösung  $\vartheta$  wieder eindeutig bestimmt. Induktiv kann man den duplizierenden Plan konstruieren.

$\square$

Es interessieren insbesondere Zahlungsansprüche  $(\xi_T, \bar{\eta}_T)$  mit  $\xi_T = \xi_T(\check{S}_T)$ ,  $\bar{\eta}_T = \bar{\eta}_T(\check{S}_T)$  und folgenden Monotonieeigenschaften, für die (5.11) nicht benötigt wird:

$$\begin{aligned}
(5.13) \quad & \tilde{\xi}_T(u \cdot s) \geq \tilde{\xi}_T(d \cdot s) \\
& \tau(\tilde{\xi}_T(u \cdot s) - \tilde{\xi}_T(d \cdot s)) \cdot u \cdot s + \tilde{\eta}_T(u \cdot s) - \tilde{\eta}_T(d \cdot s) \geq 0, \\
& \tau(\tilde{\xi}_T(d \cdot s) - \tilde{\xi}_T(u \cdot s)) \cdot d \cdot s + \tilde{\eta}_T(d \cdot s) - \tilde{\eta}_T(u \cdot s) \geq 0, \quad \forall s > 0.
\end{aligned}$$

Die erste Ungleichung ist in Hinblick auf 5.10c interessant. Die zweite Ungleichung besagt etwa: man kommt bei Vorliegen des Preises  $u \cdot s$  nur mit (nichtnegativen) Kosten vom Portfolio  $(\tilde{\xi}_T(d \cdot s), \tilde{\eta}_T(d \cdot s))$  zum Portfolio  $(\tilde{\xi}_T(u \cdot s), \tilde{\eta}_T(u \cdot s))$ . Man kann für diesen Sachverhalt das folgende Symbol verwenden:

$$(\tilde{\xi}_T(u \cdot s), \tilde{\eta}_T(u \cdot s)) \succeq_{u \cdot s} (\tilde{\xi}_T(d \cdot s), \tilde{\eta}_T(d \cdot s)).$$

Ebenso kann man die letzte Ungleichung umschreiben mit:

$$(\tilde{\xi}_T(d \cdot s), \tilde{\eta}_T(d \cdot s)) \succeq_{d \cdot s} (\tilde{\xi}_T(u \cdot s), \tilde{\eta}_T(u \cdot s)).$$

Aus (5.13) erhält man

$$\begin{aligned}
(5.14) \quad & \tau(\tilde{\xi}_T(u \cdot s) - \tilde{\xi}_T(d \cdot s)) \cdot u \cdot s \geq \tilde{\eta}_T(d \cdot s) - \tilde{\eta}_T(u \cdot s) \\
& \geq -\tau(\tilde{\xi}_T(d \cdot s) - \tilde{\xi}_T(u \cdot s)) \cdot d \cdot s \geq 0, \quad s > 0, \quad \text{insbesondere} \\
& \tilde{\eta}_T(u \cdot s) - \tilde{\eta}_T(d \cdot s) \leq 0, \quad s > 0.
\end{aligned}$$

**5.15 Lemma.** In der Situation 5.7 ist (5.13) erfüllt.

**Beweis:** Interessant ist nur der Fall:  $d \cdot s \leq \check{K} < u \cdot s$ .

Dann ist  $(\tilde{\xi}_T(u \cdot s), \tilde{\eta}_T(u \cdot s)) = (1, -\check{K})$  und  $(\tilde{\xi}_T(d \cdot s), \tilde{\eta}_T(d \cdot s)) = (0, 0)$  und es gilt wegen  $\tau(\vartheta) \geq \vartheta$ :  
 $\tau(1) \cdot u \cdot s - \check{K} \geq u \cdot s - \check{K} > 0$ ,  $\tau(-1) \cdot d \cdot s + \check{K} \geq -d \cdot s + \check{K} \geq 0$ .  $\square$

Es soll nun ein selbstfinanzierender Plan  $(\xi, \eta)$  der Gestalt  $\xi_t = \tilde{\xi}_t(\check{S}_t)$ ,  $\eta_t = \tilde{\eta}_t(\check{S}_t)$  konstruiert werden, der einen Zahlungsanspruch mit (5.13) absichert (dupliziert) und zusätzliche Monotonieeigenschaften hat..

**5.16 Proposition.** Unter der Voraussetzung (5.13) existieren Funktionen  $\tilde{\xi}_t : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ ,

$\tilde{\eta}_t : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ ,  $0 \leq t < T$ , sodaß für  $s > 0$ ,  $0 < t \leq T$  gilt:

- (i)  $\tau(\tilde{\xi}_t(j \cdot s) - \tilde{\xi}_{t-1}(s)) \cdot j \cdot s + \tilde{\eta}_t(j \cdot s) - \tilde{\eta}_{t-1}(s) = 0$ ,  $j \in \{d, u\}$ ,
- (ii)  $\tilde{\xi}_t(d \cdot s) \leq \tilde{\xi}_{t-1}(s) \leq \tilde{\xi}_t(u \cdot s)$ .
- (iii)  $\tau(\tilde{\xi}_t(j \cdot s) - \tilde{\xi}_t(i \cdot s)) \cdot j \cdot s + \tilde{\eta}_t(j \cdot s) - \tilde{\eta}_t(i \cdot s) \geq 0$ , d.h.  
 $(\tilde{\xi}_t(j \cdot s), \tilde{\eta}_t(j \cdot s)) \succeq_{\sigma \cdot s} (\tilde{\xi}_t(i \cdot s), \tilde{\eta}_t(i \cdot s))$   $(i, j) \in \{(d, u), (u, d)\}$ .

Es wird hier der Ansatz gemacht, daß die Investitionsentscheidung  $\xi_t$  nur über den gegenwärtigen Preis abhängt in der Form  $\xi_t = \tilde{\xi}_t(\check{S}_t)$ . Die Eigenschaft (i) impliziert, daß der Plan selbstfinanzierend wird. Die Punkte (ii) und (iii) sind Monotonieeigenschaften.

**Beweis:** Wir betrachten erst den Fall  $t=T$ .

Setze  $\xi_T(i \cdot s) =: \vartheta_i$ ,  $\xi_{T-1}(s) =: \vartheta$ ,  $\tilde{\eta}_T(i \cdot s) =: \eta_i$ ,  $\tilde{\eta}_{T-1}(s) =: \eta$ . Dann besagt (5.13):

$\vartheta_u \geq \vartheta_d$ ;  $\tau(\vartheta_u - \vartheta_d) \cdot u \cdot s + \eta_u - \eta_d \geq 0$ ,  $\tau(\vartheta_d - \vartheta_u) \cdot d \cdot s + \eta_d - \eta_u \geq 0$ ; also:

$$(5.17) \quad \vartheta_u \geq \vartheta_d; \quad \tau(\vartheta_u - \vartheta_d) \cdot u \cdot s \geq \eta_d - \eta_u \geq -\tau(\vartheta_d - \vartheta_u) \cdot d \cdot s.$$

Wir suchen eine eindeutige Lösung  $(\vartheta, \eta)$  zu

$$(5.18) \quad \begin{aligned} \tau(\vartheta_u - \vartheta) \cdot u \cdot s + \eta_u - \eta &= 0, \\ \tau(\vartheta_d - \vartheta) \cdot d \cdot s + \eta_d - \eta &= 0, \quad \vartheta \in [\vartheta_d, \vartheta_u]. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich durch Subtraktion als Gleichung für  $\vartheta \in [\vartheta_d, \vartheta_u]$ :

$$(\eta_d - \eta_u)/s = \tau(\vartheta_u - \vartheta) \cdot u - \tau(\vartheta_d - \vartheta) \cdot d =: \psi(\vartheta).$$

Gemäß 5.10 ist  $\psi$  streng antiton und stetig. Aus (5.17) folgt:

$$\phi(\vartheta_d) = \tau(\vartheta_u - \vartheta_d) \cdot u \geq (\eta_d - \eta_u)/s \geq -\tau(\xi_d - \xi_u) \cdot d = \phi(\vartheta_u),$$

also erhält man aus dem Zwischenwertsatz die Existenz eines eindeutigen Wertes  $\vartheta \in [\vartheta_d, \vartheta_u]$

mit  $\vartheta =: \xi_{T-1}(s) \in [\vartheta_d, \vartheta_u]$ ,  $\psi(\vartheta) = (\eta_d - \eta_u)/s$ ,  $\eta = \tilde{\eta}_{T-1}(s)$  bestimmt sich nun aus (5.18).

Nun erfolgt eine **Rückwärtsinduktion nach t**: Die Behauptung gelte für  $t+1$ .

Wir suchen wieder eine Lösung zu (5.18). Dazu reicht wie oben (5.17) nachzuweisen. Dies ist gerade 5.16(iii). Wir setzen wieder:  $\xi_t(\rho \cdot s) =: \vartheta_\rho$ ,  $\xi_{t-1}(s) =: \vartheta$ ,  $\xi_{t+1}(\sigma \cdot \rho \cdot s) =: \vartheta_{\sigma\rho}$ .

Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir:

$$(5.19) \quad \begin{aligned} \vartheta_{dd} \leq \vartheta_d \leq \vartheta_{du} = \vartheta_{ud} \leq \vartheta_u \leq \vartheta_{uu} \quad \text{sowie} \\ \tau(\vartheta_{ud} - \vartheta_d) \cdot u \cdot d \cdot s + \tilde{\eta}_{t+1}(u \cdot d \cdot s) - \tilde{\eta}_t(d \cdot s) &= 0, \\ \tau(\vartheta_{du} - \vartheta_u) \cdot d \cdot u \cdot s + \tilde{\eta}_{t+1}(d \cdot u \cdot s) - \tilde{\eta}_t(u \cdot s) &= 0. \end{aligned}$$

Es folgt durch Subtraktion mit  $\tilde{\eta}_t(i \cdot s) =: \eta_i$ :

$$(\eta_d - \eta_u)/s = [\tau(\vartheta_{ud} - \vartheta_d) - \tau(\vartheta_{du} - \vartheta_u)] \cdot u \cdot d.$$

Zum Nachweis von (5.17), müssen wir also zeigen:

$$\tau(\vartheta_u - \vartheta_d)/d \geq \tau(\vartheta_{ud} - \vartheta_d) - \tau(\vartheta_{du} - \vartheta_u) \geq -\tau(\vartheta_d - \vartheta_u)/u \quad \text{in der Situation (5.19).}$$

Wegen  $d < 1 < u$  und  $\tau(\vartheta_u - \vartheta_d) \geq 0$ ,  $-\tau(\vartheta_d - \vartheta_u) \geq 0$  gemäß (5.19) genügt es zu zeigen:

$$(*) \quad \tau(\vartheta_u - \vartheta_d) \geq \tau(\vartheta_{ud} - \vartheta_d) - \tau(\vartheta_{du} - \vartheta_u) \geq -\tau(\vartheta_d - \vartheta_u) \quad \text{mit } \vartheta_{du} = \vartheta_{ud}.$$

Diese Beziehungen folgen nun aus dem folgenden Lemma.  $\square$

**5.20 Lemma.**  $c$  und  $\tau$  sind subadditiv, d.h. es gilt:

$$c(x+y) \leq c(x) + c(y), \quad \tau(x+y) \leq \tau(x) + \tau(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

**Beweis.** Es genügt  $c$  zu betrachten. Für  $x, y \geq 0$  und  $x, y \leq 0$  ergibt sich sogar Gleichheit. Für  $x \leq 0, y \geq 0$  hat man:  $x \leq x+y \leq y$ ; dann folgt die Beziehung aus:

$$c(x+y) \leq \max(c(x), c(y)) \leq c(x) + c(y). \quad \square$$

Gemäß 5.16(ii) kennen wir das Vorzeichen von  $\xi_t(i \cdot s) - \xi_{t-1}(s)$ . Deswegen ist 5.16(i) gleichbedeutend mit den folgenden zwei **linearen** Gleichungen, die man sofort lösen kann.

$$(5.21) \quad \begin{aligned} (1+\lambda) \cdot (\xi_t(u \cdot s) - \xi_{t-1}(s)) \cdot u \cdot s + \tilde{\eta}_t(u \cdot s) - \tilde{\eta}_{t-1}(s) &= 0, \\ (1-\mu) \cdot (\xi_t(d \cdot s) - \xi_{t-1}(s)) \cdot d \cdot s + \tilde{\eta}_t(d \cdot s) - \tilde{\eta}_{t-1}(s) &= 0, \end{aligned}$$

**5.22 Satz.** Es gelte (5.13) für  $\xi_T, \tilde{\eta}_T$ , und es sei  $\hat{d} := (1-\mu) \cdot d$ ,  $\hat{u} := (1+\lambda) \cdot u$ . Dann gilt  $0 < \hat{d} \leq d < 1 < u \leq \hat{u}$  sowie  $0 < \hat{d} < 1-\mu \leq 1 \leq 1+\lambda < \hat{u}$ , und die folgenden rekursiv definierten Funktionen  $\xi_t : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{\eta}_t : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $0 < t \leq T$  lösen 5.16 (i)–(iii):

$$(5.23) \quad \begin{aligned} \xi_{t-1}(s) &:= [\hat{u} \cdot \xi_t(u \cdot s) - \hat{d} \cdot \xi_t(d \cdot s) + \frac{1}{s} \{ \tilde{\eta}_t(u \cdot s) - \tilde{\eta}_t(d \cdot s) \}] / [\hat{u} - \hat{d}], \\ \tilde{\eta}_{t-1}(s) &:= - [\hat{d} \cdot \tilde{\eta}_t(u \cdot s) - \hat{u} \cdot \tilde{\eta}_t(d \cdot s) + \{ \xi_t(u \cdot s) - \xi_t(d \cdot s) \} \cdot \hat{u} \cdot \hat{d} \cdot s] / [\hat{u} - \hat{d}]. \end{aligned}$$

Dabei ist durch  $\xi_t := \xi_t(\check{S}_t)$ ,  $\eta_t := \tilde{\eta}_t(\check{S}_t)$ ,  $0 \leq t < T$ , ein selbstfinanzierender Plan gegeben, der den Zahlungsanspruch  $(\bar{\xi}_T := \xi_T(\check{S}_T), \bar{\eta}_T := \tilde{\eta}_T(\check{S}_T))$  dupliziert.

**5.24 Korollar.** Bei einer Kaufoption mit Basispreis  $K$  in einem Binomialmodell setzt man:

$$(\bar{\xi}_T(s), \bar{\eta}_T(s)) = \begin{cases} (1, -K) & s > K \\ (0, 0) & \text{für } s \leq K \end{cases}.$$

Definiert man dann  $\xi_t, \tilde{\eta}_t, \xi_t := \xi_t(\check{S}_t), \eta_t := \tilde{\eta}_t(\check{S}_t)$ ,  $0 \leq t < T$ , gemäß 5.22, so ist der Zahlungsanspruch  $(\bar{\xi}_T, \bar{\eta}_T) = (\xi_T(\check{S}_T), \tilde{\eta}_T(\check{S}_T))$  erreichbar mit  $(\xi, \eta)$ .

Aus (5.23) ergibt sich für  $\rho \in \mathbb{R}$ :

$$(5.25) \quad \begin{aligned} \rho \cdot \xi_{t-1}(s) \cdot s + \tilde{\eta}_{t-1}(s) &= \frac{\rho - \hat{d}}{\hat{u} - \hat{d}} \left[ (1+\lambda) \cdot \xi_t(u \cdot s) \cdot u \cdot s + \tilde{\eta}_t(u \cdot s) \right] \\ &+ \frac{\hat{u} - \rho}{\hat{u} - \hat{d}} \left[ (1-\mu) \cdot \xi_t(d \cdot s) \cdot d \cdot s + \tilde{\eta}_t(d \cdot s) \right], \quad \hat{d} < 1-\mu \leq \rho \leq 1+\lambda \leq \hat{u}. \end{aligned}$$

Wir definieren nun ein W–Maß  $P^*$  mit

$$(5.26a) \quad P^*[I_1 = u] = \bar{p}_1 = 1 - P^*[I_1 = d],$$

$$P^*[I_t = u | I_{t-1} = i_{t-1}, \dots, I_1 = i_1] = \bar{p}_{i_{t-1}} = 1 - P^*[I_t = d | I_{t-1} = i_{t-1}, \dots, I_1 = i_1],$$

$$i_m = u, d, 1 \leq m < t.$$

mit

$$(5.26b) \quad \bar{p}_1 = \frac{1 - \hat{d}}{\hat{u} - \hat{d}}, \quad \bar{p}_u = \frac{1 + \lambda - \hat{d}}{\hat{u} - \hat{d}}, \quad \bar{p}_d = \frac{1 - \mu - \hat{d}}{\hat{u} - \hat{d}}.$$

Also bildet  $\{I_1, \dots, I_T\}$  unter  $P^*$  eine Markoff–Kette mit Zustandsraum  $\{d, u\}$ , *Startverteilung*

$(\bar{p}_1, 1 - \bar{p}_1)$  und *Übergangs-Matrix*  $\begin{bmatrix} \bar{p}_u & 1 - \bar{p}_u \\ \bar{p}_d & 1 - \bar{p}_d \end{bmatrix}$  und nicht mehr wie in §2 eine Folge von

unabhängigen und identische verteilten Zva. Dazu definieren wir den Prozeß  $\{\rho_1, \dots, \rho_T\}$  gemäß

$$(5.27) \quad \rho_0 := 1, \rho_t := \rho(I_t) \quad \text{mit} \quad \rho(i) := \begin{cases} 1 + \lambda & i = u \\ \text{für} & \\ 1 - \mu & i = d \end{cases}.$$

**5.28 Proposition.** Es gelte (5.13) für  $\xi_T, \tilde{\eta}_T$ . Sei  $(\xi, \eta)$  der in 5.22 definierte dublizierende Plan. Dann sind die Prozesse  $\{\rho_t \cdot \check{S}_t, 0 \leq t \leq T\}$  und  $\{\xi_t \cdot \rho_t \cdot \check{S}_t + \eta_t, 0 \leq t \leq T\}$  mit  $(\xi_T, \eta_T) = (\xi_T, \tilde{\eta}_T)$  Martingale unter  $P^*$ .

**Beweis.** Sei  $\rho(i)$  wie in 5.27. Dann ist

$$E^*[\rho(I_1) \cdot I_1 \cdot s] = \bar{p}_1 \cdot (1 + \lambda) \cdot u \cdot s + (1 - \bar{p}_1) \cdot (1 - \mu) \cdot d \cdot s = \bar{p}_1 \cdot (\hat{u} - \hat{d}) + \hat{d} \cdot s = s = \rho_0 \cdot s.$$

Ebenso zeigt man für  $\omega_t = (i_1, \dots, i_t)$ :

$$E^*[\rho(I_{t+1}) \cdot I_{t+1} \cdot s | I_t = i_t, \dots, I_1 = i_1] = \rho(i_t) \cdot s = \rho_t(\omega_t) \cdot s.$$

Daraus ergibt sich die erste Behauptung. Aus (5.25) folgt

$$E^*[\xi_1(I_1 \cdot s) \cdot \rho(I_1) \cdot I_1 \cdot s + \tilde{\eta}_1(I_1 \cdot s)] = \xi_0(s) \cdot s + \tilde{\eta}_0(s) = \xi_0(s) \cdot \rho_0 \cdot s + \tilde{\eta}_0(s),$$

$$E^*[\xi_t(I_t \cdot s) \cdot \rho(I_t) \cdot I_t \cdot s + \tilde{\eta}_t(I_t \cdot s) | I_{t-1} = i_{t-1}, \dots, I_1 = i_1]$$

$$= \xi_{t-1}(s) \cdot \rho(i_{t-1}) \cdot s + \tilde{\eta}_{t-1}(s).$$

Daraus ergibt sich die zweite Martingaleigenschaft.  $\square$

In Analogie zu 2.6(i) erhalten wir:

**5.29 Korollar.** Seien  $(\xi_T, \tilde{\eta}_T)$  und  $(\xi, \eta)$  wie in 5.28. Dann gilt:

$$\xi_0 \cdot S_0 + \eta_0 = E^*[\xi_T \cdot \rho_T \cdot \check{S}_T + \tilde{\eta}_T].$$

Dabei ist  $\xi_0 \cdot S_0 + \eta_0$  der Wert des Portfolios z.Zt.  $t=0$ , das man zur Dublizierung des Zahlungsanspruchs  $(\xi_T, \bar{\eta}_T)$  benötigt, ohne etwaige Transaktionskosten für die Erstellung von  $(\xi_0, \eta_0)$ .

**5.30. Definition.** Ein Paar  $(P^*, \rho)$  heißt **äquivalentes (Converter-) Martingalmaß**, wenn gilt:

- (1)  $P^*(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$ ;
  - (2) es ist  $\rho = \{\rho_t\}$  ein adaptierter Prozeß mit
- $$(5.31) \quad 1 - \mu \leq \rho_t \leq 1 + \lambda, \quad 0 \leq t \leq T;$$
- (3)  $\{\rho_t \cdot \check{S}_t\}$  ist ein Martingal unter  $P^*$ .

Nach dieser Definition gilt offenbar:

**5.32 Korollar.** Das in (5.26) und (5.27) definierte Tupel  $(P^*, \rho)$  ist 5.28 zu Folge ein äquivalentes Martingalmaß.

**5.33 Definition.** Ein **Preissystem** ist eine lineare Abbildung  $\pi : \mathbb{R}^{\Omega} \times \mathbb{R}^{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$  mit  $\pi(\xi_T, \bar{\eta}_T) > 0 \quad \forall (\xi_T, \bar{\eta}_T) \in \mathbb{R}^{\Omega} \times \mathbb{R}^{\Omega}$  mit

$$(5.34a) \quad -\bar{\eta}_T + \tau(-\xi_T) \cdot \check{S}_T \leq 0,$$

$$(5.34b) \quad -\bar{\eta}_T(\omega) + \tau(-\xi_T(\omega)) \cdot \check{S}_T(\omega) < 0 \quad \text{für ein } \omega \in \Omega.$$

Die Beziehung besagt, daß eine Umschichtung des Zahlungsanspruchs  $(\xi_T, \bar{\eta}_T)$  auf  $(0,0)$  mit nicht-positiven Kosten, also mit nichtnegativem Konsum möglich ist. Besteht zudem die Chance auf einen positiven Konsum, so sollte ein Kontrakt mit einem solchen Zahlungsanspruch einen positiven Preis haben.

**5.35 Proposition.** Ist  $(P^*, \rho)$  ein äquivalentes Martingalmaß, so ist die durch

$$(5.36) \quad \pi(\xi_T, \bar{\eta}_T) := E^* [\rho_T \cdot \xi_T \cdot \check{S}_T + \bar{\eta}_T]$$

gegebene Abbildung  $\pi : \mathbb{R}^{\Omega} \times \mathbb{R}^{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$  ein Preissystem.

Zum Beweis benötigen wir die folgende Beziehung, die offensichtlich ist:

$$(5.37) \quad \rho \cdot \vartheta \leq \tau(\vartheta) \quad \forall 1 - \mu \leq \rho \leq 1 + \lambda, \vartheta \in \mathbb{R}.$$

**Beweis.** Offenbar ist die Abbildung  $\pi$  linear. Gilt nun (5.34), so hat man wegen (5.37) :

$$-\bar{\eta}_T - \rho_T \cdot \xi_T \cdot \check{S}_T \leq -\bar{\eta}_T + \tau(-\xi_T) \cdot \check{S}_T \leq 0,$$

$$-\bar{\eta}_T(\omega) - \rho_T(\omega) \cdot \xi_T(\omega) \cdot \check{S}_T(\omega) \leq -\bar{\eta}_T(\omega) + \tau(-\xi_T(\omega)) \cdot \check{S}_T(\omega) < 0 \quad \text{für ein } \omega \in \Omega.$$

Daraus folgt wegen 5.30(1):  $E^* [\rho_T \cdot \xi_T \cdot \check{S}_T + \bar{\eta}_T] > 0$ .  $\square$

Mit dem Rieszschen Darstellungssatz kann man auch die Umkehrung von 5.35 zeigen (vgl. Kusuoka 1995, Ann. Appl. Prob.).

Hält man den Fälligkeitstermin  $T$  fest und unterteilt  $[0, T]$  in  $n \cdot T$  Perioden wie in §2, so geben Boyle & Vorst [The Journal of Finance, XLVII, 1992] einen asymptotischen Wert für

$$V_0 := \xi_0 \cdot S_0 + \eta_0 \quad [\text{bei } n \text{ groß, } \lambda = \mu =: c/\sqrt{nT} \text{ klein}] .$$

Er ergibt sich aus der Black–Scholes–Formel mit modifizierter Volatilität:

$$\sigma^2 \left[ 1 + \frac{2c}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \right] .$$

Da die Black–Scholes–Formel isoton in der Volatilität ist, vergrößert sich also bei Transaktionskosten die Prämie für die Option.