Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2015
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

2. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik II, Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Mittwoch 29.04.15 in der Vorlesungspause

---

1. (Bonferroni's Ungleichung)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big) \geq \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq k} \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right).$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Fälle $k = 2$ und $k = 3$.

b) In jeder Packung Corn Flakes befindet sich je eines von insgesamt n verschiedenen Bildern von Fußballspielern, darunter auch 11 Bilder von Spielern aus der Nationalmannschaft. Wer nun die Bilder aller 11 Nationalspieler gesammelt hat, gewinnt eine Reise zur Weltmeisterschaft. Um die Reise auf jeden Fall zu gewinnen, kauft Fred Feuerstein $3n$ Packungen.

Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, tatsächlich die gewünschten Bilder zu erhalten, zwischen $1 - 11 \cdot (1 - \frac{1}{n})^{3n}$ und $1 - 11 \cdot (1 - \frac{1}{n})^{3n} + 55 \cdot (1 - \frac{2}{n})^{3n}$ liegt. Welchen Wert haben diese Schranken ungefähr für große n?

2. (Kolmogorovsche Axiome)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \in \mathcal{A}$.

a) Es gelte $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ und $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$. Zeige: $\frac{1}{12} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$ und demonstriere anhand von Beispielen, dass beide Extremfälle eintreten können.

b) Zeigen Sie , dass falls $A \subset B$,

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A).$$

c) Beweisen Sie, dass, falls $A \cup B = \Omega$ ist, gilt

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A^c)\,\mathbb{P}(B^c).$$

3. (Empirische Maße)
Sei Ω eine endliche Menge. Zeigen Sie:
Für jede Folge $\omega_1, \ldots, \omega_n$ mit $\omega_k \in \Omega$ für $k = 1, \ldots, n$, ist

$$P_{\omega_1,\ldots,\omega_n} \equiv \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{\omega_k}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

4. (Partitionen und Wahrscheinlichkeitsmaße)
Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein endlicher Messraum.

a) Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Partition $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ von Ω existiert mit folgenden Eigenschaften:

   (i) Für alle $k = 1, \ldots, n$ gilt $\pi_k \in \mathcal{A}$;

   (ii) $\bigcup_{i=1}^{n} \pi_n = \Omega$;

   (iii) Für alle $B \in \mathcal{A}$ und alle $k = 1, \ldots, n$, gilt $B \cap \pi_k \in \{\emptyset, \pi_k\}$. Insbesondere gilt für alle $i \neq j$, dass $\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $B \in \mathcal{A}$ eine Darstellung der Form $B = \cup_{j \in J_B} \pi_j$ mit $J_B \subset \{1, \ldots, n\}$ existiert.

c) Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie, dass dann das Maß $\mathbb{P}$ eindeutig durch die Werte $p(i) = \mathbb{P}(\pi_i)$, $i = 1, \ldots, n$, festgelegt ist. Beweisen Sie außerdem, dass es umgekehrt für jede Sammlung von Werten $p(i) \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, mit $\sum_{i=1}^{n} p(i) = 1$ genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, so dass $\mathbb{P}(\pi_i) = p(i)$.