Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2015
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

1. Übungsblatt
„Algorithmische Mathematik II, Stochastik für Lehramt"

Abgabe (Aufgabe 4-7) bis Mittwoch 22.04.15 in der Vorlesungspause

---

Tutoriumsvorschläge

1. (Kombinatorik)
In einem Raum befindet sich ein runder Tisch mit 8 Stühlen, die numeriert sind. Auf wie viele Arten können sich die 4 Ehepaare Bader, Fei, Huber und Müller hinsetzen, wenn

a) es keine zusätzlichen Bedingungen gibt?

b) die 4 Frauen und die 4 Männer nebeneinander sitzen wollen?

c) immer abwechselnd ein Mann und eine Frau sitzen?

d) Ehepaar Fei zusammen sitzt und Ehepaar Müller zusammen sitzt?

e) Frau Bader und Herr Huber zusammen sitzen?

f) Herr Huber und Herr Müller sich gegenüber sitzen?

g) die Ehepaare jeweils nebeneinander sitzen?

2. (Würfel)
Ein fairer Würfel wird drei mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Augensumme 9 bzw. 10? Für beide Ereignisse gibt es genau 6 Möglichkeiten:

$$9 = 6+2+1 = 5+3+1 = 5+2+2 = 4+4+1 = 4+3+2 = 3+3+3$$
$$10 = 6+3+1 = 6+2+2 = 5+4+1 = 5+3+2 = 4+4+2 = 4+3+3\,,$$

und doch sind die Ereignisse nicht gleich wahrscheinlich!

3. (Münzwürfe)
Maria wirft eine Münze $n+1$ mal, und Johannes n mal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält Maria öfter Zahl als Johannes ?

Hausaufgaben

4. (Minimale Algebren)

Finden Sie jeweils die kleinste Algebra auf Ω, welche $\mathcal{M}$ enthält und beweisen Sie, dass diese wirklich minimal ist mit dieser Eigenschaft.

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{M} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}\}$

b) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{M} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$

c) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{M} = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$.

5. (Gleichverteilung)

a) Sei Ω eine endliche Menge. Definiere die Gleichverteilung P auf Ω und zeige durch Überprüfen der Axiome, dass P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

b) In einer Urne befinden sich N Kugeln, von denen K rot sind. Wir ziehen n Kugeln ohne Zurücklegen. Beschreibe dieses Modell durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum. Zeige: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobe k rote Kugeln enthält, ist

$$\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}.$$

6. (De-Méré-Paradoxon)

Welches der folgenden beiden Ereignisse ist wahrscheinlicher:

a) mit 4 Würfen eines fairen Würfels mindestens einmal die 6 zu erhalten,

b) mit 24 Würfen von zwei fairen Würfeln mindestens einmal eine doppelte 6 zu bekommen?

Das Problem stammt von Chevalier de Méré, der mit seinen Spielproblemen und deren Lösungen durch Pascal in die Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie eingegangen ist.

7. (Geburtstagsparadoxon)

In einer Klasse sind n Schüler.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_n, dass mindestens zwei Schüler am selben Tag Geburtstag haben ? Berechne p_{22} und p_{23} explizit. Dabei sei vereinfachend angenommen, dass kein Schüler am 29. Februar geboren ist und alle anderen Geburtstage gleich wahrscheinlich sind.

b) Zeige unter Verwendung der Ungeichung $1 - x \leq \exp(-x)$, dass

$$p_n \geq 1 - \exp\big(-n(n-1)/730\big).$$

Welche untere Schranke ergibt sich für p_{30}?

c) Beweise, dass die Unleichung $1 - x \leq \exp(-x)$ gilt.