Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2016
Prof. Dr. Anton Bovier, Dr. Lisa Hartung

9. Übungsblatt
„Analysis II"

Abgabe bis Donnerstag 30.06.16 in der Vorlesung

---

1. (Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichungen)

a) Überprüfen Sie die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen für die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \exp(z)$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = \sqrt{|xy|}, \quad z = x + iy$$

in $(0, 0)$ partielle Ableitungen besitzt, die die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügen, aber nicht in $(0, 0)$ komplex differenzierbar ist.

2. (Analytische Funktionen)

Sei f eine analytische Funktion auf der Kreisscheibe $B_r(a)$ um a mit Radius r. Zeige, dass f in $B_r(a)$ konstant ist falls $\mathrm{Re}(f)$ oder $\mathrm{Im}(f)$ oder $|f|$ dort konstant ist.

3. (Kurven in $\mathbb{C}$)

a) Skizzieren Sie die Kurve, welche durch

$$\gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{C}, \gamma_1(t) = e^{it}$$

gegeben ist und berechnen Sie

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz.$$

b) Berechnen Sie

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2 - 1} dz.$$

Hinweis: Verwenden Sie eine Partialbruchzerlegung.

4. (Kurvenintegrale)

a) Beweisen Sie die Identität

$$Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(z + \frac{r^2}{z}),$$

wobei $r = |z|$.

b) Verwenden Sie Aufgabenteil a) um für $r > 0$

$$\int_{|z|=r} \mathrm{Re}(z)dz$$

zu berechnen.

c) Verwenden Sie eine Parametrisierung des Kreises mit Radius r um 0 um

$$\int_{|z|=r} \mathrm{Re}(z)dz$$

zu berechnen.