Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2016
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

8. Übungsblatt
„Analysis II"

Abgabe bis Donnerstag 23.06.16 in der Vorlesung

---

1. (Parametrisierung von Kurven)
Berechnen Sie die Länge der folgenden parametrisierten Kurven und fertigen Sie ein Skizze an.

a) $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1 - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$,

b) $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}$,

c) $\gamma_3 : [-a, a] \to \mathbb{R}^2, \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$, für $a > 0$.

2. (Konstruktion von Kurven in der speziellen linearen Gruppe)
Wir betrachten den normierten Raum $SL_{\mathbb{R}}(2)$ aller reellen 2×2 Matrizen mit Determinante 1. Konstruieren Sie Kurven bzw. eine Parametrisierung einer Kurve, welche

a) ein beliebiges $A \in SL_{\mathbb{R}}(2)$ mit einer Matrix $B \in SL_{\mathbb{R}}(2)$ mit positiven Diagonaleinträgen verbindet.

Hinweis: Verwenden Sie die Drehmatrizen

$$\begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}.$$

b) eine Matrix $B \in SL_{\mathbb{R}}(2)$ mit positiven Diagonaleinträgen mit einer Diagonalmatrix $C \in SL_{\mathbb{R}}(2)$ mit positiven Diagonaleinträgen verbindet.

c) eine Diagonalmatrix $C \in SL_{\mathbb{R}}(2)$ mit positiven Diagonaleinträgen mit der Einheitsmatrix verbindet.

d) Beweisen Sie, dass $SL_{\mathbb{R}}(2)$ wegzusammenhängend ist, d.h. zwischen je zwei Elementen von $SL_{\mathbb{R}}(2)$ gibt es eine Kurve.

3. (1-Formen)

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Formen auf $\mathbb{R}^2$ geschlossen bzw. exakt sind.

(i) $\omega_1 = (4x^3y + \cos(y))\mathrm{d}x + (x^4 - x\sin(y))\mathrm{d}y$,

(ii) $\omega_2 = y^2x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$.

b) Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ die 1-Form

$$\omega_3 = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma \omega_3$ mit

$$\gamma : [0,\alpha] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = r(\cos(t), \sin(t)), \quad \alpha, r > 0.$$

Ist ω_3 exakt?

Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion.

4. (Kurvenintegrale)

a) Betrachten Sie die 1-Form

$$\omega_1(x,y) = -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma \omega_1$ für

$$\gamma(t) = e^t(\cos(t), \sin(t)), \quad t \in [0,\alpha], 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

b) Sei

$$\omega_2 = (x\ln(y) + \sin(x))\mathrm{d}x + (-2\cos(x) + \frac{x^2}{2y})\mathrm{d}y.$$

Berechnen Sie $\int_\gamma \omega_2$ für

$$c : [\pi/2, \pi] \to \mathbb{R}^2, c(t) = (t, 1 + \sin(t)).$$

Hinweis: Zerlegen Sie ω in zwei 1-Formen von denen eine exakt ist.