Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2016
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

7. Übungsblatt
„Analysis II”

Abgabe bis Donnerstag 16.06.16 in der Vorlesung

---

1. (Extrema unter Nebenbedingungen)
Bestimmen Sie die Extrema der folgenden Funktionen.

a) $f : \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \to \mathbb{R}, f(x) = x_1 + 2x_2 - 3x_3$,

b) $g : \{x \in \mathbb{R}^4 | x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 = 4, x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2\} \to \mathbb{R}, g(x) = x_1^2 + x_2^2$.

2. (Extrema und Gradienten)
Es sei $D = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = 2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1^2 x_2^2.$$

a) Man bestimme alle lokalen Extrema von f auf den Mengen D und ∂D.

b) Beweisen Sie: Ist $x_0 \in \partial D$, so dass es $\epsilon > 0$ gibt mit

$$x_0 + t\nabla f(x_0) \in D^\circ, \quad 0 < t < \epsilon,$$

so liegt in x_0 kein Maximum von f bzgl. $\bar{D}$ vor. Was bedeutet dies anschaulich?

c) Es sei $x_0 \in \partial D$. Formulieren und beweisen Sie ein Kriterium, so dass in x_0 kein Minimum von f bzgl. $\bar{D}$ vorliegen kann.

d) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von f auf $\bar{D}$.

3. (Extrema und ihre Anwendungen)

a) Der Student Karl gibt sein Stipendium in der Höhe von m Euro für zwei Güter mit Preisen p_1 und p_2 aus. Bestimmen Sie das optimale Konsumbündel (also die Mengen der zwei Güter, die seinen Nutzen maximieren, wenn ihm m Euro zur Verfügung stehen), wenn die Präferenzen von Karl durch die folgenden Nutzenfunktionen beschrieben werden:

(i) $U(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2$,

(ii) $V(x_1, x_2) = x_1 + \sqrt{x_2}$.

Wie hoch ist jeweils der Anteil der Ausgaben für Gut 1 am Einkommen von Karl?

b) Berechnen Sie den Euklidischen Abstand des Punktes $0 \in \mathbb{R}^2$ zur Menge $E \subset \mathbb{R}^2$, wobei

$$E = \{x \in \mathbb{R}^2 | 2x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 = 1\}.$$

4. (Mehrfachintegrale)

a) Überprüfen Sie, ob die Aussage des Satzes von Fubini für die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \times (0,1) \to \mathbb{R}, f(x,y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$$

gilt.

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Berechnen Sie

$$\int_\Omega \sin(x^2 + y^2) dxdy.$$

Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.