Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2016
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

6. Übungsblatt
„Analysis II"

Abgabe bis Donnerstag 09.06.16 in der Vorlesung

---

1. (Ableitungen)

Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^3+x_1x_2^3}{x_1^2+x_2^6}, & x_1 \neq 0 \text{ oder } x_2 \neq 0 \\ 0, & x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 0 \end{cases}, \quad g(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{\sin(x_2)}{\sqrt{1+\frac{x_2^2}{x_1^2}}}, & x_1 \neq 0 \\ 0, & x_1 = 0 \end{cases}.$$

a) Untersuchen Sie f, g auf Stetigkeit.

b) Bestimmen Sie für $\nu \in \mathbb{R}^2$ mit $|\nu| = 1$, ob die Richtungsableitungen von f und g im Punkt $(0,0)$ in Richtung ν (falls diese existieren) und untersuchen Sie, ob diese linear von ν abhängen.

Hinweis: Benutzen Sie die Definition der Richtungsableitung (die erste Gleichung in Gl. (1.26) im Skript) und nicht die Kettenregel!.

c) Untersuchen Sie f und g auf Differenzierbarkeit im Punkt $(0,0)$.

2. (Projektionen)

Sei $B \in M_{\mathbb{R}}(n,k)$ eine reelle $n \times k$ Matrix. und $B^TB \in M_{\mathbb{R}}(k \times k)$ sei strikt positiv definit.

a) Für gegebenes $y \in \mathbb{R}^n$ berechne man den Gradienten der Funktion $q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$q(x) \equiv ||y - Bx||_2^2$$

und zeige, dass

$$\hat{x}(y) \equiv (B^TB)^{-1}B^Ty$$

der eindeutige kritische Punkt der Funktion q ist.

b) Man bestimme die Hesse-Matrix der Abbildung q im kritischen Punkt $\hat{x}$. Liegt ein lokales oder globales Maximum oder Minimum vor?

c) Wir definieren die lineare Abbildung $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $Py = B\hat{x}(y)$ und zeige, dass

$$(P \circ P)y = Py.$$

3. (Extrema)
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale und globale Extrema.

a)

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_1 - 4x_2 + \sin(x_2 - x_3),$$

b)

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(x_1, x_2) = e^{x_1}x_2^3 + 3x_1x_2^2.$$

4. (Mannigfaltigkeiten)
Untersuchen Sie, ob folgende Mengen C^1-Mannigfaltigkeiten sind.. Bestimmen sie ggf. die Dimension und den Tangentialraum in jedem Punkt.

a)

$$M_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 | \exists t > 0 : x_1 = t^{-1}\sin(t) \text{ und } x_2 = t^{-1}\cos(t)\right\},$$

b)

$$M_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ und } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\},$$

c)

$$M_3 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 | ((x_1 - 1)^2 + x_2^2)((x_1 + 1)^2 + x_2^2) = 1\right\}.$$