Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2016
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

5. Übungsblatt
„Analysis II"

Abgabe bis Donnerstag 02.06.16 in der Vorlesung

---

1. (Ableitungen im $\mathbb{R}^n$)

a) Untersuchen Sie die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2. \quad g(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 + x_2^2), \quad h(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_2^2 + x_3^3).$$

b) Berechnen Sie außerdem mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{\partial (f \circ h)(x)}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad \frac{\partial (g \circ h)(x)}{\partial x_i}$$

für $i = 1, 2, 3$ und geben Sie die Ableitungen $D(f \circ h)(x)$ und $D(g \circ h)(x)$ an.

2. (Determinante)

Sei $\mathbb{R}^{n \times n}$ der Raum der $n \times n$- Matrizen über $\mathbb{R}$ zusammen mit der durch die Supremumsnorm induzierten Operatornorm.

a) Beweisen Sie, dass die Determinanten Abbildung

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$$

differenzierbar ist und, dass die Ableitung $D(det)$ im Punkt $A = (a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_j \in \mathbb{R}^n$ gegeben ist durch

$$D(\det)(A)(H) = \sum_{j=1}^{n} \det(a_1, \ldots, a_{j-1}, h_j, a_{j+1}, \ldots, a_n),$$

für $H = (h_1, \ldots, h_n)$ mit $h_j \in \mathbb{R}^n$.

b) Für $A(t) = (a_1(t), \ldots, a_n(t))$ mit $a_j \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ sei

$$f(t) = \det(A(t)).$$

Bestimmen sie $\frac{\partial f(t)}{\partial t}$.

3. (Wärmeleitungsgleichung und Wellengleichung)

a) Beweisen Sie, dass die Funktion $f : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(t, x) = t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^n, t \in (0, \infty),$$

die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \Delta_x f = 0$$

erfüllt, wobei

$$\Delta_x f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n}.$$

b) Beweisen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x, t) = \frac{\cos(\|x\| - t)}{\|x\|} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, t \in \mathbb{R},$$

die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial t)^2} - \Delta_x f = 0$$

erfüllt.

4. (Maximum)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, die Abbildung $f : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und $f|_D : D \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ferner sei $Df(x)$ für alle $x \in D$ invertierbar. Zeigen Sie, dass $\|f\|$ sein globales Maximum nicht in D annehmen kann und

$$\max_{x \in \bar{D}} \|f(x)\| = \max_{x \in \partial D} \|f(x)\|.$$