Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2016
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

4. Übungsblatt
„Analysis II"

Abgabe bis Montag 23.05.16 in der Vorlesung

---

1. (Folgenraum-Hilbertraum?)

a) Sei X ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\|\cdot\|$ die dadurch induzierte Norm. Beweisen Sie, dass für alle $x, y \in X$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

b) Für $p \in \mathbb{N}$ sei

$$\ell^p = \{\text{Folgen } x \text{ mit Folgengliedern } x_n \in \mathbb{R} | \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

wie in Aufgabe 1, Blatt 3. Beweisen Sie, dass die p-Norm auf ℓ^p genau dann ein Skalarprodukt induziert, wenn $p = 2$ ist.

2. (Abgeschlossene Teilräume)

Sei X ein normierter Vektorraum und $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum mit $Y \neq X$. Dann existiert für jedes $0 < \alpha < 1$ ein $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ und

$$d(x, Y) \equiv \inf_{y \in Y} \|x - y\| \geq \alpha.$$

3. (Einheitskugeln)

Sei X ein Banachraum. Beweisen Sie, dass die Einheitskugel genau dann kompakt ist, wenn X endlich-dimensional ist.
Hinweis: Verwenden Sie die vorherige Aufgabe.

4. (Äquivalente Normen)

Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei beliebige Normen auf $\mathbb{R}^n$.

a) Beweisen, Sie dass es dann $c_1, c_2 > 0$ gibt, so dass

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

b) Beweisen Sie, dass die Menge der konvergenten Folgen bezüglich beider Normen übereinstimmt.