Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2016
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

3. Übungsblatt
„Analysis II"

Abgabe bis Montag 09.05.16 in der Vorlesung

---

1. (Folgenraum)
Für $1 \leq p < \infty$ sei

$$\ell^p = \{\text{Folgen } x \text{ mit Folgengliedern } x_n | \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

a) Beweisen Sie, dass ℓ^p ein Banachraum bezüglich der p-Norm

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

ist.

b) Beweisen Sie, dass die Einheitskugel in ℓ^p nicht kompakt ist.

2. (Lineare Abbildungen)
Es sei $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m, T(x) = Ax$ für eine $m \times n$ Matrix A mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie, dass

a) $\sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|T(x)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$,

b) $\max_{\lambda \text{ Eigenwert von } T} |\lambda| \leq \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

3. (L^1-Raum)
Betrachten Sie die normierten Räume $X = (C([0,1])), \| \cdot \|_{L^1})$ und $Y = (C([0,1])), \| \cdot \|_\infty)$, wobei $\| \cdot \|_\infty)$ die Supremumsnorm auf $[0,1]$ bezeichne und

$$\|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

Beweisen Sie, dass

$$I : X \to Y, \quad I(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

eine wohldefinierte, lineare und stetige Abbildung ist.

4. (Fixpunkte)

Es sei X ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Abbildung. Es gebe $c_n \geq 0$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$, so dass für alle $x, y \in X$

$$d(f^{\circ n}(x), f^{\circ n}(y)) \leq c_n d(x, y)$$

gilt, wobei $f^{\circ n}$ die n-fache Komposition von f ist. Beweisen Sie, dass f einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.

Die Fachschaft Mathematik feiert am 12.05 ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 9.05., Di. 10.05. und Mi. 11.05. vor der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weiteren Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de