Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2016
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

2. Übungsblatt
„Analysis II"

Abgabe bis Donnerstag 28.04.16 in der Vorlesung

---

1. (Produkttopologie)

Wir betrachten die Menge der $0-1-$Folgen $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Wir definieren als Umgebungstopologie die kleinste Umgebungstopologie, so dass für jedes Element $x \equiv (x_1, x_2, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $N(x)$ alle Mengen der Form

$$U = \{x_1\} \times \dots \times \{x_k\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots$$

mit $k \in \mathbb{N}$ enthält. Nun definiert $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, N)$ einen topologischen Raum.

a) Wir definieren die Abbildung $d : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+$ durch

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|x_k - y_k|.$$

Zeigen Sie, dass d eine Metrik ist.

b) Beweisen Sie, dass die obige Topologie gleich der durch die Metrik d definierten metrischen Topologie ist.

c) Eine Funktion $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ heißt quasilokal, falls

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{x,y\in\{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ \forall i \le n, x_i = y_i}} d(f(x), f(y)) = 0.$$

Beweisen Sie, dass eine Funktion $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ genau dann stetig ist, wenn sie quasilokal ist.

2. (Kettenregel)

Beweisen Sie die folgende Aussage. Seien X, Y, Z Banachräume und $f : X \to Y$ sowie $g : Y \to Z$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f : X \to Z$ differenzierbar und es gilt

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x).$$

3. (Cantormenge)

Für ein kompaktes Intervall $[a,b]$ bezeichne $\widetilde{[a;b]} \equiv \left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b, \frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b\right)$ das offene mittlere Drittel und für disjunkte Vereinigungen $U = \cup_{i=1}^k [a_i,b_i]$ sei $\widetilde{U} = \cup_{i=1}^k \widetilde{[a_i,b_i]}$. Wir definieren rekursiv:

$$C_0 \equiv [0,1], \quad C_n \equiv C_{n-1} \setminus \widetilde{C_{n-1}} \quad \text{für } n > 0,$$

und die Cantormenge $C \equiv \cap_{n=1}^\infty C_n$.

a) Skizzieren Sie $C_0, \ldots, C_4$. Ist C dicht in $[0,1]$?

b) Beweisen Sie, dass C abgeschlossen (als Teilmenge von $\mathbb{R}$) ist. Ist C vollständig?

c) Beweisen Sie, für alle $n \in \mathbb{N}$, dass die Menge C_n eine disjunkte Vereinigung von 2^n kompakten Intervallen der Länge 3^{-n} ist.

d) Bestimmen Sie das Innere, den Rand und alle Häufungspunkte von C (als Teilmenge von $\mathbb{R}$).

4. (Graphen einer Funktion)

Es seien $(X_i, d_i), i = 1, 2$ metrische Räume und $f : X_1 \to X_2$ stetig. Man beweise, dass

$$\text{graph}(f) \equiv \{(x_1, f(x_1)) | x_1 \in X_1\} \subset X_1 \times X_2$$

abgeschlossen bzgl. der Metrik $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max_{i=1,2} d_i(x_i,y_i)$. Gilt auch die Umkehrung, d.h. folgt aus der Abgeschlossenheit von graph(f) die Stetigkeit von f?