Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2016
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

1. Übungsblatt
„Analysis II"

Abgabe bis Donnerstag 21.04.16 in der Vorlesung

---

1. (Topologien (10 Punkte))

a) Betrachte die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zusammen mit der Abbildung $U_1 : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ mit $U_1(x) = \{\{x\}, \mathbb{N}\}$. Welches ist die kleinste Umgebungstopologie N_1, so dass $N_1(x)$ $U_1(x)$ enthält?

b) Betrachte die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zusammen mit der Abbildung $U_2 : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ mit $U_2(x) = \{\mathbb{N}\}$. Welches ist die kleinste Umgebungstopologie N_2, so dass $N_2(x)$ $U_2(x)$ enthält?

c) Zeige, dass $(\mathbb{N}, N_2)$ kein Haussdorff-Raum ist.

d) Bestimme die offenen Mengen in $(\mathbb{N}, N_1)$ und $(\mathbb{N}, N_2)$. Bestimme außerdem je alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

e) Klassifizieren Sie alle konvergenten Folgen in den beiden Topologien.

f) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $(\mathbb{N}, N_1)$ ist zusammenhängend.

(ii) $(\mathbb{N}, N_2)$ ist zusammenhängend.

(iii) Der Zwischenwertsatz gilt in $(\mathbb{N}, N_1)$ bzw. $(\mathbb{N}, N_2)$.

g) Betrachten Sie die Metrik auf $\mathbb{N}$ durch

$$d_{0,1}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(i) Zeigen, Sie dass $d_{0,1}$ tatsächlich eine Metrik definiert.

(ii) Zeigen Sie, dass die durch $d_{0,1}$ induzierte metrische Topologie die N_1-Topologie ist.

(iii) Welche Metrik induziert die Topologie $(\mathbb{N}, N_2)$?

2. (Metrische Räume)

a) Beweisen Sie: Ist $f : X \to Y$ eine stetige bijektive Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen und X kompakt, so ist $f^{-1} : Y \to X$ stetig. Finden Sie ein Gegenbeispiel für den Fall, dass X nicht kompakt ist.

b) Das Produkt $X = X_1 \times X_2$ zweier metrischer Räume ist ein metrischer Raum mit der Matrik $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2)$. Zeige, dass X genau dann kompakt ist, wenn X_1 und X_2 kompakt ist.

3. (Normen)

a) Beweise, dass die in der Vorlesung definierte Operatornorm eine Norm ist.

b) Betrachte den Raum $C^{(0)}([0, 1])$ der stetigen Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Definiere die L^2-Norm durch

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}.$$

(i) Zeigen, Sie dass $\| \cdot \|_2$ tatsächlich eine Norm definiert.

(ii) Zeigen Sie, das der Raum $C^{(0)}([0, 1])$ zusammen mit der L^2-Norm nicht vollständig ist.